

Modelo Matemático de una Red Bineuronal

Victoria García

August 11, 2015

Contenidos

Redes
Neuronales

Victoria
García

Introducción

Modelo de dos
Neuronas sin
Sinapsis

Modelo
Bineuronal
con Sinapsis

Sinapsis en un
Sistema
Combinado

Regularización
de un Sistema
No Inhibitorio

1 Introducción

2 Modelo de dos Neuronas sin Sinapsis

3 Modelo Bineuronal con Sinapsis

- Sinapsis en un Sistema Combinado
- Regularización de un Sistema No Inhibitorio

A continuación estudiaremos el comportamiento de una neurona i , que almacena un potencial el cual varía en un intervalo acotado. Inicialmente supondremos a la neurona aislada en sus ciclos de carga y descarga, para luego describir su comportamiento en interacción con otra neurona, en lo que llamaremos *sinapsis*. Nos concentraremos en el caso no inhibitorio y demostraremos, en esas condiciones, la existencia de órbitas periódicas para el flujo que representa la evolución del potencial del sistema a lo largo el tiempo.

Representaremos el potencial que posee la neurona i mediante la variable x , que toma valores en el intervalo $[-V, 1]$, respondiendo a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = u_i(x), \quad u_i : [-V, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \in C^2(\mathbb{R}) \quad (1)$$

donde u_i es positivo y su derivada es negativa. Esto significa que x es un función creciente, pero su crecimiento es cada vez más lento.

Definición

Llamaremos *potencial umbral* al mayor potencial que la neurona es capaz de almacenar

Cuando la neurona alcanza su potencial umbral, se produce una descarga y su potencial vuelve a cero. Nosotros estamos considerando este umbral normalizado.

También haremos la suposición de que la descarga se produce de manera instantánea. De este modo podemos suponer que la neurona, cuando está aislada, tiene un potencial que varía en el círculo S^1 , y podremos identificar el 0 con el 1.

También la dinámica de dos neuronas aisladas se puede estudiar de manera conjunta como una única dinámica en el toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

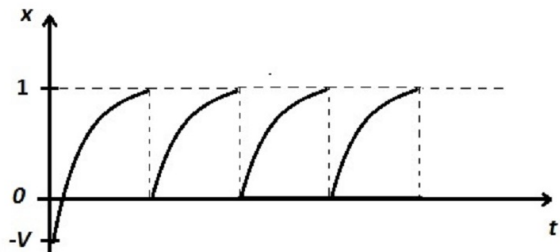


Figure: Evolución del potencial de una neurona a lo largo del tiempo

Modelo Bineuronal con Sinapsis

Redes
Neuronales

Victoria
García

Introducción

Modelo de dos
Neuronas sin
Sinapsis

Modelo
Bineuronal
con Sinapsis

Sinapsis en un
Sistema
Combinado

Regularización
de un Sistema
No Inhibitorio

Sinapsis

La interacción entre dos neuronas biológicas se llama sinapsis. Ocurre cuando una neurona, llamada *presináptica*, alcanza su umbral y descarga, produciendo con esta descarga un cambio (salto) en el potencial de la otra neurona, llamada *postsináptica*.

Sinapsis excitatoria

Es cuando la descarga de una neurona, produce un salto positivo en el potencial de la otra neurona.

Sinapsis inhibitoria

Es cuando la descarga de una neurona produce un salto negativo en el potencial de la otra neurona.

Cuando la sinapsis es de tipo inhibitorio, el potencial de la neurona que recibe la descarga puede descender hasta tomar valores negativos. Siendo $-V$ el mínimo valor que éste puede tomar.

Un sistema bineuronal puede ser de 3 tipos:

Excitatorio

Compuesto por dos neuronas excitatorias.

Inhibitorio

Compuesto por dos neuronas inhibitorias.

Combinado

Una neurona excitatoria y otra inhibitoria.

Diremos que un sistema es *no inhibitorio* cuando es o bien excitatorio, o bien combinado.

Sinapsis en un sistema combinado

Redes
Neuronales

Victoria
García

Introducción

Modelo de dos
Neuronas sin
Sinapsis

Modelo
Bineuronal
con Sinapsis

Sinapsis en un
Sistema
Combinado

Regularización
de un Sistema
No Inhibitorio

Supondremos ahora que la neurona A es excitatoria, y la neurona B es inhibitoria. Podría suceder que cuando la neurona A descarga, hace que el potencial de B llegue a su umbral. En esta situación ambas neuronas descargarán a la misma vez y sus potenciales volverán a 0 abruptamente. Por otro lado, el potencial de A puede tomar valores negativos debido a una descarga de a neurona B . Sin embargo quedará acotado inferiormente por el valor $-V_A$.

La sinapsis en este caso, se puede modelar mediante la siguiente función:

Función de sinapsis

$$f : \{(x, y) \in [-V_A, 1] \times [-V_B, 1] / x = 1 \text{ o } y = 1\} \longrightarrow \{(x, y) / x = 0 \text{ o } y = 0\}$$

Allí $[-V_A, 1]$ y $[-V_B, 1]$ representan los intervalos donde varían los potenciales de la neurona A (representada por la variable x) y B (representado por la variable y) respectivamente.

La función f quedará determinada mediante las condiciones:

- $f(x, 1) = (x + a(x); 0)$, $f(1, y) = (0, y + b(y))$ si $x + a(x) \leq 1$, $y + b(y) \leq 1$
- $f(x, 1) = (0, 0)$, $f(1, y) = (0, 0)$, si $x + a(x) > 1$ o $b + b(y) > 1$.

Las funciones a y b , definidas en los intervalos $[-V_A, 1]$ y $[-V_B, 1]$ respectivamente, representan los saltos experimentados en cada neurona debido a la descarga de la otra. Les pediremos a estas funciones que sean de clase $\mathbb{C}^2$ y de signo constante, y de módulo no decreciente. También pediremos que $x + a(x)$ e $y + b(y)$ sean estrictamente crecientes.

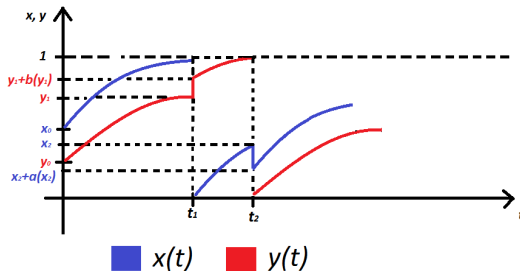


Figure: Evolución del potencial de dos neuronas en un sistema combinado

Se les pide a $|a|$ y a $|b|$ ser no decrecientes para ajustarnos a la propiedad de que en las neuronas biológicas los potenciales postsinápticos son menores después de una descarga que en fases posteriores.

La dinámica de la red bineuronal queda determinada por una función $\psi(\rho, t)$ que para cada condición inicial $\rho \in [-V_A, 1] \times [-V_B, 1]$ y para todo $t \geq 0$, nos indica el estado del sistema en el tiempo t , esto es, el potencial de cada neurona en dicho momento del tiempo.

Observación

La función ψ no será continua en el conjunto $\{x = 1 \text{ o } y = 1\}$, ya que allí es donde se producen los saltos.

Tenemos entonces que la red bineuronal queda perfectamente determinada por 4 funciones reales:

- $u_1(x) = \frac{dx}{dt}$
- $u_2(y) = \frac{dy}{dt}$
- $a(x)$
- $b(y)$

Definición

El espacio de sistema bineuronales será el espacio topológico formado por las cuádruplas (u_1, u_2, a, b) de funciones con las propiedades mencionadas anteriormene, con la topología producto derivada de la topología usual en $C^2(\mathbb{R})$.

Caso no inhibitorio

Redes
Neuronales

Victoria
García

Introducción

Modelo de dos
Neuronas sin
Sinapsis

Modelo
Bineuronal
con Sinapsis

Sinapsis en un
Sistema
Combinado

Regularización
de un Sistema
No Inhibitorio

Supondremos de ahora en más que al menos una de las dos neuronas es de tipo excitatorio. Por ejemplo, A lo es, de modo que $b > 0$.

Vamos a definir un mapa de Poincaré continuo para estos sistemas bineuronales. Para ello, modificaremos ligeramente el mapa ψ de modo de eliminar los saltos.

Dado $k > 1$ elegido de forma adecuada, podemos construir un campo χ en el plano, de clase C^2 sin singularidades en $[0, k] \times [0, k]$, y tal que coincide con $(u_1(x), u_2(y))$ en $[0, 1] \times [0, 1]$, y su flujo ϕ es continuo.

Redes Neuronales

Victoria
García

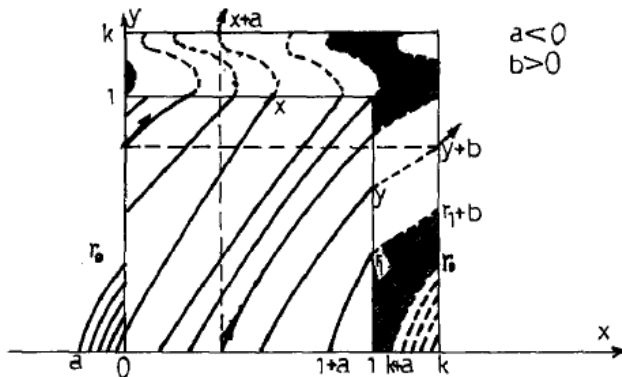
Introducción

Modelo de dos
Neuronas sin
Sinapsis

Modelo
Bineuronal
con Sinapsis

Sinapsis en un
Sistema
Combinado

Regularización
de un Sistema
No Inhibitorio



En el rectángulo $[0, k] \times [0, k]$, identificaremos el lado $x = 0$ con el lado $x = k$, y el lado $y = 0$ con el lado $y = k$. Luego el campo χ construido anteriormente, será un campo en el toro $\mathbb{T}^2$. Dado un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escribiremos $(x, y)_{mod k}$ para referirnos a su correspondiente en $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

Redes Neuronales

Victoria
García

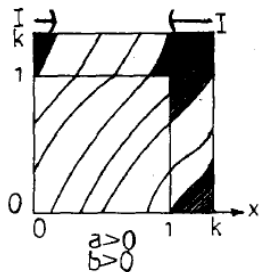
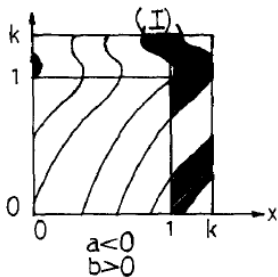
Introducción

Modelo de dos
Neuronas sin
Sinapsis

Modelo
Bineuronal
con Sinapsis

Sinapsis en un
Sistema
Combinado

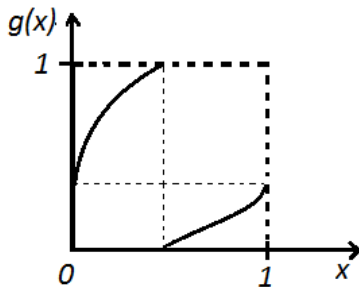
Regularización
de un Sistema
No Inhibitorio



Observar que la órbita $\psi(\rho)$ del sistema bineuronal, donde $\rho = (x, y)$, coincide con la órbita $\phi(\rho)$ del sistema dinámico en el toro que tiene órbitas continuas, cuando esta no alcanza el intervalo I . Cuando lo hace, ambas neuronas descargan simultáneamente, y entonces la órbita retorna a $(0, 0)$. Sea S^1 el círculo obtenido identificando los extremos del intervalo $\{(x, y) : 0 \leq x \leq k, y = 0\}$. Sea $g(x)$ el primer retorno a S^1 de la órbita $\phi(x, 0, t)$. La función g está bien definida y es un difeomorfismo de clase C^2 en S^1 . A g le llamaremos *mapa de Poincaré* del sistema bineuronal.

Definición

Dado un homeomorfismo $g : S^1 \rightarrow S^1$ que preserva la orientación, se dice que $\hat{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un *levantado* de g , si cumple que $\hat{g}(x + m) = \hat{g}(x) + m$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $m \in \mathbb{Z}$.



Redes Neuronales

Victoria
García

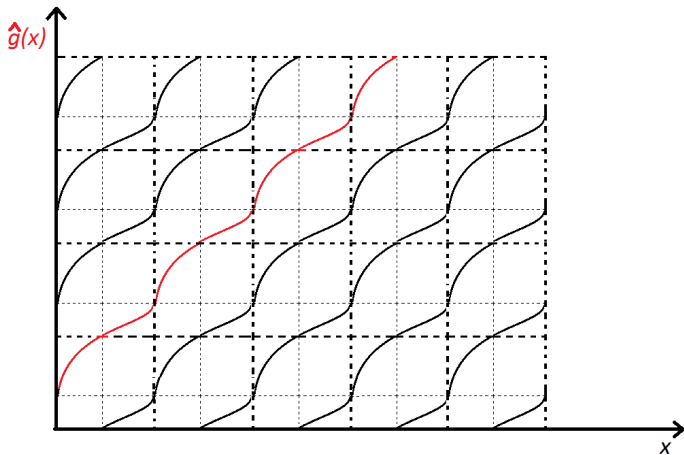
Introducción

Modelo de dos
Neuronas sin
Sinapsis

Modelo
Bineuronal
con Sinapsis

Sinapsis en un
Sistema
Combinado

Regularización
de un Sistema
No Inhibitorio



Se puede demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{g}^n(x) - x}{n} = \rho(g)$$

y es independiente de x . A $\rho(g)$ le llamaremos *número de rotación de g* .

Propiedades

Redes
Neuronales

Victoria
García

Introducción

Modelo de dos
Neuronas sin
Sinapsis

Modelo
Bineuronal
con Sinapsis

Sinapsis en un
Sistema
Combinado

Regularización
de un Sistema
No Inhibitorio

Veamos algunas propiedades:

- Existen órbitas periódicas en el círculo si y solo si el número de rotación es racional.
- El número de rotación $\rho(g)$ es racional, si y solo si todos los ω -límites son órbitas periódicas.
- Si g es un difeomorfismo de clase C^2 , y $\rho(g)$ es irracional, entonces todas las órbitas son densas.

En vista de las propiedades anteriores, demostraremos finalmente el siguiente resultado:

Teorema

En un sistema no inhibitorio siempre existen órbitas periódicas, y el ω -límite de todas las órbitas es una órbita periódica.

Demostración

Considero el mapa de Poincaré para ψ , al que llamamos g . Considero alguna órbita de condición inicial p tal que en algún momento del tiempo pasa por $q = (x, 0)$. Veremos que pasa con la g -órbita de $(x, 0)_{mod k}$. Si $\rho(g)$ es irracional, entonces todas las órbitas son densas, de modo que en algún momento alcanzan el intervalo I , y la órbita "salta" entonces al $(0, 0)$. En particular, la órbita del $(0, 0)$ retornará eventualmente al $(0, 0)$, y será periódica. (...)

...

Si $\rho(g)$ es racional todas las g -órbitas tienen por ω -límite una órbita periódica. Veamos que pasa lo mismo con las ψ -órbitas. Tenemos 2 casos:

- Si los g -iterados de $(x, 0)_{mod k}$ no pasan por el intervalo I , entonces la ψ -órbita coincide con la ϕ -órbita. Su ω -límite es entonces una órbita periódica que no pasará por I .
- Si algún iterado pasa por I , entonces la ψ -órbita pasa por $(0, 0)$. Miraremos ahora la órbita de $(0, 0)$. Si algún iterado de $(0, 0)$ pasa por I , luego la órbita de $(0, 0)$ retorna a $(0, 0)$ y es periódica. Si ningún iterado pasa por I , volvemos al primer caso, y tenemos que todas las órbitas tienen ω -límite periódico.