

Propuesta de planes de investigación y de Tesis de Postgrado

Eleonora Catsigeras

Instituto de Matemática y Estadística
“Prof. Ing. Rafael Laguardia”
(IMERL)
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

2011

PROPUESTA DE
PLANES DE INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN
Y DE TESIS DE POSTGRADO

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería- Universidad de la República(Uruguay)
eleonora@fing.edu.uy

25/Mayo/2011

Documento de trabajo publicado en
www.fing.edu.uy/~eleonora/PPI_2011.pdf

Resumen: Presento aquí una propuesta de plan de introducción a la investigación en Matemática pura y aplicada, a desarrollar dentro del período 2012- 2017. Incluyo la proposición de temas de tres tesis de maestría y dos de doctorado, a realizar por eventuales estudiantes de postgrado en ingeniería matemática y en matemática pura en la Universidad de la República. Incluyo eventualmente a Raúl Hermida, Martín Pijuán y Martín Patrone (en caso que alguno de ellos se presente y sea aceptado como estudiante de postgrado en el futuro). Actualmente Hermida es estudiante avanzado de la carrera de Ingeniería Eléctrica y docente grado 1 del IMERL (Inst. de Matemática de la Fac. de Ing.), y Patrone y Pijuán son estudiantes avanzados de Ingeniería Eléctrica. Los tres están realizando el proyecto de final de carrera "NARF" sobre el que trata esta propuesta de introducción a la investigación.

En la última sección expongo detalladamente las propuestas de preguntas matemáticas a investigar y responder.

INTRODUCCIÓN

La propuesta en este documento forma parte de las actividades de un equipo interdisciplinario de investigación (ver referencia bibliográfica [12]). El plan de trabajo e integración de este equipo está publicado en el sitio de la CSIC. En este equipo investigamos en Sistemas Dinámicos, buscando en general las demostraciones matemáticas rigurosas de resultados y comportamientos dinámicos provenientes en modelos de otras ciencias: Física, Biología e Ingeniería.

En el presente documento me enfoco en el estudio de la dinámica 11-dimensional definida por las ecuaciones diferenciales llamadas de Huber-Braun [1,13] y que modelan matemáticamente en forma determinista, el comportamiento fisiológico de un tipo de neurona biológica llamada "neurona receptora fría".

El presente plan es, por lo tanto, mayormente en el área de Matemática, esencialmente en Matemática pura, pero con aplicaciones a otras ciencias, y tiene gran interdisciplinariedad en el interés de los temas que se proponen.

Se plantea iniciar este plan en el 2012, después que esté construido el dispositivo electrónico NARF (Neurona Artificial Receptora Fría, ver [1], [13]) Este dispositivo es el motivo del proyecto de final de carrera en Ingeniería Eléctrica, de Hermida, Patrone y Pijuán.

El planteamiento del proyecto NARF consiste en la implementación electrónica de un dispositivo que responda a las ecuaciones diferenciales [1]de Huber-Braun, y

que modelan el comportamiento fisiológico de una neurona biológica en las terminales nerviosas sensibles al frío, en ciertos seres vivos.

El prototipo NARF se espera esté concluido a fines en este año 2011 o principios del 2012. Su diseño y construcción están siendo orientados por los Dres. Monzón y Oreggioni, del IIE en la Facultad de Ingeniería.

Muchos de los trabajos de investigación matemática que se proponen en este documento (ver sección siguiente), son derivados de las preguntas abiertas que motivaron al proyecto NARF de Ingeniería. La experimentación electrónica sobre el mismo prototipo que se está construyendo contribuirá a responder algunas de las preguntas abiertas mencionadas en la sección siguiente, o por lo menos a conjeturar matemáticamente los enunciados que habrá que demostrar rigurosamente.

Por otra parte, nuestras propuestas están estrechamente relacionadas con la investigación actual en Biofísica y Dinámica Fisiológica Neuronal (Neurodinámica) que lleva a cabo el equipo de Hans Braun en la Universidad de Marburg, Alemania [1,13]. Aún así, el plan de investigación que aquí planteo, es de matemática y no requieren conocimientos de biología ni de ingeniería.

PLANTEAMIENTO DE LAS PROPUESTAS

Este plan tiene dos partes, I) y II), y cinco propuestas de posibles tesis de maestría y doctorado, en los puntos 1) al 5), ordenados desde lo que estimo tiene menor dificultad hasta lo que estimo tendrá la mayor dificultad (excepto los puntos 2) y 3) que parecen ser de dificultad aproximadamente equivalente).

I) Propuestas para tesis de maestría.

Objetivo general: Investigar las tres primeras cuestiones 1) 2) y 3) detalladas más abajo.

Cada una de ellas podría ser una tesis de maestría, y lo ideal es que se hicieran simultáneamente, en equipo, para poder intercambiar los resultados parciales que se vayan obteniendo en cada una de ellas y retroalimentarlos mutuamente. Cada tesista tendrá sus propios objetivos de investigación y resultados esperados complementarios con los de las otras dos, pero diferentes.

II) Propuestas para tesis de doctorado.

Objetivo general: Investigar cuestiones 4) y 5), que detallo más abajo, y que planteo en el supuesto de ya haber obtenido los resultados de 1) 2) y 3). Si surgiera la posibilidad de comenzar estas investigaciones 4) y 5) antes de terminar 1), 2) y/o 3), son viables replanteamientos de este plan para adecuarlo al estado del conocimiento científico en los temas en el momento de iniciar cada trabajo.

Los procedimientos de investigación para 4) y 5) serían los de Sistemas Dinámicos abstractos, usando varios teoremas desarrollados en los últimos 30 años dentro de la teoría general de las bifurcaciones, y en particular de las bifurcaciones homoclínicas.

DETALLE DE LAS CINCO PROPUESTAS DE TESIS

1) Tesis de Maestría 1: Investigación experimental sobre el prototipo NARF electrónico

La propuesta 1) consiste en responder las siguientes preguntas abiertas:

1.1) ¿Cómo son las órbitas en el espacio 11 dimensional (o en sus proyecciones sobre algunos subespacios 3 dimensionales por ejemplo) para diferentes valores de los parámetros T e I_{ext} ? (en la implementación NARF del modelo de ecuaciones diferenciales de Huber-Braun)

1.2) ¿En la zona no crítica de valores de los parámetros, qué conclusiones se deducen de la comparación de los datos de medición electrónica de variables de estado, con los datos obtenidos por simulación numérica?

1.3) En la zona crítica, o caótica, idem

1.4) Como se puede modelar matemáticamente el tipo de ruido observado en la experimentación electrónica. Compararlo con los resultados con ruido obtenidos por Brown, después de la experimentación numérica. ¿Qué distribución de probabilidad del ruido es la más adecuada para describir lo que se observa experimentalmente en la NARF electrónica?

1.5) Investigar qué resultados experimentales existen, no ya sobre experimentos numéricos de las ecuaciones, sino con experimentos fisiológicos sobre neuronas vivas de este tipo, y comparar los resultados obtenidos con el dispositivo electrónico.

1.6) Reportar observaciones en la neurona electrónica sobre el diagrama de bifurcaciones y compararlos con los resultados experimentales numéricos y con los fisiológicos (si hubiese de estos publicados por algún lado, que no sé si hay). Consultar este punto con el biofísico Hans Braun de la Universidad de Marburg.

2) y 3) Dos otras tesis de Maestría: Estudio matemático teórico de las bifurcaciones en las ecuaciones diferenciales de Huber-Braun

Objetivos: responder las siguientes preguntas abiertas:

2.1) ¿Cómo se puede demostrar a partir de las ecuaciones diferenciales de Huber-Braun, la existencia de una cascada de duplicación de período? (Creo que ya tengo una idea de cómo se podría hacer esa demostración, pero me gustaría que la desarrollara un estudiante de maestría en su tesis.)

3.1) Idem una cascada de suma de ISI's. (También creo que tengo una idea de cómo se podría hacer esa demostración.) Previamente habrá que definir qué es esto. No está definido matemáticamente hasta ahora, en forma general, en cualquier sistema dinámico diferenciable, pero es un fenómeno cuya aparición es segura y evidente, después de experimentos numéricos ya reportados por Braun et. al, en la dinámica determinada por las ecuaciones diferenciales de Huber-Braun-

En general ISI no significaría "inter-spike interval", que es lo que significa en general, en la nomenclatura que usan los neurocientíficos, cuando estudian la dinámica de sistemas neuronales biológicos. Matemáticamente propongo definirlo como el "inter return-times interval" donde los tiempos de retorno (return-times) se definen como es usual en la teoría de los sistemas dinámicos a tiempo continuo, como los sucesivos instantes de intersección con un subconjunto preferencial del espacio de fases. En las ecuaciones diferenciales de Huber-Braun, este subconjunto se puede definir simplemente como una sección de Poincaré convenientemente elegida.

2.2) ¿La cascada de duplicación de período que se se presenta en la dinámica definida por las ecuaciones de Huber-Braun, satisface las hipótesis de los teoremas conocidos sobre rutas al caos? Estos teoremas van desde la prueba de Lanford en 1983 [2] a la conjetura de Feigenbaum de 1976, pasando por [3] de 1995, trabajos de Tresser y Gambaudo de finales de los 80 [4], de Gambaudo y col de mediados de los 90 [5], y tres papers más [6,7,8], de 1996, 1997 y 2010 respectivamente.

2.3) Si la respuesta a la pregunta anterior fuera Sí, entonces ya saldría como Corolario lo siguiente: en la llamada "zona crítica" de valores de los parámetros, en las ecuaciones diferenciales de Huber-Braun, hay una tangencia homoclínica cuadrática. Y entonces se pueden aplicar los teoremas de Newhouse [9,10], Palis y Takens [11], y varios otros autores. Estos teoremas tienen como hipótesis la existencia de una tangencia homoclínica cuadrática, para deducir y describir matemáticamente la necesaria aparición de distintos fenómenos muy relevantes en la teoría moderna de los Sistemas Dinámicos Diferenciables Caóticos. Son resultados relativos a la presencia de caos, cuya aparición en sistemas físicos es muy relevante.

2.4) Si la respuesta a la pregunta anterior fuera No, estaría muy bien también, porque entonces, quien demuestre que la cascada de duplicación exhibida por ese sistema no es del tipo de Feigenbaum, estaría descubriendo la aparición (en un sistema físico que por lo menos experimentalmente parecería ser estructuralmente estable) de cascadas de duplicación de período que no son del tipo que se conjeturan genéricos. Esto sería, hasta lo que sé, y después de los resultados que obtuvimos en [7,8], el primer ejemplo conocido de tal tipo de cascada, en espacios de dimension mayor que uno, que (por lo menos de las observaciones obtenidas de los resultados experimentales numéricos) muestra evidencias de ser persistente en familias a un parámetro.

3.2) En la tesis de maestría 3):

Objetivo general: En cuanto a la cascada de bifurcaciones de sumas de ISI's, crear la teoría. Hasta lo que yo sé, no está descripto ni estudiado todavía matemáticamente este tipo de bifurcación, apareciendo hasta ahora para los biofísicos experimentales, (hasta lo que conozco), en ejemplos concretos de sistemas ecuaciones diferenciales como la de Hubber Braun.

Pero, como se explicó en el item 3.1, habría que definirla en forma abstracta más general, no limitándose a ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales particulares.

3.3) Después, y según la definición adecuada que se haya dado a "una cascada de ISI's abstracta", el plan sería enunciar y demostrar un teorema cuyo enunciado, groseramente sería como sigue:

"Un sistema de ecuaciones diferenciales cualquiera que cumpla las hipótesis....., presenta necesariamente una cascada de bifurcaciones de sumas de ISI's"

Tengo una idea más concreta del enunciado y de una ruta para su eventual demostración, para plantear con detalle al estudiante que decida realizar su tesis de maestría en esta propuesta 3).

4) Tesis de Doctorado: "Sistemas dinámicos abstractos del tipo de Huber-Braun".

Objetivo general: Introducir una definición y realizar el estudio abstracto de una "cascada doble de bifurcaciones del tipo de Huber-Braun", para sistemas dinámicos generales diferenciables en variedades compactas de dimensión finita.

Objetivos específicos: Inspirándose en los resultados que se hayan obtenido de 1) 2) y 3), tratar de responder las siguientes preguntas:

4.1) ¿Qué hipótesis, lo más generales posibles, puede cumplir un sistema dinámico S de dimensión finita n mayor o igual que $?$, que sean suficientes para que S exhiba un valor crítico T_0 de uno de sus parámetros reales T , a la izquierda del cual hay una cascada de duplicación de período del tipo de Feigenbaum, en T_0 una bifurcación homoclínica del tipo cuadrático, y a la derecha (separada por una zona de caos con fenómenos del tipo de Newhouse, por ejemplo, y otros) hay una cascada e bifurcaciones de suma de ISI's?

Enunciar esas hipótesis y demostrar el teorema

Tentativamente, defino el fenómeno en la tesis del enunciado 4.1, con el nombre "cascadas dobles del tipo de Huber-Braun."

5) Otra tesis de Doctorado. Probablemente sea realizable como propongo más abajo, solo después que esté terminada la 4):

"Estabilidad estructural o abundancia de los sistemas dinámicos que exhiben cascadas dobles del tipo Huber-Braun"

Objetivo general: Responder la siguiente pregunta, y demostrar la respuesta:

Si un sistema dinámico abstracto presenta una doble cascada del tipo de Huber-Braun, como se habrá definido en 4), o si en vez de eso, satisface la condición (en principio más fuerte), de la hipótesis del teorema que se habrá obtenido en 4), entonces, al perturbar el sistema (no solo modificando un parámetro sino modificando el sistema mismo en un entorno suyo dentro del espacio funcional de las dinámicas diferenciables), ¿siguen apareciendo, y si aparecen con qué abundancia, doble cascadas del tipo de Huber Braun?

Objetivos particulares: Responder las siguientes preguntas, enunciar el o los teoremas que surjan de la respuesta a cada una, y demostrarlos.

5.1) ¿Siguen siempre apareciendo las doble cascadas del tipo de Huber Braun para un entorno suficientemente pequeño del sistema dinámico dado, o no siempre pero en forma densa?

Nota: Si no apareciera el fenómeno en ninguna de las perturbaciones, algo en la definición de doble cascada del tipo de Huber Braun es incompatible con las observaciones experimentales, y habría que intentar modificar esa definición.

5.2) Si no aparece el fenómeno en forma densa en un entorno, ¿cómo se puede medir la abundancia de ese fenómeno?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS (en construcción)

[1] Catsigeras, E. The Huber-Braun Equations for the Cold Receptor Model of a Physiological Neuron, taken from the talk with H. Braun. Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería. Univ.de la República Acceso público en www.fing.edu.uy/~eleonora/files/HuberBraunEquation.pdf

[2] Lanford 1983 Completar dato bibliográfico

[3] Catsigeras, E. Cascades of period doubling of codimension one. PhD Thesis IMPA, Río de Janeiro (1995) pp. 43 Re-edición ISBN 978-9974-98-255-0 (2011) Half of this thesis was published in [6]

[4] Gambaudo, Tresser Completar dato bibliográfico

- [5] CATSIGERAS, E; GAMBAUDO, J M; MOREIRA, F Infinitely renormalizable diffeomorphisms of the 2-disk at the boundary of Chaos. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 126, No. 1 , pp. 297-304, 1998
- [6] CATSIGERAS, E Cascades of period doubling bifurcations in n dimensions. Nonlinearity, vol. 9 , pp. 1061-1070, 1996
- [7] CATSIGERAS, E; ENRICH, H Homoclinic tangencies near cascades of period doubling bifurcations. Annales de L'Institut Henri Poincaré-Analyse Non Linéaire, Vol. 15 No. 3 , pp. 255-299, 1998
- [8] Catsigeras, E, Cerminara, M, Enrich, H: The real analytic Feigenbaum-Couillet-Tresser attractors in the disk. . Dynamical systems-an international journal, Vol. 25 No. 4 , pp. 519-529, 2010
- [9] Newhouse Completar dato bibliográfico
- [10] Newhouse Completar dato bibliográfico
- [11] Palis-Takens libro 1993 Completar dato bibliográfico
- [12] Equipo de investigación "Una rama del grupo de Sistemas Dinámicos de Jorge Lewowicz: Estabilidad, caos, bifurcaciones, osciladores y redes neuronales" N° 527 CSIC. (2010) Responsable: Eleonora Catsigeras. Planes, historia y objetivos del equipo publicado por CSIC en el enlace: <http://darwin.csic.edu.uy/grupos/grupos?tipo=unover&id=527>
- [13] Huber, Braun, Moss et al: Interactions between slow and fast conductances in the Huber/Braun model of cold receptor discharges. Neurocomputing 32-33 (2000) pp. 51-59
- [14] Catsigeras, E: Dinámica de Redes de Unidades Acopladas. (2011) Proyecto de introducción a la investigación de candidatos ayudantes del equipo de investigación. Enlace a los datos del proyecto: <http://www.fing.edu.uy/~eleonora/files/ProyectoDeIntroduccionALaInvestigacion.pdf>
- [15] Catsigeras, E: Synchronization of many dissipative oscillators. Draft of research work in advance. To be discussed in a joint research work in Seminario del Grupo de Investigación de Física No Lineal, Fac. Ciencias y Fac. Ingeniería, Universidad de la República (2011) Acceso público en <http://www.fing.edu.uy/~eleonora/files/Synchronization18Abril2011.pdf>
- [16] Catsigeras, E, Budelli, R: Genericity of Periodic Attractors in Inhibitory Neurons Networks. Trabajo para el Seminario OSCILADORES-REDES NEURONALES. Fac. Ingeniería- Fac. Ciencias UDELAR. (2009) Acceso público en <http://www.fing.edu.uy/~eleonora/files/AVANCECabezaCatsigerasMartiRubidomarzo2009.pdf>