Dinámica Topológica
Conexión de los conjuntos omega-límite.

Eleonora Catsigeras[1]
Asesoramiento a Leonardo Parra[2].
Directora de Posgrado: Cristina Lizana[3]

7 de Septiembre de 2015

Sea X un espacio topológico.

Definición 1. (Conjunto conexo)
Un conjunto no vacío $A \subset X$ se dice *conexo* si para toda pareja de abiertos disjuntos tales que

$$A = (A \cap U) \;\cup\; (A \cap V)$$

se cumple

$$A \cap U = \emptyset \;\text{ ó }\; A \cap V = \emptyset.$$

Por ejemplo, un intervalo en la recta es conexo. Una propiedad importante es que si $\varphi : A \mapsto B$ es una función continua, y A es conexo, entonces B es conexo. Dicho de otra forma, la imagen continua de un conexo, es conexo. En particular sea $\varphi : I \mapsto X$, donde I es un intervalo de la recta real, una parametrización continua de la curva $\varphi(I) \subset X$. Entonces, como I es conexo, y la parametrización φ es continua, la curva $\varphi(I)$ es un conjunto conexo de X.

Sea ahora X un espacio métrico compacto.

Definición 2. (Flujo o Sistema Dinámico a Tiempo Real)
Un *sistema dinámico continuo a tiempo real* en el espacio X, llamado también *flujo,* es una aplicación continua:

$$\phi : X \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \mapsto X,$$

(donde $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es el conjunto de los números reales no negativos, y se llama semieje del tiempo hacia el futuro), tal que:

$$\phi(x, 0) = x \;\; \forall\, x \in X, \quad \text{y} \quad \phi(x, t + s) = \phi(\phi(x, t), s) \;\forall\, x \in X,\; \forall\, t, s \geq 0.$$

[1]Instituto de Matemática y Estadística "Rafael Laguardia" (IMERL), Universidad de la República, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

[2]Estudiante de la Maestría en Matemática en la Universidad de Los Andes (ULA), Mérida, Venezuela. Correo electrónico: leonardoparra088@gmail.com

[3]Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Correo electrónico:clizana@ula.ve

Definición 3. (Órbita)

Dado un punto $x \in X$, y un flujo ϕ, se llama *órbita* por el flujo ϕ del punto x, o también órbita con estado inicial x, a la curva paramétrica:

$$\text{orb}(x) : t \mapsto \phi(x,t)$$

definida para todo t real no negativo. Se denota $\text{orb}(x) = \{\phi(x,t)\}_{t \geq 0}$. Se observa que la órbita del punto x es una curva continua (y por lo tanto conexa) en el espacio X, parametrizada por la variable tiempo $t \geq 0$, y además esta curva $\text{orb}(x)$ tiene extremo inicial en el punto x, pues $\phi(x,0) = x$.

Definición 4. (Omega-límite) Sea ϕ un flujo en el espacio métrico compacto X. Dado un punto $x \in X$ se llama *omega-límite de* x al conjunto $\omega(x) \subset X$ definido por:

$$\omega(x) := \{y \in X : \ \ \exists t_n \to +\infty \text{ tal que } \lim_{n \to +\infty} \phi(x, t_n) = y\}.$$

Dicho de otra forma, $\omega(x)$ es el conjunto de todos los puntos límites de la órbita $\text{orb}(x) = \{\phi(x,t)\}_{t \geq 0}$ para subsucesiones $\{t_n\}_{n \geq 0}$ de instantes $t = t_n$ que tienden a $+\infty$.

Ejercicio 5. Probar que $\omega(x)$ es compacto y no vacío, cualquiera sea el punto $x \in X$.

Sugerencia: Para demostrar que $\omega(x) \neq \emptyset$, recordar que en un espacio métrico compacto, toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Para demostrar que $\omega(x)$ es compacto, basta demostrar que $\omega(x)$ es cerrado, pues el espacio X donde está contenido el conjunto $\omega(x)$ es compacto. Y finalmente, para demostrar que $\omega(x)$ es cerrado, basta demostrar que cualquier sucesión de puntos $p_n \in \omega(x)$, si es convergente en X, entonces su límite pertenece a $\omega(x)$.

Teorema 6. (Conexión del omega-límite)

Sea ϕ un flujo continuo en el espacio métrico compacto X. Para cualquier punto $x \in X$ el conjunto omega-límite $\omega(x)$ es conexo.

Demostración: Supongamos por absurdo que $\omega(x)$ no es conexo. Entonces, aplicando la Definición 1, existen dos abiertos $U, V \subset X$ disjuntos tales que

$$\omega(x) = \big(\omega(x) \ \cap \ U\big) \ \cup \ \big(\omega(x) \ \cap \ U\big), \tag{1}$$

y además

$$\omega(x) \ \cap \ U \neq \emptyset, \quad \ \omega(x) \ \cap V \neq \emptyset. \tag{2}$$

Tomemos dos puntos $z_1 \in \omega(x) \cap U, \quad z_2 \in \omega(x) \cap V$. Por la Definición 4 del conjunto omega-límite de x, y teniendo en cuenta que $z_1, z_2 \in \omega(x)$, deducimos que existen sucesiones $t_n, s_n \to +\infty$ tales que $\lim_n \phi(x, t_n) = z_1, \ \ \lim_n \phi(x, s_n) = z_2$. Como $z_1 \in U, \ z_2 \in V$ y los conjuntos U, V son abiertos, de la definición de límite deducimos que $\phi(x, t_n) \in U, \ \ \phi(x, s_n) \in V$ para todo n suficientemente grande. Entonces, sin pérdida de generalidad (eventualmente borrando una cantidad finita de términos de la sucesiones $\{t_n\}$ y $\{s_n\}$ y reindexando después estas sucesiones), podemos asumir que

$$\phi(x, t_n) \in U, \quad \phi(x, s_n) \in V \ \ \forall\, n \geq 0, \quad \lim t_n \to +\infty, \ \ \lim s_n \to +\infty.$$

Ahora construimos subsucesiones $\{t^*_h\}_{h\geq 0}$ y $\{s^*_h\}_{h\geq 0}$ de $\{t_n\}_n$ y $\{s_n\}_n$ respectivamente, tales que

$$t^*_h < s^*_h < t^*_{h+1} < s^*_{h+1} \quad \forall\, h \in \mathbb{N}.$$

Como $\{t^*_h\}_{h\geq 0}$ y $\{s^*_h\}_{h\geq 0}$ son subsucesiones de $\{t_n\}_n$ y $\{s_n\}_n$ respectivamente, tenemos:

$$\lim_{h\to+\infty} t^*_h = +\infty, \qquad \lim_{h\to+\infty} s^*_h = +\infty,$$

$$\phi(x, t^*_h) \in U, \quad \phi(x, s^*_h) \in V \qquad \forall\, h \in \mathbb{N}.$$

Consideremos para $h \in \mathbb{N}$ fijo, la curva $\mathcal{C}_h = \{\phi(x,\tau)\}_{t^*_h \leq \tau \leq s^*_h}$, que es un arco conexo y compacto de la órbita por el punto x. Por construcción, tenemos

$$\phi(x, t^*_h) \in \mathcal{C} \cap U \neq \emptyset, \quad \phi(x, s^*_h) \in \mathcal{C} \cap V \neq \emptyset.$$

Siendo $\mathcal{C}_h \subset X$ conexo, de la Definición 1, deducimos:

$$\mathcal{C}_h \ \neq \ (\mathcal{C} \cap U) \ \cup \ (\mathcal{C}_h \cap V),$$

o equivalentemente, existe un punto

$$p_h \in \mathcal{C}_h \ \setminus \ (U \cup V).$$

Como $p_h \in \mathcal{C}_h = \{\phi(x,\tau)\}_{t^*_h \leq \tau \leq s^*_h}$, existe un instante $\tau_h \in [t^*_h, s^*_h]$ tal que

$$p_h = \phi(x, \tau_h) \in X \setminus (U \cup V), \qquad t^*_h \leq \tau_h \leq s^*_h.$$

El espacio métrico X es compacto, entonces toda sucesión en X tiene alguna subsucesión convergente. Por lo tanto, existe una subsucesión

$$p_{h_j} = \phi(x, \tau_{h_j})_{j\to+\infty} \to q, \qquad \tau_{h_j} \geq t^*_{h_j} \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Como $p_{h_j} \in X \setminus (U \cup V)$, y $U \cup V$ es abierto, $X \setminus (U \cup V)$ es cerrado; luego $q = \lim_j p_{h_j} \in X \setminus (U \cup V)$. Equivalentemente

$$q \notin U \cup V.$$

Por otra parte, como $\tau_{h_j} \geq t^*_{h_j} \to +\infty$, y $p_{h_j} = \phi(x, \tau_{h_j}) \to q$, tenemos

$$q \in \omega(x).$$

Por lo tanto

$$q \in \omega(x) \setminus (U \cup V),$$

de donde

$$\omega(x) \neq (\omega(x) \cap U) \ \cup \ (\omega(x) \cap V),$$

contradiciendo la igualdad (1), y terminando la demostración del Teorema 6. $\square$

Definición 7. (Sistema Dinámico Discreto a Tiempo Natural)

Un *sistema dinámico discreto a tiempo natural* en el espacio X, llamado también *sistema dinámico por iterados de f,* es una aplicación continua:

$$\phi : X \times (\mathbb{N}) \mapsto X,$$

tal que:

$$\phi(x, 0) = x \ \ \forall \ x \in X, \quad \text{y} \quad \phi(x, n + m) = \phi(\phi(x, n), m) \ \forall \ x \in X, \ \forall \ n, m \in \mathbb{N}.$$

Si denotamos $f(x) = \phi(x, 1)$ obtenemos $\phi(x, 2) = \phi(\phi(x, 1), 1) = (f \circ f)(x) =: f^2(x)$. Por inducción en $n \in \mathbb{N}^+$, deducimos $\phi(x, n) = f^n(x) \ \ \forall \ x \in X, \ \ \forall \ n \geq 1$, donde f^n denota la composición de f consigo misma n veces, es decir $f^n := f \circ f \circ \ldots \circ f$ donde f está repetida n veces.

Por convención $f^0 = id$ es el mapa identidad. Entonces $\phi(x, 0) = x = f^0(x) \ \ \forall \ x \in X$.

Deducimos que el sistema dinámico ϕ a tiempo natural $n \in \mathbb{N}$ es el sistema dinámico por iterados de una aplicación continua $f : X \mapsto X$. Más precisamente

$$\phi(x, n) = f^n(x) \quad \forall \ x \in X, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Definición 8. (Órbita)

Dado un punto $x \in X$, y el sistema dinámico por iterados de $f : X \mapsto X$, se llama *órbita* del punto x, o también órbita con estado inicial x, a la sucesión

$$\text{orb}(x) : n \in \mathbb{N} \mapsto f^n(x),$$

definida para todo $n \geq 0$ natural. Se denota $\text{orb}(x) = \{f^n(x)\}_{n \geq 0}$. Se observa que la órbita del punto x es una sucesión (y en el espacio X con punto inicial en el punto x, pues $f^0(x) = x$.

Definición 9. (Omega-límite) Sea $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema dinámico por iterados de $f : X \mapsto X$ en el espacio métrico compacto X. Dado un punto $x \in X$ se llama *omega-límite de x* al conjunto $\omega(x) \subset X$ definido por:

$$\omega(x) := \{y \in X : \ \ \exists n_j \to +\infty \text{ tal que } \lim_{j \to +\infty} f^{n_j}(x) = y\}.$$

Dicho de otra forma, $\omega(x)$ es el conjunto de todos los puntos límites de las subsucesiones convergentes de la órbita $\text{orb}(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Ejercicio 10. Para el sistema dinámico por iterados de f, donde $f : X \mapsto X$ es una aplicación continua en el espacio métrico compacto X, probar que $\omega(x)$ es compacto y no vacío, cualquiera sea el punto $x \in X$.

Proposición 11.

Sea el sistema dinámico por iterados de un mapa continuo $f : X \mapsto X$ en un espacio métrico compacto. Sea $x \in X$. El conjunto omega-límite $\omega(x)$ no es necesariamente conexo ni es necesariamente desconexo.

Demostración: Basta exhibir dos ejemplos f_1 y f_2. Uno, para el cual exista un punto p_1 con $\omega(p_1)$ conexo, y otro para el cual existe un punto p_2 con $\omega(p_2)$ desconexo.

El primer ejemplo: Sea $X = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$, y sea $f_1 : X \mapsto X$ definida por

$$f_1(x, y) := (x/2, y/2) \ \ \forall \ -2 \leq x \leq 2, \ \ \forall \ -2 \leq y \leq 2.$$

Entonces

$$f_1^n(x, y) = (x/2^n, y/2^n) \to_{n \to +\infty} (0, 0) \quad \forall \ (x, y) \in X,$$

de donde se deduce que $\omega(x, y) = (0, 0)$ es conexo, para todo $p = (x, y) \in X$.

El segundo ejemplo: Sea $X = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$, y sea $f_2 : X \mapsto X$ definida por

$$f_2(x, y) = (-\sqrt[3]{x}, \ y/2) \ \ \forall \ -2 \leq x \leq 2, \ \ \forall \ -2 \leq y \leq 2.$$

Entonces,

$$f_2^n(x, y) = \big((-1)^n \sqrt[3^n]{x}, \ y/2^n\big) \ \ \forall \ (x, y) \in X.$$

Si $x \neq 0$, entonces toda subsucesión convergente de $\{f_2^n(x, y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es, o bien una subsucesión de $\{f_2^{2m}(x, y)\}_{m \in \mathbb{N}}$ que converge a

$$\lim_{m \to +\infty} \big(x^{1/3^{2m}}, y/2^{2m}\big) = (1, 0),$$

o bien una subsucesión de $\{f_2^{2m+1}(x, y)\}_{m \in \mathbb{N}}$ que converge a

$$\lim_{m \to +\infty} \big(-x^{1/3^{2m+1}}, y/2^{2m+1}\big) = (-1, 0).$$

Entonces $\omega(x, y) = \{(-1, 0), \ (1, 0)\}$ si $x \neq 0$, que es un conjunto desconexo. $\square$