

# Topología y Transitividad del Shift Unilateral.

Eleonora Catsigeras<sup>1</sup>

Asesoramiento a Odalis Sofía Ortega<sup>2</sup>.

Directora de Posgrado: Cristina Lizana<sup>3</sup>

31 de Agosto de 2015

Consideremos el conjunto  $\{0, 1\}$ , al que llamamos *alfabeto* de dos símbolos 0 y 1.

## Definición 1. (Espacio del shift unilateral)

Se llama *espacio del shift unilateral* con el alfabeto  $\{0, 1\}$  al espacio métrico de las sucesiones

$$\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

dotado de la métrica

$$\text{dist}(\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\theta_n - \phi_n|}{2^n}.$$

## Definición 2. (La transformación shift)

Se llama *shift* a la transformación  $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  definida por

$$\sigma(\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ donde } \gamma_n := \sigma_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## Definición 3. (Transitividad topológica)

Sea  $X$  un espacio métrico. Una transformación  $T : X \mapsto X$  se dice *transitiva topológicamente* (o en breve *transitiva*), si para toda pareja de abiertos no vacíos  $U, V \subset X$  existe  $n \geq 1$  tal que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

**Observación:** La transitividad topológica de una transformación no depende de la métrica elegida en  $X$ , siempre que esta defina una misma topología. Es decir, depende solo de la topología, y no de la métrica particular que la induce.

---

<sup>1</sup>Instituto de Matemática y Estadística “Rafael Laguardia” (IMERL), Universidad de la República, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

<sup>2</sup>Estudiante de la Maestría en Matemática en la Universidad de Los Andes (ULA), Mérida, Venezuela. Correo electrónico: odalisortega18@gmail.com

<sup>3</sup>Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Correo electrónico: clizana@ula.ve

**Teorema 4.**

*El shift unilateral es transitivo.*

Antes de demostrar el Teorema 4, veamos algunas propiedades de la topología del espacio métrico del shift:

**Definición 5. (Cilindros)**

Sea

$$\Theta = \{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

una sucesión de símbolos con el alfabeto  $\{0, 1\}$ . Sean  $k$  y  $r$  números naturales tales que  $k \geq 0$  y  $r \geq 1$ .

Se llama *cilindro que contiene a  $\Theta$ , de radio  $r$  y con coordenadas fijas  $k, k+1, \dots, k+r-1$* , al siguiente conjunto  $C(\Theta, k, r)$  contenido en el espacio del shift  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ :

$$C(\Theta, k, r) := \{\Psi = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \psi_{k+j} = \theta_{k+j} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, r-1\}\}.$$

Es decir, el cilindro  $C(\Theta, k, r)$  es el conjunto de todas las sucesiones  $\Psi$  del espacio del shift tales que los  $r$  términos de  $\Psi$  que ocupan los lugares  $k, k+1, \dots, k+r-1$ , coinciden con los  $r$  términos de  $\Theta$  que ocupan esos mismos lugares. En los demás lugares (que son infinitos lugares a la derecha a partir del lugar  $k+r$  inclusive, y finitos lugares, si existen, a la izquierda del lugar  $k$ ), los términos de las sucesiones  $\Psi$  en el cilindro, son libres de tomar cualquier valor en el alfabeto.

**Teorema 6.** *El conjunto de cilindros forman una base de la topología del espacio métrico del shift unilateral.*

Es decir, todo cilindro es abierto no vacío, y cualquier abierto no vacío es unión de cilindros.

Demostraremos el Teorema 6, mediante la combinación de los Lemas 7 y 8 siguientes:

**Lema 7.**

*Todo cilindro es abierto no vacío en el espacio métrico  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  del shift unilateral.*

*Demostración:* De la Definición 5 sabemos que el cilindro  $C(\Theta, k, r)$  contiene a  $\Theta \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ; por lo tanto el cilindro es no vacío.

Para demostrar que el cilindro  $C(\Theta, k, r)$  es abierto, consideremos cualquier sucesión  $\Phi \in C(\Theta, k, r)$  y probemos que existe una bola

$$B(\Phi, r') := \{\Psi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \text{dist}(\Phi, \Psi) < r'\},$$

centrada en  $\Phi$  con radio  $r' > 0$  tal que  $B(\Phi, r') \subset C(\Theta, k, r)$ . En efecto, sea

$$r' := \min \left\{ \frac{1}{2^j} : 0 \leq j \leq k+r-1 \right\}.$$

Si  $\Psi \in B(\Phi, r')$  entonces

$$\text{dist}(\Phi, \Psi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|\phi_j - \psi_j|}{2^j} < r' = \min \left\{ \frac{1}{2^j} : 0 \leq j \leq k+r-1 \right\}.$$

Pero como  $|\phi_j - \psi_j|$  solo puede tomar el valor 0 o el valor 1, deducimos que

$$\phi_j = \psi_j \quad \forall 0 \leq j \leq k+r-1,$$

y en particular para  $j \in \{k, k+1, \dots, k+r-1\}$ .

Por otra parte como  $\Phi \in C(\Theta, k, r)$ , de la Definición 5 obtenemos que

$$\phi_j = \theta_j \quad \forall j \in \{k, k+1, \dots, k+r-1\}.$$

Concluimos que  $\psi_j = \theta_j$  para todo  $j \in \{k, k+1, \dots, k+r-1\}$ . Por lo tanto  $\Psi \in C(\Theta, k, r)$  para cualquier sucesión  $\Psi \in B(\Phi, r')$ . Equivalentemente  $B(\Phi, r') \subset C(\Theta, k, r)$ , como queríamos demostrar.  $\square$

**Lema 8.**

*Todo abierto no vacío del espacio métrico del shift es unión de cilindros.*

*Demostración:* Sea  $V \neq \emptyset$  abierto del espacio métrico  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Entonces, para todo punto  $\Theta \in V$  existe una bola abierta  $B(\Theta, r')$  contenida en  $V$ , y por lo tanto  $V$  es unión de esas bolas abiertas (una para cada punto  $\Theta \in V$ ). Si demostramos que toda bola abierta  $B(\Theta, r')$  contiene algún cilindro  $C(\Theta, k, r)$ , entonces obtendríamos  $V$  como unión de esos cilindros (uno para cada punto  $\Theta \in V$ ).

En efecto, sea dada una bola abierta

$$B(\Theta, r') := \{\Phi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \text{dist}(\Theta, \Phi) < r'\}.$$

Construyamos dos naturales  $k \geq 0$  y  $r \geq 1$  tales que el cilindro  $C(\Theta, k, r)$  esté contenido en  $B(\Theta, r')$ .

Dado  $r' > 0$ , sean  $k := 0$  y  $r \geq 1$  tal que

$$\sum_{j=r}^{+\infty} \frac{1}{2^j} < r'.$$

(Tal natural  $r \geq 1$  existe porque la serie  $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}$  es convergente, y por lo tanto su cola  $\sum_{j=r}^{+\infty}$  tiende a cero cuando  $r \rightarrow +\infty$ .)

Basta ahora probar que  $C(\Theta, 0, r) \subset B(\Theta, r')$ . Sea  $\Phi \in C(\Theta, 0, r)$ . De la Definición 5, obtenemos  $\phi_j = \theta_j$  para todo  $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ . Entonces

$$\text{dist}(\Phi, \Theta) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|\phi_j - \theta_j|}{2^j} = \sum_{j=r}^{+\infty} \frac{|\phi_j - \theta_j|}{2^j}.$$

Como  $|\phi_j - \theta_j|$  vale 0 o vale 1, de la última igualdad obtenemos:

$$\text{dist}(\Phi, \Theta) = \sum_{j=r}^{+\infty} \frac{|\phi_j - \theta_j|}{2^j} \leq \sum_{j=r}^{+\infty} \frac{1}{2^j} < r'.$$

Concluimos que  $\Phi \in B(\Theta, r')$  cualquiera sea  $\Phi \in C(\Theta, 0, r)$ . Por lo tanto, el cilindro  $C(\Theta, 0, r)$  está contenido en la bola  $B(\Theta, r')$ , como queríamos demostrar.  $\square$

*Demostración del Teorema 6.* Es consecuencia inmediata de los Lemas 7 y 8.  $\square$

Ahora demostraremos el Teorema 4. Para ello, primero probaremos el siguiente lema:

**Lema 9.** *Para cualquier cilindro  $C(\Theta, k, r)$  existe un número natural  $n \geq 1$  tal que*

$$\sigma^n(C(\Theta, k, n)) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Es decir, todo cilindro tiene algún iterado por el shift que es igual a todo el espacio.

*Demostración:* Sea dado el cilindro  $C(\Theta, k, r)$ , donde  $k$  y  $r$  son números naturales tales que  $k \geq 0$  y  $r \geq 1$ . Elijamos  $n = k + r \geq 1$ . Usando la Definición 2, escribimos extensivamente el conjunto  $\sigma^n(C(\Theta, k, r))$  de la siguiente forma:

$$\sigma^n(C(\Theta, k, r)) = \left\{ \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \exists \{\phi_h\}_{h \in \mathbb{N}} \in C(\Theta, k, r) \text{ tal que } \psi_j = \phi_{n+j} \forall j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ahora, usando la igualdad anterior y la Definición 5 de cilindro, obtenemos:

$$\sigma^n(C(\Theta, k, r)) = \left\{ \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} :$$

$$\exists \{\phi_h\}_{h \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \phi_h = \theta_h \forall h \in \{k, k+1, \dots, k+r-1\}, \text{ y } \psi_j = \phi_{n+j} \forall j \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1)$$

Pero si  $n = k+r$  entonces, dada cualquier sucesión  $\{\psi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ , se puede construir la sucesión  $\{\phi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  del siguiente modo:

$$\phi_h := \psi_{h-n} \quad \text{si } h \geq n = k+r,$$

$$\phi_h := \theta_h \quad \text{si } 0 \leq h \leq n-1 = k+r-1.$$

Usando la igualdad (1) deducimos que cualquier sucesión  $\{\psi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  pertenece al conjunto  $\sigma^n(C(\Theta, k, r))$ , y por lo tanto este conjunto es todo el espacio  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , como queríamos demostrar.  $\square$

*Demostración del Teorema 4:*

De acuerdo a la Definición 3, debemos probar que dada una pareja  $(U, V)$  de abiertos no vacíos del espacio  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , existe un número natural  $n \geq 1$  tal que  $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Usando el Lema 8, existen cilindros  $C(\Theta_1, k_1, r_1)$  y  $C(\Theta_2, k_2, r_2)$  contenidos en los abiertos  $U$  y  $V$  respectivamente. Por lo tanto, basta demostrar que existe un número natural  $n \geq 1$  tal que  $\sigma^n(C(\Theta_1, k_1, r_1)) \cap C(\Theta_2, k_2, r_2) \neq \emptyset$ .

Pero por el lema 9, existe  $n \geq 1$  tal que  $\sigma^n(C(\Theta_1, k_1, r_1))$  es todo el espacio  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Concluimos que  $\sigma^n(C(\Theta_1, k_1, r_1))$  contiene, y por lo tanto intersecta, al cilindro  $C(\Theta_2, k_2, r_2)$  como queríamos demostrar.  $\square$

### Definición 10. (Espacio del shift bilateral)

Se llama *espacio del shift bilateral* con el alfabeto  $\{0, 1\}$  al espacio métrico de las sucesiones bilaterales

$$\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$$

dotado de la métrica

$$\text{dist}(\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\theta_n - \phi_n|}{2^{|n|}}.$$

### Definición 11. (La transformación shift hacia la izquierda)

Se llama *shift hacia la izquierda* a la transformación  $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \mapsto \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  definida por

$$\sigma(\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \text{ donde } \gamma_n := \sigma_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

### Definición 12. (Cilindros en el espacio del shift bilateral)

Sea

$$\Theta = \{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$$

una sucesión bilateral de símbolos con el alfabeto  $\{0, 1\}$ . Sea  $k$  y  $r$  números enteros tales que  $r \geq 1$ .

Se llama *cilindro que contiene a  $\Theta$ , de radio  $r$  y con coordenadas fijas  $k, k+1, \dots, k+r-1$* , al siguiente conjunto  $C(\Theta, k, r)$  contenido en el espacio del shift  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ :

$$C(\Theta, k, r) := \{\Psi = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : \psi_{k+j} = \theta_{k+j} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, r-1\}\}.$$

Es decir, el cilindro  $C(\Theta, k, r)$  es el conjunto de todas las sucesiones  $\Psi$  del espacio del shift bilateral tales que los  $r$  términos de  $\Psi$  que ocupan los lugares  $k, k+1, \dots, k+r-1$ , coinciden con los  $r$  términos de  $\Theta$  que ocupan esos mismos lugares. En los demás lugares (que son infinitos lugares a la derecha a partir del lugar  $k+r$  inclusive, e infinitos lugares a la izquierda a partir del lugar  $k-1$  inclusive), los términos de las sucesiones  $\Psi$  en el cilindro, son libres de tomar cualquier valor del alfabeto.

**Ejercicio 13.**

Demostrar las siguientes proposiciones:

1. Todo cilindro es abierto no vacío en el espacio métrico  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  del shift bilateral.
2. Cualquier abierto no vacío del espacio métrico  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  es unión de cilindros.
3. El conjunto de cilindros forman una base de la topología del espacio métrico del shift bilateral.
4. Para cualquier cilindro  $C(\Theta, k, r)$  y para todo natural  $n \geq 1$  se cumple

$$\sigma^n(C(\Theta, k, n)) \neq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Es decir, ningún cilindro tiene un iterado por el shift bilateral que es igual a todo el espacio.

5. Dada una pareja  $(C(\Theta_1, k_1, r_1), C(\Theta_2, k_2, r_2))$  de cilindros en el espacio del shift bilateral  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , existe un natural  $n \geq 1$  tal que

$$\sigma^n(C(\Theta_1, k_1, r_1)) \cap C(\Theta_2, k_2, r_2) \neq \emptyset.$$

6. El shift hacia la izquierda en el espacio del shift bilateral, es transitivo.