Funciones de variable compleja.

Eleonora Catsigeras *

15 de mayo de 2006

Notas para el curso de Funciones de Variable Compleja

de la Facultad de Ingeniería

*Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingenieria. Universidad de la República. Uruguay. Address: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

.

PRÓLOGO:

Este curso está dirigido a estudiantes universitarios de grado de las carreras de Ingeniería. Se supone conocido el cuerpo de los complejos, la interpretación geométrica en el plano complejo de las operaciones de cuerpo, los conceptos básicos de topología del plano complejo o de $\mathbb{R}^2$, el cálculo diferencial e integral en una y dos variables reales, la geometría de curvas paramétricas planas diferenciables, y el cálculo vectorial, diferencial e integral de campos reales en $\mathbb{R}^2$.

El texto está dividido en tres partes. Cada parte está separada en secciones temáticas.

En las secciones 4, 11 y 17, se hace la síntesis de los resultados más importantes de las secciones anteriores.

El curso se completa con el tema de Transformada de Laplace que se encuentra en las notas de J. Vieitez y N. Möller, y con las listas 1 a 7 de ejercicios publicadas en el año 2006.

BIBLIOGRAFÍA:

Ahlfors, L. : *Análisis de Variable Compleja.* Editorial Aguilar, España, 1966.

Rudin, W. : *Análisis Real y Complejo.* Editorial Alhambra, España, 1979.

Universidad de Zaragoza : *Notas de Funciones de Variable Compleja.*

Guelfond, A. : *Los residuos y sus aplicaciones.* Editorial MIR, Moscú, 1968.

Vieitez, J. - Möller, N. : *Apuntes para el curso de funciones de variable compleja. Transformada de Laplace.*
IMERL, Facultad de Ingeniería, UdelaR. Montevideo, 2005.
(http://imerl.fing.edu.uy/varcompleja/materiales.htm)

IMERL: *Listas de ejercicios para el curso de funciones de variable compleja.*
Repartidos 1 a 7. IMERL, Facultad de Ingeniería, UdelaR. Montevideo, 2006.
(http://imerl.fing.edu.uy/varcompleja/)

Índice

PRIMERA PARTE.
FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN.

Resumen

Se estudian algunas funciones complejas de variable compleja. Se define función holomorfa y se prueban las condiciones de Cauchy-Riemann. Se estudian las funciones reales armónicas en relación con las funciones complejas holomorfas. Se define integración de funciones complejas continuas y se prueban los resultados introductorios referentes al cálculo de las integrales complejas a lo largo de curvas. Se estudian las series de funciones complejas, su convergencia uniforme, y se prueba el teorema de convergencia uniforme e integración de series.

1. Funciones complejas de variable compleja.

1.1. *Notaciones y conceptos previos.*

En lo que sigue: $z = x + iy$ es un número complejo con parte real x y parte imaginaria y.

$\mathbb{C}$ denota el conjunto de los complejos, con su estructura de cuerpo conmutativo con las operaciones de suma y producto entre complejos. También denota al plano complejo $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, identificando cada complejo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

El módulo de un complejo z es $|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Se cumple: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (llamada propiedad triangular) y además $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

El conjugado $\overline{z}$ de un complejo $z = x + iy$ es $\overline{z} = x - iy$.

$D_r(z_0)$ denota al disco abierto de centro z_0 y radio $r > 0$, es decir:

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

$\overline{D_r(z_0)}$ denota al disco cerrado de centro z_0 y radio $r > 0$, es decir:

$$\overline{D_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

Ω denota un conjunto abierto no vacío del plano complejo $\mathbb{C}$. Se recuerda que Ω es abierto si para todo z_0 existe un disco $D_r(z_0)$ con $r > 0$, contenido en Ω.

Un conjunto se dice cerrado si su complemento es abierto.

Un conjunto A se dice acotado si está contenido en algún disco $D_k(0)$, es decir $|z| < k, \ \ \forall z \in A$, donde k es alguna constante real positiva.

Un conjunto se dice compacto si es cerrado y acotado.

1.1.1. Curvas o caminos.

$\gamma : z = z(t), \ a \leq t \leq b \subset \mathbb{R}$ denota una curva paramétrica con parametrización $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ de variable real t, orientada para t creciente.

Siempre supondremos que γ es C^1 a trozos, es decir $z(t)$ es continua y excepto en una cantidad finita de puntos, existe la derivada $\dot{z}(t)$, que es continua y que tiene límites laterales finitos en los puntos donde no existe. (Nota: $\dot{z}(t)$ se define como $\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$.)

Se dice que la curva $\gamma : z = z(t), a \leq t \leq b$ va del punto z_1 al punto z_2 (o que tiene extremo inicial z_1 y extremo final z_2) si $z(a) = z_1, \ z(b) = z_2$.

Una curva γ parametrizada con $z = z(t), t \in [a,b]$ es cerrada si $z(a) = z(b)$, es decir su extremo inicial es el mismo que su extremo final.

Se denota con γ^* al conjunto de puntos del plano complejo recorridos por la curva γ, es decir γ^* es el recorrido de la parametrización $z = z(t), \ \ t \in [a,b]$ de la curva paramétrica γ. El conjunto γ^* es compacto. Por abuso de lenguaje, se denota $\gamma \subset \Omega$ cuando $\gamma^* \subset \Omega$ y $z \in \gamma$ cuando $z \in \gamma^*$, es decir, cuando la curva γ pasa por el punto z.

Dada una curva γ se define $-\gamma$ como la curva γ orientada en sentido opuesto. Es decir, si $\gamma : z = z(t), \ t \in [a,b]$ está orientada para t creciente, entonces $-\gamma : z = z(-\tau), \ \tau \in [-b,-a]$ está orientada para $t = -\tau$ decreciente.

Dadas dos curvas γ_1 y γ_2 tales que el extremo final de γ_1 es el extremo inicial de γ_2, se define $\gamma_1 + \gamma_2$ como la curva que se obtiene recorriendo γ_1 primero y luego γ_2, en el mismo sentido en que están orientadas ambas.

Dadas dos curvas γ_1 y γ_2 tales que tienen el mismo extremo final se define $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$. Es la curva que se obtiene recorriendo γ_1 en el mismo sentido en que está orientada y luego γ_2 en sentido opuesto al que está orientada.

1.1.2. Conexión.

Ω es conexo por definición si no existe una partición de Ω en dos abiertos no vacíos. Es decir $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, A, B abiertos, implica que o bien A o bien B es vacío.

Ω es conexo por caminos si para toda pareja de puntos z_1, z_2 en Ω existe una curva $\gamma \subset \Omega$ que va del punto z_1 a z_2.

Ω abierto es conexo si y solo si es conexo por caminos.

Una región es un abierto conexo y no vacío.

Si Ω es un abierto no vacío, se llama componente conexa de Ω a una región contenida en Ω maximal. Si Ω es conexo él es su única componente conexa. Si Ω es no conexo entonces es unión de una cantidad (que puede ser infinita) de componentes conexas.

1.1.3. Curvas homotópicas y conjuntos simplemente conexos.

Una curva cerrada γ contenida en Ω es homotópica a un punto en Ω si existe una deformación continua de γ que, sin salir de Ω, la transforma en un punto. Es decir existe $z = z_s(t) \in \Omega$ definida para todo $t \in [a,b]$ y para todo $s \in [0,1]$, que es continua respecto a (s,t), que para cada s fijo es una curva cerrada en Ω, y que para $s = 0$ es la curva γ y para $s = 1$ es una curva constante (igual a un punto). Esa función $z = z_s(t)$ se llama homotopía.

Un abierto Ω es simplemente conexo si es conexo y toda curva cerrada contenida en Ω es homotópica a un punto.

Dos curvas γ_1 y γ_2 contenidas en Ω, ambas con el mismo extremo inicial y ambas con el mismo extremo final, se dicen homotópicas en Ω, si la curva $\gamma_1 - \gamma_2$ es homotópica a un punto en Ω.

1.1.4. Funciones complejas.

$f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ es una función compleja $f = f(z)$ de variable compleja $z \in \mathbb{C}$.

$u(x,y)$ y $v(x,y)$ denotan $Ref(x+iy) = u(x,y)$ y $Imf(x+iy) = v(x,y)$. Entonces $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

u_x, u_y, v_x, v_y denotan, cuando existen, las derivadas parciales de u y v respecto de x e y respectivamente.

1.1.5. Límite de funciones.

$\lim_{z\to z_0} f(z) = a + bi$ si
$\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: $0 < |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow |f(z) - (a + bi)| < \epsilon$.
Equivalentemente, $\lim u(x, y)_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = a$ y $\lim v(x, y)_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = b$.

$\lim_{z\to\infty} f(z) = a + bi$ si
$\forall \epsilon > 0$ existe $H > 0$ tal que: $|z| > H \;\Rightarrow |f(z) - (a + bi)| < \epsilon$.
Equivalentemente, $\lim u(x, y) = a$ y $\lim v(x, y) = b$ cuando la variable real $\sqrt{x^2 + y^2} \to +\infty$.

$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ si
$\forall K > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: $0 < |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow |f(z)| > K$.
Equivalentemente, la función real $|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} \to +\infty$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ si
$\forall K > 0$ existe $H > 0$ tal que: $|z| > H \;\Rightarrow |f(z)| > K$.
Equivalentemente, la función real $|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} \to +\infty$ cuando la variable real $\sqrt{x^2 + y^2} \to +\infty$.

1.1.6. Funciones continuas, C^r y C^∞.

$f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ si y solo si u y v son continuas en (x_0, y_0).

$f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in \Omega$ si y solo si $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Esto se cumple, por definición si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

$f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice continua si lo es en z_0 para todo $z_0 \in \Omega$.

La imagen $f(K)$ por una función continua $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ de un conjunto compacto $K \subset \Omega$, es compacto.

Por definición se dice que f es C^1 si u y v lo son, es decir si existen y son continuas las derivadas parciales de u y v respecto de x e y. En 2.1.7 se muestra que aunque f sea C^1, f no tiene por qué ser derivable (holomorfa). Esto es porque la definición de derivabilidad de $f(z)$ respecto a la variable compleja z exige no solo la existencia de las derivadas parciales respecto de x e y, sino además que estas cumplan ciertas condiciones llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Por definición se dice que f es C^r si u y v lo son, es decir si existen y son continuas las derivadas parciales de u y v hasta orden r inclusive.

Por definición se dice que f es C^∞ si u y v lo son, es decir si existen y son continuas las derivadas parciales de u y v de orden r, para todo r.

En el apéndice 2.1.7 se muestra que aunque f sea C^∞, f no tiene por qué ser derivable (holomorfa).

1.1.7. Función Exponencial compleja y Argumento.

$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),\;\; \forall\, z \in \mathbb{C}$. Es continua, C^∞ y nunca se anula.

Si $z \neq 0$, entonces $arg(z)$ es el conjunto de todos los números reales ϕ tales que $\cos\phi = x/|z|$, $\operatorname{sen}\phi = y/|z|$. Se observa que $arg(z)$ no es una función, ya que para cada $z \neq 0$ le hace corresponder no un valor real, sino un conjunto de infinitos valores reales. Si $\phi_0 \in arg(z)$, entonces

$$arg(z) = \{\phi = \phi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Se cumple:

$$z = |z|e^{i\phi} \quad \forall\, z \neq 0,\; \forall\, \phi \in arg(z)$$

y recíprocamente si $z = re^{i\phi}$, con r y ϕ reales tales que $r > 0$, entonces $r = |z|$ y $\phi \in arg(z)$.

En particular, considerando la definición de $e^z = e^x e^{iy}$, se obtiene para todo complejo z lo siguiente

$$|e^z| = e^x = e^{Re\ z}$$

$$arg\ (e^z) = \{y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

o sea

$$Im\ z \in arg(e^z)$$

Otro resultado conocido es

$$\arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

entendiéndose que la suma de los conjuntos $arg(z_1)$ y $argz_2$ es el conjunto que se obtiene sumando cada número real en el primer conjunto con cada número real de segundo conjunto.

1.1.8. Campos en $\mathbb{R}^2$, teorema de Green y sus corolarios.

Se resume algunos resultados de los cursos de Cálculo Vectorial, que podrán ser útiles para relacionarlos con la Teoría de Cauchy de funciones analíticas:

Un campo en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una pareja ordenada de funciones $(P(x, y), Q(x, y))$ continuas para todo $(x, y) \in \Omega$. Se define la integral a lo largo de una curva C^1 a trozos $\gamma \subset \Omega : z = z(t), t \in [a, b]$ del campo (P, Q) como

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))\,\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\,\dot{y}(t)]\,dt$$

El valor de esa integral es independiente de la parametrización de la curva que preserve la orientación; la integral a lo largo de la curva opuesta $-\gamma$ es el opuesto de la integral a lo largo de γ; y la integral a lo largo de $\gamma_1 + \gamma_2$ es la suma de las integrales a lo largo de γ_1 y de γ_2.

El campo se dice que es C^1 si las funciones P y Q tienen derivadas parciales continuas respecto de x y de y.

Sea el campo (P, Q) de clase C^1 en Ω. Sea $R \subset \Omega$ un abierto acotado tal que ∂R, el borde de R, es por hipótesis una curva o unión finita de curvas de clase C^1 a trozos. Por convención se orienta ∂R de forma que deja a R hacia la izquierda (en sentido antihorario). El teorema de Green afirma que

$$\int_{\partial R} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dxdy$$

Si γ es una curva homotópica a un punto en Ω se obtiene en particular el siguiente resultado:

Corolario 1 del Teorema de Green: *Si γ es una curva cerrada homotópica a un punto en Ω y (P, Q) es un campo de clase C^1 en Ω tal que $Q_x - P_y = 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$* (estos campos se llaman irrotacionales en Ω), *entonces*

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$$

Se llama potencial escalar F de un campo P, Q continuo en Ω, cuando existe, a una función real $F = F(x, y)$ de clase C^1 en Ω y tal que $F_x = P$ y $F_y = Q$ para todo $(x, y) \in \Omega$. Se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 2 del Teorema de Green: *Si Ω es simplemente conexo y (P,Q) es un campo de clase C^1 en Ω tal que $Q_x - P_y = 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$* (estos campos se llaman irrotacionales) *entonces existe potencial escalar F del campo en Ω.*

Además para cualquier curva γ contenida en Ω que une el punto (x_0, y_0) con el punto (x,y) se cumple:

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Advertencia: Para aplicar estos corolarios del Teorema de Green no es suficiente verificar que $Q_x - P_y = 0$ en Ω. Se necesita además que existan P_x y Q_y y que todas las derivadas parciales sean continuas en Ω.

1.2. *Argumento, Logaritmo y Raíz n-ésima.*

1.2.1. Argumento.

Si $z \neq 0$, entonces $arg(z)$ es el conjunto de todos los números reales ϕ tales que $\cos\phi = x/|z|$, $\operatorname{sen}\phi = y/|z|$. Se observa que $arg(z)$ no es una función, ya que para cada $z \neq 0$ le hace corresponder no un valor real, sino un conjunto de infinitos valores reales. Si $\phi_0 \in arg(z)$, entonces

$$arg(z) = \{\phi = \phi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \qquad (1)$$

Se cumple:

$Arg_{[0,2\pi)}(z)$ es el único $\phi_0 \in arg(z)$ tal que $0 \leq \phi_0 < 2\pi$. Es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real positivo, y discontinua en este semieje con salto finito igual a 2π.

$Arg_{(-\pi,\pi]}(z)$ es el único $\phi_0 \in arg(z)$ tal que $\pi < \phi_0 \leq \pi$. Es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real negativo, y discontinua en este semieje con salto finito igual a 2π.

Sea dado fijo un real θ_0.

$Arg_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z)$ es el único $\phi_0 \in arg(z)$ tal que $\theta_0 \leq \phi_0 < \theta_0 + 2\pi$. Es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca a la semirrecta con extremo en el origen y que forma ángulo θ_0 con el semieje real positivo; y discontinua en esta semirrecta con salto finito igual a 2π.

Denotamos con $Arg(z) = Arg_{(-\pi,\pi]}(z)$, función definida para todo $z \neq 0$, discontinua en el semieje real negativo.

Denotamos con $arg(z)$ no a una función, sino al conjunto de valores reales definido en (1), formado por infinitos reales separados uno del siguiente en 2π.

1.2.2. Logaritmo complejo.

Si $z \neq 0$, entonces $log(z)$ es el conjunto de todos los números complejos w tales que $e^w = z$. Se observa que $log(z)$ no es una función, ya que para cada $z \neq 0$ le hace corresponder no un valor complejo w, sino infinitos valores complejos. En efecto para todo $z \neq 0$:

$$w \in log(z) \;\Leftrightarrow\; e^w = z \;\Rightarrow\; e^{Re(w)} = |e^w| = |z|,\; Im(w) \in arg(e^w) = arg(z) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; Re(w) = L|z|,\; Im(w) \in arg(z)$$

donde $L|z|$ denota el logaritmo neperiano real del número real positivo $|z|$ (esta sí es una función, real de variable real). Pero la condición $Im\ (w) \in arg(z)$ se cumple para infinitos valores de $Im(w)$, por lo tanto hay infinitos complejos $w \in log(z)$ todos con la misma parte real, y con partes imaginarias separadas en múltiplos enteros de 2π. Por lo tanto $log(z)$ no es una función.

Si $\phi_0 \in arg(z)$, entonces

$$log(z) = \{w = L|z| + i(\phi_0 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \qquad (2)$$

$Log_{[0,2\pi)}(z)$ es el único complejo $w_0 \in log(z)$ tal que $\pi < Im(w_0) \leq \pi$. Es decir:

$$Log_{[0,2\pi)}(z) = L|z| + i(Arg_{(-\pi,\pi]}(z))$$

$Log_{[0,2\pi)}(z)$ es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real negativo, y discontinua en este semieje con salto finito igual a $i2\pi$.

$Log_{(-\pi,\pi]}(z)$ es el único complejo $w_0 \in log(z)$ tal que $\pi < Im(w_0) \leq \pi$. Es decir:

$$Log_{(-\pi,\pi]}(z) = L|z| + i(Arg_{(-\pi,\pi]}(z))$$

$Log_{(-\pi,\pi]}(z)$ es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real negativo, y discontinua en este semieje con salto finito igual a $2\pi i$.

Sea dado fijo un real θ_0.

$Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z)$ es el único complejo $w_0 \in log(z)$ tal que $\theta_0 \leq Im(w_0) < \theta_0 + 2\pi$. Es decir:

$$Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z) = L|z| + i(Arg_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z))$$

$Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z)$ es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca a la semirrecta con extremo en el origen y que forma ángulo θ_0 con el semieje real; y discontinua en esa semirrecta con salto finito igual a $2\pi i$.

Denotamos con $Log(z) = Log_{(-\pi,\pi]}(z)$, función definida para todo $z \neq 0$, discontinua en el semieje real negativo.

Denotamos con $log(z)$ no a una función, sino al conjunto de valores complejos definido en (2), formado por infinitos números complejos, todos en una misma recta vertical, separado uno del siguiente en $i2\pi$.

1.2.3. Raíz n-ésima compleja.

Dado n natural fijo, $n \geq 2$, se define $\sqrt[n]{z}$ como el conjunto de todos los números complejos w tales que $w^n = z$. Se observa que $\sqrt[n]{z}$ no es una función, ya que para cada $z \neq 0$ le hace corresponder no un valor complejo w, sino n valores complejos diferentes. Si $\phi_0 = Arg_{(-\pi,\pi]}(z)$, entonces

$$\sqrt[n]{z} = \{w = |z|^{1/n} e^{i(\phi_0 + 2k\pi/n)} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Cuando $z \neq 0$, los n valores complejos de $\sqrt[n]{z}$, obtenidos dando a k los valores $0, 1, \ldots, n-1$ forman los vértices de un polígono regular de n vértices y centro en el origen.

El valor principal de la raíz $n-$ésima de z, denotado como $v.p. \sqrt[n]{z}$, se define como 0 si $z = 0$ y si $z \neq 0$, $v.p. \sqrt[n]{z}$ se define como el único complejo $w_0 \in \sqrt[n]{z}$ tal que $Arg_{(-\pi,\pi]} w_0 = (1/n) Arg_{(-\pi,\pi]} z$. Es decir:

$$v.p. \sqrt[n]{z} = w = |z|^{1/n} e^{i(1/n)(Arg_{(-\pi,\pi]}(z)} \ \ \forall z \neq 0$$

$v.p. \sqrt[n]{z}$ es una función real de $z \neq 0$, continua para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real negativo, y discontinua en este semieje con salto finito igual a $|z|^{1/n} e^{i(2\pi)/n)}$.

1.3. *Compactificación del plano complejo.*

Definición 1.3.1. Se llama *plano complejo compactificado,* denotado como $\overline{\mathbb{C}}$, al conjunto

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

donde ∞ debe interpretarse como un objeto cualquiera que no pertenezca al conjunto de los números complejos.

Se llama *entorno de* ∞ *en* $\overline{\mathbb{C}}$*, o disco abierto de centro* ∞ *y radio* $1/R > 0$ al conjunto:

$$D_{1/R}(\infty) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R\}$$

Con esa definición, una función $f : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$ es continua en ∞ si

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z)$$

y si $f(a) = \infty$, entonces f es continua en a si

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty = f(a)$$

Por ejemplo la función:

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i} \ \ \forall z \neq i, \quad f(i) = \infty = \lim_{z \to i} \frac{z+i}{z-i}, \quad f(\infty) = 1 = \lim_{z \to \infty} \frac{z+i}{z-i}$$

es una función continua de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

1.3.2. Esfera de Riemann y proyección estereográfica.

Construyamos una representación gráfica de $\overline{\mathbb{C}}$. En lo que sigue hágase un dibujo.

Sea en el espacio $\mathbb{R}^3$ de las ternas ordenadas de reales (x, y, z), el plano $x0y$ identificado con el plano complejo $\mathbb{C}$. Es decir a cada punto $(x, y, 0)$ lo identificamos con el complejo $z = x + iy$.

Consideremos el elemento extraño al plano complejo ∞ que forma $\overline{\mathbb{C}}$, y representémoslo en $\mathbb{R}^3$ como el punto $N = (0, 0, a)$, donde $a \neq 0$ es real. N no está en el plano complejo $x0y = \mathbb{C}$. Para fijar ideas tomemos por ejemplo $a = 2$.

Dibujemos una esfera $\mathbb{E}$ que pase por el punto N y tenga centro en el eje de las z (el centro no puede coincidir con N). Para fijar ideas dibujemos por ejemplo $\mathbb{E}$ centrada en $(0, 0, 1)$. En ese caso la esfera $\mathbb{E}$ pasa por el origen, pero esto no es necesario, es solo un ejemplo.

Esta esfera $\mathbb{E}$ que pasa por el punto $N = (0, 0, a)$, $a \neq 0$, con centro en $(0, 0, b)$, $b \neq a$, se llama *esfera de Riemann* y al punto N se le llama *polo norte.*

Definamos *la proyección estereográfica* $\Pi : \mathbb{E} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$. A cada punto $P \in \mathbb{E}$ que no sea el polo norte, le hacemos corresponder un número complejo de la siguiente forma:

$$\Pi(P) = z = (\text{ semirrecta } NP) \cap (\text{ plano } x0y) \ \in \ \mathbb{C} \quad \forall P \neq N, \ \ P \in \mathbb{E}$$

Y al polo norte N le hacemos corresponder el elemento ∞, es decir:

$$\Pi(N) = \infty \ \in \ \overline{\mathbb{C}}, \quad \text{para } N \in \mathbb{E}$$

La proyección estereográfica es invertible, pues está definida su inversa $\Pi^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \mathbb{E}$:

$$\Pi^{-1}(\infty) = N, \;\; \Pi^{-1}(z) = (\text{ semirrecta } Nz) \cap (\text{ esfera } \mathbb{E}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Además la proyección Π y su inversa Π^{-1} son continuas. A cualquier disco abierto $D_R(z_0)$ cuando $z_0 \in \mathbb{C}$ la transformación Π^{-1} le hace corresponder biunívocamente un casquete abierto en el esfera $\mathbb{E}$; y al entorno $D_{1/R}(\infty)$ de ∞ en $\overline{\mathbb{C}}$, la transformación Π^{-1} también le hace corresponder biunívocamente un casquete abierto en el esfera $\mathbb{E}$, centrado en su polo norte N.

1.4. *Transformaciones de Moebius o bilineales.*

Definición 1.4.1. Transformación de Moebius o bilineal.
Se llama *transformación de Moebius o bilineal* a una función de $\overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$ definida como

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{con } ad - bc \neq 0$$

donde a, b, c y d son números complejos fijos.

Se sobrentiende en la definición anterior que $w(\infty) = \lim_{z\to\infty}(az+b)/(cz+d)$ y que si $c \neq 0$ entonces $w(c) = \lim_{z\to -d/c}(az+b)/(cz+d) = \infty$.

La condición $ad - bc \neq 0$ se pide para que $w = w(z)$ sea invertible. En efecto, despejando z en función de w, se obtiene la inversa de la transformación de Moebius de la definición 1.4.1:

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}, \quad \text{con } (-d)(-a) - bc \neq 0$$

Hemos probado así la primera de las propiedades de una transformación de Moebius:

Proposición 1.4.2. Inversa de una transformación de Moebius.
Toda transformación de Moebius (del plano compactificado en sí mismo) es invertible y su inversa es otra transformación de Moebius.

Consideremos la composición de dos transformaciones de Moebius:

$$z \mapsto w_1 = \frac{az+b}{cz+d}, \;\; ad-bc \neq 0, \;\; w_1 \mapsto w = \frac{a'w_1+b'}{c'w_1+d'}, \;\; a'd'-b'c' \neq 0$$

La transformación compuesta es:

$$z \mapsto w = \frac{a'((az+b)/(cz+d))+b'}{c'((az+b)/(cz+d))+d'} = \frac{a'(az+b)+b'(cz+d)}{c'(az+b)+d'(cz+d)} = \frac{a''z+b''}{c''z+d''} \qquad (1)$$

donde

$$\begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Como el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes, y por hipótesis $ad - bc \neq 0$, $a'd' - b'c' \neq 0$ se deduce $a''d'' - b''c'' \neq 0$ y la transformación compuesta (1) es una transformación de Moebius. Hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 1.4.3. Composición de transformaciones de Moebius.
La composición de transformaciones de Moebius es una transformación de Moebius.

Ahora analicemos geométricamente cómo actúa una transformación de Moebius:
1er. caso: $c = 0$. Entonces como $ad - bc \neq 0$ se tiene $a \neq 0,\ d \neq 0$. La transformación $w = (a/d)z + (b/d)$ es la composición de:

- Una rotohomotecia dada por $z \mapsto (a/d)z = w_1$.

  En efecto, multiplicar un complejo z variable por un complejo constante $\alpha = (a/d) \neq 0$ es girar el complejo z alrededor del origen un ángulo igual al argumento de α (rotación), y después multiplicar $|z|$ por una constante real positiva igual $|\alpha|$ (homotecia).

- Una traslación dada por $w_1 \mapsto w_1 + (b/d) = w$.

  En efecto, sumar un complejo variable w_1 más un complejo fijo $\beta = (b/d)$ es trasladar el punto w_1 del plano complejo según el vector β.

2do. caso: $c \neq 0$. La transformación $w = (az + b)/(cz + d)$ se puede escribir como

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 z + cd}$$

Es la composición de:

- Una rotohomotecia dada por $z \mapsto (c^2)z = w_1$.
- Una traslación dada por $w_1 \mapsto w_1 + (cd) = w_2$.
- Una transformación llamada *inversión* dada por $w_2 \mapsto 1/w_2 \;=\; w_3$.
- Una rotohomotecia dada por $w_3 \mapsto (bc - ad)w_3 = w_4$.
- Una traslación dada por $w_4 \mapsto (a/c) + w_4 = w$.

Hemos probado lo siguiente:

Proposición 1.4.4. Interpretación geométrica de la transformación de Moebius.
Toda transformación de Moebius es la composición en algún orden, de una cantidad finita de traslaciones, rotohomotecias y quizás una inversión.

Veamos algunas consecuencias de esa interpretación geométrica:

Proposición 1.4.5. Imágenes de rectas y circunferencias.
Toda transformación de Moebius transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

Eso quiere decir que a cada recta le hace corresponder o bien una recta o bien una circunferencia; y a cada circunferencia le hace corresponder o bien una recta o bien una circunferencia.
Demostración:
Las rotaciones, las homotecias y las traslaciones llevan rectas en rectas y circunferencias en circunferencias. Solo resta ver entonces que la inversión $z \mapsto (1/z)$ lleva rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

Sea la ecuación de una recta $mx + my + p = 0$. Podemos escribirla equivalentemente como

$$\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$$

donde $z = x + iy$, $\beta = (m - in)$, y $\gamma = p$ es real.

Sea la ecuación de una circunferencia (aún siendo el conjunto vacío si el radio es negativo): $qx^2 + qy^2 + mx + ny + p = 0$. Podemos escribirla equivalentemente como

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$$

donde $z = x + iy$, $\alpha = q$ es real, $\beta = (m - in)$, y $\gamma = p$ es real.

Luego:

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0 \quad (1)$$

con α y γ constantes reales, y β constante compleja, es la ecuación o bien de una recta o bien de una circunferencia (una recta si $\alpha = 0$, y una circunferencia si $\alpha \neq 0$).

Apliquemos la inversión $z \mapsto (1/z) = w$, $z = 1/w$ a la ecuación (1). Resulta:

$$\alpha\frac{1}{|w|^2} + \beta\frac{1}{w} + \overline{\beta}\frac{1}{\overline{w}} + \gamma = 0$$

que es la ecuación de la imagen de la recta o circunferencia que tenía ecuación (1). Multiplicando por $|w|^2 = w\,\overline{w}$ se obtiene:

$$\alpha + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + \gamma|w|^2 = 0$$

Llamando $\alpha_1 = \gamma$, $\beta_1 = \overline{\beta}$, $\gamma_1 = \alpha$ resulta:

$$\alpha_1|w|^2 + \beta_1 w + \overline{\beta_1}\overline{w} + \gamma_1 = 0$$

con α_1 y γ_1 constantes reales, y β_1 constante compleja. Como vimos antes, esta es la ecuación o bien de una recta o bien de una circunferencia. $\square$

Definición 1.4.6. Transformaciones conformes.

Sea Ω un abierto no vacío del plano complejo $\mathbb{C}$. Una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se llama *conforme* si preserva la medida de los ángulos y su orientación.

Más precisamente si $\gamma_1 : z = z_1(t)$ y $\gamma_2 : z = z_2(t)$ son dos curvas de clase C^1 contenidas en Ω y que se intersecan en el punto $z_0 = z_1(t_1) = z_2(t_2)$ y tienen vectores tangentes no nulos en ese punto, respectivamente $v_1 = \dot{z}_1(t_1) \neq 0$ y $v_2 = \dot{z}_2(t_2) \neq 0$, entonces:

El ángulo que forman (en el punto $z_0 \in \gamma_1 \cap \gamma_2$) *los vectores tangentes v_1 y v_2 a las curvas γ_1 y γ_2 respectivamente, con signo, es igual al ángulo que forman los vectores tangentes a las curvas imágenes de γ_1 y γ_2 por f* (en el punto $f(z_0) \in f(\gamma_1) \cap f(\gamma_2)$.)

Las curvas imágenes de γ_1 y γ_2 por f son respectivamente $f(\gamma_1) : w = f(z_1(t))$ y $f(\gamma_2) : w = f(z_2(t))$ que se intersecan en el punto $f(z_0) = f(z_1(t_1)) = f(z_2(t_2))$. Se sobrentiende que si f es conforme entonces estas curvas imágenes son también de clase C^1 y sus vectores tangentes en el punto de intersección son no nulos.

1.4.7. Orientación del plano. Una consecuencia de la conformalidad de una transformación f biyectiva y continua, es que preserva la orientación del plano. Esto quiere decir lo siguiente:

Si $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$ es una curva orientada para t creciente que deja una región R del plano hacia su izquierda, entonces la curva imagen $f(\gamma) : w = f(z(t))$, $t \in [a, b]$ orientada para t creciente, deja la región imagen $f(R)$ también hacia su izquierda.

Véase un ejemplo en 1.4.9

Proposición 1.4.8. Conformalidad de las transformaciones de Moebius.
Toda transformación de Moebius es conforme y por lo tanto preserva la orientación del plano.

Veremos una demostración general, no solo aplicable a las transformaciones de Moebius, en 2.2.1.

Ejemplo 1.4.9. Sea la transformación de Moebius:

$$w = \frac{-iz+1}{z-i}$$

Cumple:

$$w(-1) = -1, \;\; w(-i) = 0, \;\; w(i) = \infty$$

Luego lleva la circunferencia que pasa por -1, por $-i$ y por i, a la recta (porque pasa por ∞ en el plano compactificado) que pasa por -1 y por 0.

Transforma entonces la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en la recta $y = 0$. A la región R encerrada por la circunferencia, $R: \; x^2 + y^2 < 1$ la transforma en alguno de los dos semiplanos, o bien $y > 0$ o bien $y < 0$, limitados por la recta $y = 0$.

Para determinar cuál de los dos semiplanos es el correspondiente de R, orientamos la circunferencia borde de R de algún modo, por ejemplo recorriendo en este orden los tres puntos dados: $-1, \; -i, \; i$ (quedó orientada en sentido antihorario). La circunferencia así orientada deja a la región R a la izquierda. Entonces, recorriendo los puntos imágenes en ese mismo orden $-1, \; 0, \; \infty$, se deja a la región imagen $w(R)$ también a la izquierda. Luego $w(R) = \{y > 0\}$.

Proposición 1.4.10. Determinación de una transformación de Moebius dados tres puntos y sus imágenes.
Dados tres puntos z_1, z_2 y z_3 diferentes entre sí en $\overline{\mathbb{C}}$ (alguno de ellos puede ser ∞) *y dados tres puntos w_1, w_2 y w_3 diferentes entre sí en $\overline{\mathbb{C}}$* (alguno de ellos puede ser ∞), *existe y es única una transformación de Moebius $w = w(z)$ tal que*

$$w_1 = w(z_1), \;\; w_2 = w(z_2), \;\; w_3 = w(z_3)$$

Demostración:

Primera parte. Primero supongamos que $z_1 = \infty, \quad z_2 = 0 \quad z_3 = 1$. Busquemos una transformación de Moebius

$$w = w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ac - bd \neq 0$$

que cumpla las condiciones del enunciado.

Se debe cumplir:

$$w(\infty) = w_1 = \frac{a}{c}, \qquad w(0) = w_2 = \frac{b}{d}, \qquad w(1) = w_3 = \frac{a+b}{c+d}, \qquad (1)$$

entendiéndose que algún $w_i = \infty$ si y solo sí se anula el denominador correspondiente.

Primer caso: $w_1 = \infty, \; w_2 \neq \infty, w_3 \neq \infty$. Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$c = 0, \;\; d \neq 0, \;\; b = dw_2, \;\; a = d(w_3 - w_2)$$

Esto determina una y solo una transformación de Moebius, cualquiera sea el valor complejo de $d \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = (w_3 - w_2)z + w_2$$

Segundo caso: $w_1 \neq \infty,\ w_2 = \infty, w_3 \neq \infty$. Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$d = 0, \ \ c \neq 0, \ \ a = cw_1, \ \ b = c(w_3 - w_1)$$

Esto determina una y solo una transformación de Moebius, cualquiera sea el valor complejo de $c \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{(a/c)z + (b/c)}{z} = \frac{w_1 z + (w_3 - w_1)}{z}$$

Tercer caso: $w_1 \neq \infty,\ w_2 \neq \infty, w_3 = \infty$. Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$c \neq 0, \ \ a = cw_1, \ \ \ d = -c, \ \ b = dw_2 = -cw_2$$

Esto determina una y solo una transformación de Moebius, cualquiera sea el valor complejo de $c \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{(a/c)z + (b/c)}{z + (d/c)} = \frac{w_1 z - w_2}{z - 1}$$

Cuarto caso: $w_1 \neq \infty,\ w_2 \neq \infty, w_3 \neq \infty$. Entonces las igualdades (1) son equivalentes a:

$$c \neq 0, \ \ a = cw_1, \ \ \ d = c\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_3}, \ \ b = c\frac{(w_3 - w_1)w_2}{w_2 - w_3}$$

Esto determina una y solo una transformación de Moebius, cualquiera sea el valor complejo de $c \neq 0$ que se elija, pues

$$w = \frac{(a/c)z + (b/c)}{z + (d/c)} = \frac{w_1(w_2 - w_3)z + w_2(w_3 - w_1)}{(w_2 - w_3)z + (w_3 - w_1)}$$

Hemos probado que cualesquiera sean $w_1,\ w_2,\ w_3$ dados en $\overline{\mathbb{C}}$ y distintos entre sí, existe una única transformación de Moebius tal que

$$w(\infty) = w_1, \ \ w(0) = w_2, \ \ \ w(1) = w_3$$

Segunda parte: Ahora probemos el caso general enunciado en la proposición.

Dados z_1, z_2, z_3 distintos entre sí en $\overline{\mathbb{C}}$, por lo demostrado antes, existe única transformación de Moebius f tal que

$$f(\infty) = z_1, \ \ f(0) = z_2, \ \ \ f(1) = z_3$$

Consideremos la inversa de f. Es la única transformación de Moebius que lleva z_1, z_2 y z_3 respectivamente a $\infty, 0$ y 1.

Por otro lado, dados w_1, w_2, w_3 distintos entre sí en $\overline{\mathbb{C}}$, según lo demostrado antes, existe única transformación de Moebius g tal que

$$g(\infty) = w_1, \ \ g(0) = w_2, \ \ \ g(1) = w_3 \quad (2)$$

Luego la transformación compuesta

$$h = g \circ f^{-1}$$

(que es una transformación de Moebius por ser composición de dos transformaciones de Moebius), lleva z_1, z_2, z_3 a w_1, w_2, w_3 respectivamente. Hemos demostrado la existencia.

Ahora probemos la unicidad de h. Si h_1 es una transformación de Moebius que lleva z_1, z_2, z_3 a w_1, w_2, w_3 respectivamente, entonces consideramos la transformación compuesta $g_1 = h_1 \circ f$, donde f es la transformación de Moebius que lleva $\infty, 0, 1$ a z_1, z_2, z_3. La transformación g_1 es una transformación de Moebius que lleva $\infty, 0, 1$ a w_1, w_2, w_3 respectivamente. Pero por lo visto en la primera parte, esta transformación en única. Luego $g_1 = g$, donde g es la construida en (2). Entonces $g = h_1 \circ f$ de donde se deduce que $h_1 = g \circ f^{-1}$. Por lo tanto h_1 coincide con la transformación $h = g \circ f^{-1}$ construida antes, probando la unicidad. $\square$

2. Derivación y funciones holomorfas.

2.1. *Derivación de funciones complejas y funciones holomorfas.*

Sea Ω abierto contenido en $\mathbb{C}$, $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.

Definición 2.1.1. Función derivable en un punto y función holomorfa.
$f(z)$ es *derivable en* z_0 si existe el límite siguiente, llamado *derivada de* f *en* z_0*:*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

f es *holomorfa en* Ω si es derivable en z_0 para todo $z_0 \in \Omega$.

Notación: Se denota $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω.

Proposición 2.1.2. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones.
Si f *y* g *son holomorfas en* Ω *entonces* $f + g$ *y* fg *también lo son y*

$$(f + g)' = f' + g', \;\; (fg)' = f'g + fg'$$

Además f/g *es holomorfa en los puntos de* Ω *donde no se anula* g *y en ellos vale:*

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

Demostración: Se demuestra análogamente que para las funciones reales de variable real, usando la definición de derivada, y las propiedades de límite, que son las mismas para funciones de variable compleja que para funciones de variable real.

2.1.3. Ejemplos:
Si $f(z) = k$ constante en Ω, entonces $f'(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$, lo cual se verifica directamente aplicando la definición de derivada.

Si $f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$ (función identidad), entonces $f'(z) = 1$ constante, lo cual se verifica directamente aplicando la definición de derivada.

Para todo n natural $n \geq 1$, vale $(z^n)' = nz^{n-1}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Esto se verifica por inducción completa en n aplicando la regla de derivada de un producto.

Para todo n natural $n \geq 1$, vale $(z^{-n})' = -nz^{-n-1}$, $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Se verifica aplicando la regla de derivada de un cociente a $z^{-n} = 1/z^n$.

Los polinomios $P(z)$ son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$, pues son suma de una cantidad finita de monomios en z del tipo $a_n z^n$ con a_n constante.

Las funciones racionales $P(z)/Q(z)$ (cociente de polinomios) son funciones holomorfas en el abierto Ω que se obtiene de $\mathbb{C}$ quitando los puntos donde se anula el polinomio $Q(z)$. Se prueba usando la regla de derivación del cociente de funciones.

Teorema 2.1.4. *Toda función holomorfa es continua.*

Demostración: Se demuestra análogamente al teorema de funciones reales de una variable real, visto en los cursos previos de Cálculo, que dice que toda función derivable es continua. Solo hay que sustituir en la demostración el valor absoluto de las variables reales por el módulo de las variables complejas.

Ejemplo 2.1.5. $Log_{[0,2\pi)}(z)$ está definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no es holomorfa en Ω ya que es discontinua en el semieje real positivo.

Sin embargo veremos en 2.1.13 que $Log_{[0,2\pi)}$ es holomorfa en $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ y para todo $z \in \Omega_1$ vale $(Log_{[0,2\pi)})'(z) = (1/z)$.

Análogamente $Log_{(-\pi,\pi]}(z)$ está definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no es holomorfa en Ω ya que es discontinua en el semieje real negativo.

Sin embargo veremos en 2.1.13 que $Log_{(-\pi,\pi]}$ es holomorfa en $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ y para todo $z \in \Omega_2$ vale $(Log_{(-\pi,\pi]})'(z) = (1/z)$.

Más en general, fijando $\theta_0 \in \mathbb{R}$, se define para todo $z \in \Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ la función $Arg[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)(z)$ como el único $\phi \in arg(z)$ tal que $\theta_0 \leq \phi < \theta_0 + 2\pi$.

Se define la función $Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z) = L|z| + iArg_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z)$ para todo $z \in \Omega$. Esta función es discontinua en la semirrecta $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : \theta_0 \in arg(z)\}$. Por lo tanto no es holomorfa en Ω.

Sin embargo veremos en 2.1.13 que $Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}$ es holomorfa en $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus S_3$ y para todo $z \in \Omega_3$ vale $(Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)})'(z) = (1/z)$.

En general, aunque no lo demostraremos, si Ω_4 es un conjunto abierto simplemente conexo que no contiene al origen, puede definirse una función $Log \in H(\Omega_4)$ tal que $Log(z) \in log(z)$ para todo $z \in \Omega_4$, y que cumple $Log'(z) = 1/z$ para todo $z \in \Omega_4$.

Teorema 2.1.6. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

f es holomorfa en Ω si y solo si u y v son diferenciables en todo punto de Ω y cumplen las ecuaciones de Cauchy- Riemann siguientes:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad \forall\, z \in \Omega$$

Demostración: Se probará este teorema más abajo, junto a la prueba del teorema 2.1.8.

Nota 2.1.7. Se recuerda que una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice, por definición, que es de clase C^∞ si sus partes real e imaginaria u y v lo son; es decir existen y son continuas las derivadas parciales de u y v de todos los órdenes.

La condición de existencia de las derivadas parciales de u y v, aún en el caso en que estas funciones sean C^∞, no es suficiente para que f sea holomorfa. Se requiere además que u y v verifiquen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, y que no todas las funciones reales u y v verifican.

Por ejemplo la función $f(z) = (z + \overline{z})^2 - i(z - \overline{z})^2 = f(x + iy) = 4x^2 + 4iy^2$ no es holomorfa en ningún abierto de $\mathbb{C}$ porque $u = 4x^2$, $v = 4y^2$ no verifican las ecuaciones de Cauchy- Riemann. Sin embargo u y v son de clase C^∞, y por lo tanto por definición también lo es f.

Por otra parte la existencia de derivadas parciales u_x y u_y, aún en el caso en que ellas verifiquen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, no es suficiente para que f sea holomorfa. Se requiere además que u y v sean diferenciables.

Teorema 2.1.8. Expresión de la derivada.

Si f es holomorfa en Ω entonces

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

y también

$$f' = f_x = -if_y$$

donde $f_x = u_x + iv_x$ y $f_y = u_y + iv_y$.

Demostración de los teoremas 2.1.6 y 2.1.8: Las siguientes 5 afirmaciones pueden ser verdaderas o falsas, pero probaremos más abajo que son todas equivalentes entre sí. Observemos que las afirmaciones a) y e), si son equivalentes, demuestran los dos teoremas 2.1.6 y 2.1.8.

Afirmación a)

$$f(z) \text{ es derivable en } z_0 \text{ y } f'(z_0) = a + bi$$

Afirmación b)

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (a + bi) = 0$$

Afirmación c)

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - (a + bi)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$$

Afirmación d)

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{\epsilon_1(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{\epsilon_2(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

donde

$$\begin{aligned} \epsilon_1(x, y) &= u(x, y) - u(x_0, y_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0) \\ \epsilon_2(x, y) &= v(x, y) - v(x_0, y_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0) \end{aligned}$$

Afirmación e) $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son diferenciables en (x_0, y_0) y sus derivadas parciales cumplen

$$u_x(x_0, y_0) = a, \quad u_y(x_0, y_0) = -b, \quad v_x(x_0, y_0) = b, \quad v_y(x_0, y_0) = a$$

Prueba de a) $\Leftrightarrow$ b): Es la definición de derivabilidad y derivada de $f(z)$ en el punto $z = z_0$.

Prueba de b) $\Leftrightarrow$ c): Para $z \neq z_0$, denotamos $z - z_0 = |z - z_0| e^{i\theta}$ para algún ángulo $\theta = \theta(z, z_0)$. Entonces:

$$\frac{f(z) - f(z_0) - (a + bi)(z - z_0)}{(z - z_0)} = e^{-i\theta} \left(\frac{f(z) - f(z_0) - (a + bi)(z - z_0)}{|z - z_0|} \right) \qquad (1)$$

Considerando que $|e^{-i\theta}| = 1$, está acotada y su inverso también, el miembro de la izquierda de (1) tiende a cero si y solamente si el factor de la derecha de (1) tiende a cero.

Prueba de c) $\Leftrightarrow$ d): Separando en partes real e imaginaria se obtiene:

$$\text{Afirmación c)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{z \to z_0} Re \left(\frac{f(z) - f(z_0) - (a+bi)(z - z_0)}{|z - z_0|} \right) = 0 \\ \lim_{z \to z_0} Im \left(\frac{f(z) - f(z_0) - (a+bi)(z - z_0)}{|z - z_0|} \right) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Siendo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y siendo $z = x + iy$, calculamos las partes real e imaginaria de (2) y obtenemos:

$$\text{Afirmación c)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{lím}_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-a(x-x_0)+b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \right) = 0 \\ \text{lím}_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)-b(x-x_0)-a(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Llamando $\epsilon_1(x,y)$ y $\epsilon_2(x,y)$ a las funciones de los numeradores en (3) se obtiene d) como queríamos.

Prueba de d) $\Leftrightarrow$ e): Basta recordar la definición y propiedades de diferenciabilidad de una función real $F(x,y)$ de dos variables reales, que se enuncian a continuación:

$F(x,y)$ es diferenciable en el punto (x_0,y_0), por definición, si existen dos números reales A y B y una función $\epsilon(x,y)$ tales que

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0) + \epsilon(x,y) \qquad (4)$$

$$\text{lím}_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\epsilon(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0 \qquad (5)$$

Además si $F(x,y)$ es diferenciable en el punto (x_0,y_0), los números A y B de (4) cumplen $A = F_x(x_0,y_0)$, $B = F_y(x_0,y_0)$.

Aplicando (4) y (5) primero con $F = u$, $\epsilon = \epsilon_1$, $A = a, B = -b$ y después con $F = v$, $\epsilon = \epsilon_2$, $A = b, B = a$ se obtiene d) $\Leftrightarrow$ e) como queríamos. $\square$

Ejemplo 2.1.9. La función exponencial compleja pertenece a $H(\mathbb{C})$ y $(e^z)' = e^z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$. En efecto $u = e^x(cosy)$ y $v = e^x(\operatorname{sen} y)$ son diferenciables y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Además $u_x = e^x(\cos y) = u$ y $u_y = -e^x(\operatorname{sen} y) = -v$. Luego $(e^z)' = u_x - iu_y = u + iv = e^z$.

Corolario 2.1.10. *Si $f \in H(\Omega)$ tiene módulo constante en el abierto conexo Ω entonces es constante en Ω.*

Demostración: Sea $f = u + iv$. Hay que probar que u y v son constantes en Ω.

Se tiene $|f|^2 = |u+iv|^2 = u^2 + v^2 = k$ constante en Ω, por hipótesis. Si la constante k es nula, entonces $|f(z)| = 0 \quad \forall z \in \Omega$, lo que implica que $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$ y f es constante como queríamos probar.

Si la constante k no es nula, derivando parcialmente la igualdad $u^2 + v^2 = k$ respecto de x y respecto de y se obtiene:

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \qquad (1)$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Sustituyendo en (1) resulta:

$$2uu_x - 2vu_y = 0, \quad 2uu_y + 2vu_x = 0 \qquad (2)$$

Multiplicando la primera igualdad de (2) por u, la segunda igualdad de (2) por v y sumando, se obtiene:

$$2k(u^2 + v^2)u_x = 0 \ \Rightarrow \ u_x = 0$$

Análogamente, multiplicando la primera igualdad de (2) por $-v$, la segunda por u y sumando, se obtiene:

$$2k(u^2 + v^2)u_y = 0 \ \Rightarrow \ u_y = 0$$

Luego u_x y u_y son idénticamente nulas en Ω. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, v_x y v_y también son idénticamente nulas. Luego, como son u y v diferenciables en todo punto de Ω, y sus derivadas parciales son idénticamente nulas en Ω, u y v son de clase C^1.

Para toda función escalar (potencial) u de clase C^1 en Ω, la integral curvilínea del campo (u_x, u_y) a lo largo de una curva $\gamma \subset \Omega$ es la diferencia del potencial en los extremos inicial (x_0, y_0) y final (x_1, y_1) de la curva γ, es decir:

$$u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) \int_\gamma u_x \, dx + u_y \, dy \qquad (3)$$

Luego, siendo $u_x = 0, \quad u_y = 0$ para todo punto de Ω, por (3) se cumple $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1)$ para toda pareja de puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) que puedan ser unidos por una curva contenida en Ω. Como Ω es conexo, esa pareja de puntos pueden ser cualesquiera en Ω. Luego u es constante en Ω.

Análogamente, siendo $v_x = 0, \quad v_y = 0$ para todo punto de Ω, y siendo Ω conexo, v es constante en Ω.

Luego $f = u + iv$ es constante en Ω. $\square$

Nota: El teorema anterior es falso si Ω no es conexo. En ese caso también se puede demostrar que u_x, u_y, v_x, v_y son idénticamente nulas en Ω, pero si Ω no es conexo, entonces las funciones u y v no tienen por qué ser constantes. Toman valores constantes en cada componente conexa de Ω, pero pueden tomar valores constantes diferentes en una componente que en otra.

Teorema 2.1.11. Derivada de función compuesta, regla de la cadena. *Si $f \in H(\Omega)$ y $g \in H(\Omega_2)$ con $f(\Omega) \subset \Omega_2$, entonces la función compuesta $g \circ f$, definida como $g \circ f(z) = g(f(z)) \ \forall \, z \in \Omega$, es holomorfa en Ω y su derivada es*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

Demostración: Es análoga a la prueba para funciones reales de una variable real.

Teorema 2.1.12. Derivada de función inversa. *Sea $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ es invertible con inversa continua $f^{-1} : \Omega_2 \mapsto \Omega_1$. Si $f \in H(\Omega_1)$ y $f'(z) \neq 0 \quad \forall \, z \in \Omega_1$, entonces $f^{-1} \in H(\Omega_2)$ y su derivada es:*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad \textit{donde } w = f(z), \ \ z = f^{-1}(w) \quad \forall w \in \Omega_2, \ z \in \Omega_1$$

Nota: En este teorema, las hipótesis de continuidad de f^{-1} y de $f\,' \neq 0$ son redundantes.

Demostración: A pesar de que la prueba es similar que para funciones reales de variable real, vamos a reproducirla:

Sean $z, z_0 \in \Omega_1$, $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0) \in \Omega_2$, por lo tanto $z = f^{-1}(w)$, $z_0 = f^{-1}(w_0)$. Como f es invertible y su inversa es f^{-1} se cumple $z \neq z_0 \Leftrightarrow w \neq w_0$. Calculemos el cociente incremental de f^{-1} para $w \neq w_0$:

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{(w - w_0)/(z - z_0)} = \frac{1}{(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)}$$

Tomando límite cuando $w \to w_0$, como f^{-1} es continua $z = f^{-1}(w) \to f^{-1}(w_0) = z_0$, y resulta:

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Se deduce que f^{-1} es derivable en w_0 y que $(f^{-1})'(w_0) = 1/f'(z_0)$, donde $z_0 = f^{-1}(w_0)$. Como lo anterior vale para cualquier w_0 en Ω_2, la función inversa es holomorfa en Ω_2 y su derivada cumple $(f^{-1})'(w) = 1/f'(z)$, , donde $z = f^{-1}(w)$. $\square$

Proposición 2.1.13. Derivada del logaritmo principal en conjuntos simplemente conexos.

1) $Log_{[0,2\pi)}$ es holomorfa en $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, y para todo $z \in \Omega_1$ se cumple

$$(Log_{[0,2\pi)})'(z) = (1/z)$$

2) $Log_{(-\pi,\pi]}$ es holomorfa en $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, y para todo $z \in \Omega_2$ se cumple

$$(Log_{(-\pi,\pi]})'(z) = (1/z)$$

3) Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fijo. La función $Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}$ es holomorfa en $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \theta_0 \in arg(z)\}$, y para todo $z \in \Omega_3$ se cumple

$$(Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)})'(z) = (1/z)$$

Nota: Una demostración de la parte 2) de esta proposición, sin usar el teorema de derivada de función inversa, pero usando el teorema de existencia de armónica conjugada de la próxima sección, se da en 2.3.6.

Demostración: Basta demostrar la parte 3) del teorema, pues la parte 1) es un caso particular tomando $\theta_0 = 0$, y la parte 2) tomando $\theta_0 = -\pi$.

La función $z = f(w) = e^w$ restringida a la banda horizontal $\Omega_0 = \{w \in \mathbb{C} : \theta_0 < Im(w) < \theta_0 + 2\pi$, tiene como imagen el abierto Ω_3. Además $f : \Omega_0 \mapsto \Omega_3$ es invertible, y por construcción de la rama del logaritmo que estamos estudiando, se cumple $w = f^{-1}(z) = Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z) \quad \forall z \in \Omega_3$.

Por otro lado $f'(w) = (e^w)' = e^w \neq 0 \quad \forall w \in \Omega_0$.

Aplicando el teorema 2.1.12 (en esta demostración hemos cambiado los roles de z y w con respecto a los del enunciado del teorema 2.1.12), resulta $w = Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z)$ holomorfa en Ω_3 y $\forall z \in \Omega_3$ su derivada es:

$$\left(Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}\right)'(z) = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \quad \square$$

2.2. *Transformaciones conformes.*

Se recuerda la definición de transformación conforme en 1.4.6 como las transformaciones que preservan la medida de los ángulos, con signo. Ahora vinculemos la existencia de derivada no nula respecto a la variable compleja z, con la conformalidad de la transformación:

Teorema 2.2.1. Derivada no nula y conformalidad.
a) Sea f una transformación holomorfa en Ω y tal que $f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$. Entonces f es conforme. (Ver definición de transformación conforme en 1.4.6.)
b) Las transformaciones de Möebius son conformes.
c) La exponencial es conforme.

Demostración: Parte a) Sea $\gamma : z = z(t)$ una curva que pasa por el punto $z_0 = z(t_0)$ y que tiene en z_0 vector tangente u:

$$v = \dot{z}(t_0) \neq 0$$

Consideremos la curva imagen por f de γ, es decir $f(\gamma) : w = f(z(t))$ que pasa por el punto $w_0 = f(z_0)$ y que tiene en w_0 vector tangente

$$u = \left(\frac{d}{dt} f(z(t)) \right) \Big|_{t=t_0} = f'(z(t_0))\, \dot{z}(t_0) = f'(z_0)v \;\Rightarrow$$

$$u = r_0 e^{i\theta_0} v \quad (1)$$

donde $r_0 = |f'(z_0)| > 0$, y θ_0 es un argumento de $f'(z_0)$.

La igualdad (1) puede interpretarse del siguiente modo: para obtener el vector tangente u de la curva imagen $f(\gamma)$ en el punto $f(z_0)$, hay que aplicar al vector tangente v de la curva γ en el punto z_0 una rotación de ángulo constante θ_0 y luego una homotecia de razón $r_0 > 0$. Eso implica que si dos curvas γ_1 y γ_2 pasan por z_0 con vectores tangentes $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$ respectivamente, que forman entre sí un ángulo φ, entonces sus curvas imágenes por f pasan por $f(z_0)$ con vectores tangentes $u_1 = r_0 e^{i\theta_0} v_1$ y $u_2 = r_0 e^{i\theta_0} v_2$ que forman entre sí el mismo ángulo φ, con el mismo signo. Esto es por definición que la transformación f preserva lo ángulos, o que es conforme.

Parte b) La derivada de la transformación de Möebius $f(z) = (az+b)/(cz+d)$, $ad - bc \neq 0$ es

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

Luego, por la parte a), es una transformación conforme.

Parte c) La derivada de la exponencial $f(z) = e^z$ es $f'(z) = e^z \neq 0$. Luego, por la parte a), es una transformación conforme. $\square$

2.3. *Funciones armónicas.*

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$ y sea $F = F(x,y)$ una función real de dos variables reales definida para todo $(x,y) \in \Omega$.

Definición 2.3.1. La función $F = F(x,y)$ se llama *armónica en* Ω si es de clase C^2 y verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales, llamada *Ecuación de Laplace:*

$$F_{xx} + F_{yy} = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

Teorema 2.3.2. *Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ con parte real u y parte imaginaria v. Si f es holomorfa y de clase C^2 en Ω entonces u y v son armónicas.*

Nota: La hipótesis que f es de clase C^2 es redundante. La teoría de Cauchy demuestra, entre otros resultados, que toda función holomorfa es de clase C^∞.

Demostración: Si $f \in H(\Omega)$ entonces $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann). Como por hipótesis u y v son de clase C^2 podemos derivar respecto de x y respecto de y las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Se obtiene:

$$u_{xx} = v_{yx} \quad u_{yy} = -v_{xy} \quad (1)$$

$$u_{xy} = v_{yy} \quad u_{yx} = -v_{xx} \quad (2)$$

Además como u y v son de clase C^2 las derivadas iteradas segundas son iguales, es decir $u_{xy} = u_{yx}, \ \ v_{xy} = v_{yx}$. Sumando las dos ecuaciones de (1) entre sí, y restando las dos ecuaciones de (2) entre sí, se deduce

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \square$$

Definición 2.3.3. La pareja (ordenada) de funciones (u,v) se llama de *armónicas conjugadas en* Ω si son ambas armónicas en Ω y además cumplen, para todo punto de Ω, las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.

Si (u,v) es una pareja de armónicas conjugadas, a la función v se la llama *armónica conjugada* de u.

Teorema 2.3.4. *Dada una función armónica u en un abierto Ω no vacío cualquiera:*
Existe $f \in H(\Omega)$ tal que $Re(f) = u$ si y solo si existe armónica conjugada v de u en Ω.

Nota: Podría suceder que no existiera ninguna de las dos, ni función holomorfa con parte real igual a u, ni armónica conjugada de u. Pero si existe alguna de las dos, entonces existe la otra.

Demostración: Si existe $f \in H(\Omega)$ con $Re(f) = u$ entonces llamando v a la parte imaginaria de f, por el teorema 2.1.6 u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y, \ \ u_y = -v_x$. La función u por hipótesis es armónica, y por la definición 2.3.1 es de clase C^2. Entonces las derivadas parciales de u son de clase C^1 y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, también las derivadas parciales de v son de clase C^1. Luego v es C^2 y por el teorema 2.3.2 son u y v armónicas. Concluimos que existe v armónica conjugada de u, como queríamos demostrar.

Recíprocamente, si existe v armónica conjugada de u, entonces construimos la función compleja $f = u + iv$. Las funciones u y v son de clase C^2 (por ser armónicas, cf. Definición 2.3.1). Entonces sus derivadas primeras son C^1, en particular son continuas. Toda función real de dos variables con derivadas parciales continuas, es diferenciable. Así que u y v son diferenciables. Por otra parte, por hipótesis, v es la armónica conjugada de u. Entonces por definición de armónica conjugada, u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Aplicando el teorema 2.1.6, la condición de que las partes real e imaginaria de f sean diferenciables y verifiquen las ecuaciones de Cauchy Riemann es suficiente y necesaria para que f sea holomorfa en Ω. Luego, $f \in H(\Omega)$ y por construcción $Re(f) = u$. $\square$

Teorema 2.3.5. Existencia de armónica conjugada y de función holomorfa dada su parte real en simplemente conexos.

Dada una función armónica u en un abierto Ω simplemente conexo:
a) Existe armónica conjugada v de u en Ω.
b) Existe $f \in H(\Omega)$ tal que $Re(f) = u$

Demostración: Por el teorema 2.3.4 la afirmación a) es equivalente a b). Basta entonces demostrar una sola de ellas. Demostraremos a).

Consideremos el campo (P, Q) en Ω donde

$$P(x, y) = -u_y(x, y), \quad Q(x, y) = u_x(x, y) \qquad (1)$$

Aplicaremos al campo (P, Q) el corolario 2 del teorema de Green (enunciado en el párrafo 1.1.8).

El campo (P, Q) es de clase C^1 en Ω por (1) y porque u, al ser armónica por hipótesis, es de clase C^2 (cf. Definición 2.3.1). Verifiquemos que el campo (P, Q) es irrotacional en Ω, es decir $Q_x - P_y = 0$. En efecto, usando (1) y que u es armónica se obtiene:

$$Q_x - P_y = u_{xx} - (-v_{yy}) = u_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \forall (x.y) \in \Omega$$

El campo (P, Q) cumple entonces las hipótesis del corolario 2 del teorema de Green. Aplicando ese corolario, se deduce que existe algún potencial escalar de (P, Q), que llamamos v. Por definición de potencial escalar (ver 1.1.8), se cumple:

$$v \text{ es de clase } C^1, \quad v_x = P = -u_y, \quad v_y = Q = u_x \qquad (2)$$

Construimos la función compleja f definiendo:

$$f = u + iv$$

Siendo u y v de clase C^1, son diferenciables, y además, debido a (2), cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En virtud del teorema 2.1.6, estas condiciones son necesarias y suficientes para que f sea holomorfa en Ω. Además por construcción $Re(f) = u$. Luego, existe $f \in H(\Omega)$ tal que $Re(f) = u$, como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 2.3.6. Encontrar una función holomorfa f en algún abierto lo más grande posible, que tenga parte real

$$u(x, y) = \frac{1}{2} L(x^2 + y^2)$$

Encontrar su derivada f'.

Primero observemos que u está definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$. Además u es C^2 y computando las derivadas segundas de u se verifica que $u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$, es decir u es armónica en Ω.

Para construir f buscaremos una armónica conjugada v de u en algún conjunto abierto lo más grande posible (contenido en Ω) y definiremos $f = u + iv$. Usando el teorema 2.3.4 esta función f será holomorfa y su parte real será u, como queremos.

Pero $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ no es simplemente conexo. Entonces no se puede asegurar la existencia de armónica conjugada de u en Ω (lo cual no quiere decir que no exista). Para poder aplicar el teorema 2.3.5 y construir una armónica conjugada usando el procedimientos de la demostración de ese teorema, tomemos un subconjunto de Ω, lo más grande posible, que sea abierto y simplemente conexo.

En lo que sigue hágase un dibujo.

Quitemos de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ por ejemplo la semirrecta $S = \{z \in \mathbb{C} : z = 0 \text{ ó } z \neq 0, \quad \pi \in arg(z)\}$.

La semirrecta S es el semieje real ≤ 0. Definamos el conjunto $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus S$. Sabemos que existen armónicas conjugadas v de u en Ω_2, en virtud del teorema 2.3.5. Las construiremos.

Una vez obtenidas todas las v posibles, que sean armónicas conjugadas de u en Ω_2, si alguna de ellas se pudiera extender de clase C^2 a todo el conjunto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0,0\}$ donde estaba definida u, existirá armónica conjugada de u en Ω. En caso contrario no existirá.

La armónica conjugada v en Ω_2 se puede construir, como en la demostración del teorema 2.3.5, buscando los potenciales escalares del campo $(-u_y, u_x)$, que sabemos que existen en Ω_2

En nuestro caso

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

En virtud del corolario 2 del teorema de Green (párrafo 1.1.8), los potenciales escalares v del campo $(-u_y, u_x)$ en Ω_2 verifican:

$$v(x_1, y_1) - v(x_0, y_0) = \int_\gamma (-u_y \, dx + u_x \, dy) \qquad (2)$$

para toda curva $\gamma \subset \Omega_2$ que una el punto $(x_0, y_0) \in \Omega_2$ (que podemos tomar como fijo) con el punto $(x_1, y_1) \in \Omega_2$ (que podemos tomar como variable en Ω_2). Se observa que la curva γ no puede salir de Ω_2. Se observa que, justamente debido a que Ω_2 es simplemente conexo, la integral en (2) no depende de la curva elegida γ con tal que vaya del punto (x_0, y_0) al punto (x_1, y_1).

Elijamos $(x_0, y_0) = (1, 0)$ y tomemos $(x_1, y_1) \in \Omega_2$ variable, y llamemos:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = |x_1 + iy_1|, \qquad \theta_1 = Arg_{(-\pi,\pi]}(x_1 + iy_1) \qquad (3)$$

Elijamos la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ donde:

γ_1 es el segmento que va del punto $(1, 0)$ al punto $(r_1, 0)$,

γ_2 es el arco de circunferencia con centro en el origen y radio r_1 que va del punto $(r_1, 0)$ al punto (x_1, y_1).

Parametrizando las curvas

$$\gamma_1 : x_1(t) = 1 + t(r_1 - 1), \;\; y_1(t) = 0, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2 : x_2(t) = r_1 \cos t, \quad y_2(t) = r_1 \operatorname{sen} t, \quad t \in [0, \theta_1]$$

(Si θ_1 es negativo el intervalo real $t \in [0, \theta_1]$ debe entenderse como $0 \geq t \geq \theta_1$ dando a t primero el valor 0 y al final el valor θ_1.)

Sustituyendo en (2), usando (1) y las parametrizaciones de las curvas dadas, se obtiene:

$$v(x_1, y_1) - v(1, 0) =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{-y_1(t)\dot{x}_1(t)}{x_1^2(t) + y_1^2(t)} + \frac{x_1(t)\dot{y}_1(t)}{x_1^2(t) + y_1^2(t)} \right) dt + \int_0^{\theta_1} \left(\frac{-y_2(t)\dot{x}_2(t)}{x_2^2(t) + y_2^2(t)} + \frac{x_2(t)\dot{y}_2(t)}{x_2^2(t) + y_2^2(t)} \right) dt =$$

$$= 0 + \int_0^{\theta_1} \frac{r_1^2 \cos^2(t) + r_1^2 \operatorname{sen}^2(t)}{r_1^2} \, dt = \theta_1$$

Llamando $k = v(x_0, y_0)$ (es una constante real) y usando (3), se obtiene:

$$v(x_1, y_1) = k + \theta_1 = k + Arg_{(-\pi,\pi]}(x_1 + iy_1) \quad \forall\, (x_1, y_1) \in \Omega_2$$

La función v no puede extenderse continuamente a $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ porque es dicontinua en la semirrecta $S = \{y_1 = 0, x_1 \leq 0\}$, con salto 2π. En efecto, cuando $y_1 \to 0^+$ con $x_1 < 0$ fijo, la función $Arg_{(-\pi,\pi]}(x_1 + iy_1)$ tiende a π, pero cuando $y_1 \to 0^-$ con $x_1 < 0$ fijo, la función $Arg_{(-\pi,\pi]}(x_1 + iy_1)$ tiende a $-\pi$. Luego, no existe función holomorfa con parte real igual a u en todo Ω.

La función holomorfa buscada, con parte real u, está definida en Ω_2 y es (por ejemplo eligiendo $k = 0$):

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{2} L(x^2 + y^2) + i(Arg_{(-\pi,\pi]}(x + iy)) \quad \forall (x, y) \in \Omega_2$$

$$f(z) = L|z| + iArg_{(-\pi,\pi]}(z) = Log_{(-\pi,\pi]}(z) \quad \forall\, z \in \Omega_2$$

Hemos probado entonces que $Log_{(-\pi,\pi]}(z)$ es holomorfa en $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus S$ donde S es la semirrecta semieje real ≤ 0.

Finalmente, calculemos $f'(z)$. Usando el teorema 2.1.8 que expresa la derivada de las funciones holomorfas en función de sus partes reales e imaginaria, se obtiene:

$$Log_{(-\pi,\pi]}{}'(z) = u_x - iu_y = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z} \quad \forall\, z \in \Omega_2 \qquad (4)$$

El mismo razonamiento podría haberse hecho eligiendo otra semirrecta con extremo en el origen, para que el conjunto abierto quede simplemente conexo. Tomamos θ_0 real fijo cualquiera, elijamos la semirrecta $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : z = 0 \;\text{ ó }\; z = 0, \; \theta_0 \in arg(z)\}$.

S_3 es la semirrecta con extremo en el origen y que forma ángulo θ_0 con el semieje real positivo. Definiendo $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus S_3$, se puede construir una función v armónica conjugada de u en Ω_3. Haciendo una construcción similar a la anterior, queda finalmente la función holomorfa

$$f(z) = Log_{[\theta_0, \theta_0 + 2pi)}(z)$$

holomorfa en $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus S_3$, con parte real $u = (1/2)L(x^2 + y^2)$ y por lo tanto, análogamente a (4) su derivada es:

$$Log_{[\theta_0, \theta_0 + 2pi)}{}'(z) = u_x - iu_y = \frac{1}{z} \quad \forall\, z \in \Omega_3$$

3. Integración y Convergencia Uniforme.

3.1. *Integración compleja.*

Definición 3.1.1. Dada una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continua, y una curva C^1 a trozos $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, se define la integral de f a lo largo de γ como:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\, dt = \int_a^b Re[f(z(t))\dot{z}(t)]\, dt + i \int_a^b Im[f(z(t))\dot{z}(t)]\, dt$$

Ejemplo 3.1.2. Aplicando la definición anterior a la circunferencia $\mathcal{C}_r$ de centro en el punto a y radio $r > 0$, recorrida una sola vez en sentido antihorario, ($z = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$), se obtiene:

$$\int_{\mathcal{C}_r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

Proposición 3.1.3. Propiedades de la integral compleja.

1. $\int_\gamma f(z)\, dz$ es independiente de la parametrización C^1 a trozos que se elija, con tal que se preserve la misma orientación de la curva.
2. $\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$
3. $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$.
4. $\int_\gamma kf(z)\, dz = k\int_\gamma f(z)\, dz$ si k es una constante compleja independiente de z para $z \in \gamma$.
5. $\int_\gamma (f(z) + g(z))\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\gamma g(z)\, dz$

Demostración: Si u y v son las partes real e imaginaria de f, probemos la siguiente:

Afirmación: $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy)$.

De esta afirmación se deduce que el cálculo de la integral de la función compleja f de variable compleja z a lo largo de una curva se reduce al cálculo de las integrales de los campos reales $(u, -v)$ y (v, u) a lo largo de la misma curva. Por lo tanto, una vez probada esta afirmación, las propiedades enunciadas en la proposición son válidas porque lo son para las integrales curvilíneas de los campos reales.

Prueba de la afirmación: Recordemos que la integral de una campo (P, Q) a lo largo de una curva γ con parametrización $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a, b]$ es

$$\int_\gamma P\, dx + Q\, dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))\ \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\ \dot{y}(t)]\, dt \qquad (1)$$

Por definición de integral de $f(z)$:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\, dt = \int_a^b Re[f(z(t))\dot{z}(t)]\, dt + i\int_a^b Im[f(z(t))\dot{z}(t)]\, dt \qquad (2)$$

En el último miembro de la igualdad anterior sustituimos $\dot{z}(t) = \dot{z}(t) + i\dot{y}(t)$, y también $f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$ Operando se obtiene la partes real e imaginaria de $f(z(t))\dot{z}(t)$, y sustituyendo en (2), aplicando la definición (1) se verifica la igualdad de la afirmación. □

Definición 3.1.4. Dada una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se llama primitiva de f en Ω, a cualquier función holomorfa $F \in H(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z) \quad \forall\, z \in \Omega$.

Nota 3.1.5. Se advierte que a diferencia de lo que sucede con las funciones de variable real, no existe necesariamente primitiva de una función f dada, compleja continua en un abierto no vacío Ω. (Ver ejemplo en 3.1.9).

Sin embargo existe la integral de f a lo largo de cualquier curva contenida en Ω, ya que es el número complejo dado en la definición 3.1.1.

El problema de inexistencia de primitiva no se produce porque f sea o no sea integrable a lo largo de curvas, porque si f es continua, es integrable siempre a lo largo de curvas en Ω, ya que existe el número complejo definido en 3.1.1.

El problema es de otra clase: no es cierto en general para las funciones continuas de variable compleja el teorema fundamental del cálculo que vale para todas las funciones continuas f de variable real, y que afirma que la integral de una función continua f en un segmento con extremo inicial constante y extremo superior variable, es siempre una primitiva de f.

Es cierto sin embargo una versión del teorema fundamental del cálculo, con hipótesis adicionales a la continuidad de f. (Ver teorema 3.1.10.)

Teorema 3.1.6. Regla de Barrow.

Si f es continua y si existe F primitiva de f en Ω, entonces:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

para toda curva $\gamma \subset \Omega$ con extremo inicial z_1 y extremo final z_2.

En particular $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$.

Demostración: Sea $U = Re(F),\ \ V = Im(F)$. Luego

$$F(z) = U(z) + iV(z)$$

Tomemos una parametrización $z = z(t), \quad t \in [a, b]$ de la curva γ, y consideremos la función compuesta $F(z(t)) = U(z(t)) + iV(z(t))$. Derivándola respecto de t y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$[U(z(t)]^{\cdot} + i[V(z(t)]^{\cdot} = [F(z(t)]^{\cdot} = F'(z(t)) \cdot \dot{z}(t) = f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)$$

Luego

$$[U(z(t)]^{\cdot} = Re[f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)], \qquad [V(z(t)]^{\cdot} = Im[f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)] \quad (1)$$

Por definición de integral de f:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt = \int_a^b Re(f(z(t))\dot{z}(t))\,dt + i\int_a^b Re(f(z(t))\dot{z}(t))\,dt \quad (2)$$

Aplicando (1) y la regla de Barrow para funciones reales de variable real:

$$= \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b [U(z(t)]^{\cdot}\,dt + i\int_a^b [V(z(t)]^{\cdot}\,dt =$$

$$= U(z(b)) - U(z(a)) + i[V(z(b)) - V(z(a))] =$$

$$= [U(z(b)) + iV(z(b))] - [U(z(a)) + iV(z(a))] = F(z(b)) - F(z(a)) \quad (3)$$

Si la curva γ une el punto z_1 con el punto z_2 entonces $z(a) = z_1, \quad z(b) = z_2$. La igualdad (3) se transforma en

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1) \quad \square$$

Corolario 3.1.7. *Si $f \in H(\Omega)$ tiene derivada idénticamente nula en Ω, entonces f es constante en cada componente conexa de Ω.*

Demostración: Si f tiene derivada idénticamente nula, entonces f es una primitiva de la función constante igual a cero. Aplicando la regla de Barrow a cualquier curva $\gamma : z = z(t), \quad t \in [a, b]$, que una un punto z_1 con un punto z_2 en Ω resulta:

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_\gamma 0\, dz = \int_a^b 0 \cdot \dot{z}(t)\, dt = 0$$

Fijando z_1, se deduce que $f(z)$ es constante igual a $f(z_1)$ para todo punto z que pueda ser unido con z_1 por alguna curva en Ω. Es decir f es constante en la componente conexa de Ω que contiene a z_1. Eligiendo z_1 en otra componente conexa de Ω, y repitiendo el razonamiento, se deduce que F es constante en cada una de las componentes conexas de Ω. $\square$

Ejemplo 3.1.8. 1. Sea m un número natural $m \geq 0$. La función $(z-a)^{m+1}/(m+1)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y su derivada es $(z-a)^m$. Luego, para toda curva cerrada γ:

$$\int_\gamma (z-a)^m\, dz = 0$$

2. Sea m un número entero negativo $m \neq -1$. La función $(z-a)^{m+1}/(m+1)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ y su derivada es $(z-a)^m$. Luego, para toda curva cerrada γ que no pase por a:

$$\int_\gamma (z-a)^m\, dz = 0$$

Ejemplo 3.1.9. La función $1/(z-a)$ es continua (e incluso holomorfa y C^∞) en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Sin embargo su integral a lo largo de la circunferencia $C_r \subset \Omega$ es $2\pi i \neq 0$. Luego, usando el contrarrecíproco de la Regla de Barrow, se deduce que no existe primitiva de $1/(z-a)$ en Ω.

A pesar de ello, sabemos del teorema 2.1.13 que en el conjunto simplemente conexo $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z - a = x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$ la función $Log_{[0,2\pi)}(z-a)$ es holomorfa y tiene como derivada $1/(z-a)$. Entonces $Log_{[0,2\pi)}(z-a)$ es una primitiva de $1/(z-a)$ en Ω_1.

Análogamente sabemos del teorema 2.1.13 que en el conjunto simplemente conexo $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{z \in C : z - a = x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$ la función $Log_{(-\pi,\pi]}(z-a)$ es holomorfa y tiene como derivada $1/(z-a)$. Entonces $Log_{(-\pi,\pi]}(z-a)$ es primitiva de $1/(z-a)$ en Ω_2.

También obtuvimos en el teorema 2.1.13 lo siguiente: Fijado $\theta_0 \in \mathbb{R}$, sea $S_3 = \{z \in C : \theta_0 \in arg(z-a)\}$ la semirrecta con extremo en a y que forma ángulo θ_0 con el semieje real positivo. Sea $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus S_3$ el conjunto abierto y simplemente conexo que se obtiene retirando del plano complejo la semirrecta S_3. Entonces la función $Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z-a)$ es holomorfa en Ω_3 y tiene como derivada $1/(z-a)$. Por lo tanto $Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z-a)$ es primitiva de $1/(z-a)$ en Ω_3.

Teorema 3.1.10. Teorema fundamental del cálculo.

Sea f es continua en Ω.

a) Si existe alguna función F definida en Ω que cumple para toda componente conexa R de Ω

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_\gamma f(z)\,dz$$

para algún punto $z_0 \in R$, para todo $z_1 \in R$ y para toda curva $\gamma \subset \Omega$ que una z_0 con z_1, entonces F es una primitiva de f en Ω (es decir $F \in H(\Omega)$ y $F' = f$).

b) Si $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en Ω entonces existe primitiva de f en Ω.

Demostración:

Parte a): Probemos que $F'(z_1)$ existe y es igual a $f(z_1)$.

Elijamos un disco D de centro z_1 y radio positivo, contenido en Ω. Tomemos $z_2 \in D, z_2 \neq z_1$. Elijamos una curva γ cualquiera que una z_0 con z_1. Tomemos el segmento $S : z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1),\ t \in [0,1]$ que une z_1 con z_2. La curva $\gamma + S$ une z_0 con z_2. Entonces:

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma+S} f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz = \int_S f(z)\,dz = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))](z_2 - z_1)\,dz$$

Dividiendo entre $z_2 - z_1$ se deduce:

$$\frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))]\,dz$$

Tomando límite cuando $z_2 \to z_1$ el integrando en la igualdad anterior tiende a $f(z_1)$ uniformemente con $t \in [0,1]$ (porque f es continua en el segmento compacto S, por lo tanto es uniformemente continua en S). Entonces, existe el límite y es

$$\lim z_2 \to z_1 \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \lim z_2 \to z_1 \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))]\,dz = f(z_1)$$

Por definición de derivada, ese límite es $F'(z_1) = f(z_1)$ como queríamos demostrar.

Parte b): Construiremos una función F en cada componente conexa de Ω. Llamemos R a una componente conexa cualquiera de Ω. Elijamos $z_0 \in R$ y dejémoslo fijo. Tomemos $z_1 \in R$ cualquiera. Definamos la función

$$F(z_1) = \int_\gamma f(z)\,dz$$

donde γ es cualquier curva C^1 a trozos contenida en Ω que une z_0 con z_1.

La función F está bien definida, es decir no depende de la curva γ elegida. En efecto, si tomamos dos curvas γ_1 y γ_2 contenidas en Ω que unan el punto z_0 con z_1, la curva cerrada $\gamma_1 - \gamma_2$ cumple por hipótesis que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

. Luego la integral de f a lo largo de γ_1 y de γ_2, vale lo mismo.

La función F así definida en cada componente conexa de Ω cumple la condición de la parte a). Entonces es una primitiva de f. $\square$

Teorema 3.1.11. Acotación de integrales.

Sea $\gamma \subset \Omega$ un curva cualquiera C^1 a trozos, parametrizada con $z = z(t),\ t \in [a,b]$ con longitud L. Sea f continua en Ω, y sea $M \geq \max_{z\in\gamma} |f(z)|$. Se cumple la siguiente desigualdad:

$$|\int_\gamma f(z)\,dz| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \leq ML$$

donde $|dz| = |\dot{z}(t)|\,dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = ds$, siendo $s \in [0,L]$ la abscisa curvilínea de la curva γ orientada para t creciente.

Demostración: Probemos primero la segunda desigualdad de la tesis, es decir $\int_\gamma |f(z)||dz| \leq ML$.

Siendo $|f(z)| \leq M \forall z \in \gamma^*$, resulta:

$$\int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_\gamma |f(z)|\,ds \leq \int_\gamma M ds = M \int_\gamma ds \quad (1)$$

Por definición de longitud L de la curva γ se cumple: $\int_\gamma ds = L$, luego sustituyendo en (1) resulta $\int_\gamma |f(z)||dz| \leq ML$ como queríamos probar.

Ahora probemos la primera desigualdad de la tesis, es decir $|\int_\gamma f(z)\,dz| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$. Sea $I = \int_\gamma f(z)\,dz$.

Primer caso: Si $I = 0$ entonces la desigualdad que queremos probar es inmediata ya que la integral de la derecha en ella es no negativa.

Segundo caso: Si $I \neq 0$, escribamos $I = |I|e^{i\theta}$ donde θ es una constante real, argumento de I.

Tomando una parametrización $z = z(t),\ t \in [a,b]$ de la curva γ, resulta:

$$|I| = Ie^{-i\theta} = e^{-i\theta} \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma e^{-i\theta} f(z)\,dz = \int_a^b e^{-itheta} f(z(t))\dot{z}(t)dt$$

Llamando

$$g(t) = e^{-i\theta} f(z(t))\dot{z}(t)$$

se tiene

$$|I| = \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b Re(g(t))\,dt + i \int_a^b Im(g(t))\,dt$$

Pero $|I|$ es un número real. Se concluye que $\int_a^b Im(g(t))\,dt = 0$, y entonces:

$$|I| = \int_a^b Re(g(t))\,dt$$

Sabiendo que para cualquier complejo u se cumple $Re(u) \leq |u|$, obtenemos:

$$|I| = \int_a^b Re(g(t))\,dt \leq \int_a^b |g(t)|\,dt = \int_a^b |e^{-i\theta}||f(z(t))||\dot{z}(t)|\,dt$$

Observando que $|e^{-i\theta}| = 1$ resulta:

$$|I| \leq \int_a^b |f(z(t))||\dot{z}(t)|\,dt = \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 3.1.12. Sea γ una curva cerrada C^1 a trozos, que no pasa por el punto a, y tal que da una vuelta sola en sentido antihorario alrededor de a y que corta en un solo punto $b = x_1 + a$ a la semirrecta $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : z - a = x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

Sea $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus S_1$. La función $1/(z-a)$ tiene primitiva en Ω_1, que es $Log_{[0,2\pi)}(z-a)$. Se puede extraer de la curva γ un arco de longitud $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño para que el arco restante quede contenido en Ω_1. Usando la acotación del teorema anterior, y luego haciendo $\epsilon \to 0$, se deduce que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

siendo $2\pi i$ el salto de discontinuidad en la semirrecta S_1 de la función $Log_{[0,2\pi)}(z-a)$, que es primitiva de $1/(z-a)$ en Ω_1.

Por lo tanto si γ es una curva cerrada que no pasa por a y que da k vueltas alrededor de a, (con la convención de que k es un entero cualquiera, $k > 0$ significa que el sentido es antihorario, y que $k < 0$ es en sentido horario) cortando $|k|$ veces a la semirrecta S_1 , se deduce:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2k\pi i$$

Ejemplo 3.1.13. Análogamente al ejemplo anterior, usaremos el resultado al final del ejemplo 3.1.9, para probar el siguiente resultado:

Si γ es una curva cerrada que no pasa por a y que da k vueltas alrededor de a atravesando a la semirrecta S_3 (con extremo en el punto a) un número finito p de veces, de las cuales k_1 veces son en sentido antihorario y k_2 veces en sentido horario, entonces $k = k_1 - k_2$.

Probemos que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2k\pi i$$

Para seguir la siguiente construcción, que es válida en general, hágase una figura con una curva γ que, por ejemplo de dos vueltas alrededor de a y que corte $p = 3$ veces a la semirrecta S_3, tres en sentido antihorario y una en sentido horario.

Dado $\epsilon > 0$ partimos γ en $2(k_1 + k_2) = 2p$ arcos consecutivos, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_{2p}$, tales que $\gamma_1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{2p-1}$ no cortan a S_3 y los restantes $\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2p}$ cortan a S_3, en un único punto cada uno, y tienen longitudes menores que ϵ.

Por razones de conveniencia llamamos $\gamma_0 = \gamma_{2p}$

Denotamos z_j al extremo inicial del arco γ_j y z_{j+1} al extremo final del arco γ_j que coincide con el extremo inicial de arco γ_{j+1}.

Se aplica la regla de Barrow para calcular $\int_{\gamma_j} 1/(z-a)\, dz$ para $j = 1, 3, \ldots (2p-1)$, ya que la función $Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z-a)$ es primitiva de $1/(z-a)$ en $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus S_3$. Para $j = 1, 3, \ldots, 2p-1$ resulta:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-a} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z_{j+1} - a) - Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z_j - a) \right] = \lambda_j 2\pi i$$

donde $\lambda_j = +1$ si los arcos γ_{j+1} y γ_{j-1} atraviesan ambos a la semirrecta S_3 en sentido antihorario; $\lambda_j = -1$ si lo hacen ambos en sentido horario; y $\lambda_j = 0$ si lo hacen en sentidos opuestos. Esto es porque z_{j+1} y z_j tienden a puntos en la semirrecta S_3 por lados distintos cuando $\lambda_{j+1} = \pm 1$), y por lo tanto el límite de la derecha es igual al salto de tamaño $\pm 2\pi i$ de discontinuidad en la semirrecta S_3 de la función $Log_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}(z-a)$.

Se observa que $\sum_{j=1,3,\ldots,2p-1} \lambda_j$ aumenta $+1$ por cada arco γ_{j+1} que atraviesa a la semirrecta S_3 en sentido antihorario, y disminuye (se le agrega -1) por cada arco γ_{j+1} que atraviesa a la semirrecta S_3 en sentido horario. Luego $\sum_{j=1,3,\ldots,2p-1} \lambda_j = k_1 - k_2 = k$

Por otra parte, para $j = 2, 4 \ldots, 2p$, usamos el teorema de acotación de integrales para obtener:

$$\left| \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-a} \right| \leq M\epsilon \to 0$$

Sumando todo queda

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \sum_{j=1}^{2p} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-a} = \quad 2\pi i \cdot \sum_{j=1,3,\ldots,2p-1} \lambda_j = \ (k_1 - k_2) 2\pi i = 2k\pi i \quad \Box$$

3.2. *Convergencia uniforme de series de funciones complejas.*

Sea K un conjunto no vacío de complejos. Sea para cada natural $n \geq 0$ una función compleja f_n definida para todo $z \in K$ (no necesariamente continua).

Definición 3.2.1. Convergencia puntual de series de funciones.
Una serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *converge puntualmente para todo* $z \in K$ si, para cada z fijo en K existe

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(z) = f(x)$$

Es decir, dado $z \in \Omega$ y dado $\epsilon > 0$, existe N_0 (que puede depender de z) tal que

$$N \geq N_0 \quad \Rightarrow \quad |f(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z)| < \epsilon$$

Cuando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge puntualmente para todo $z \in K$ a la función $f(x)$ se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(x) \quad \forall z \in K$$

Definición 3.2.2. Convergencia absoluta de series de funciones.
Se dice que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ converge absolutamente para todo $z \in K$ si la serie de los módulos $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ converge puntualmente para cada $z \in K$ fijo.

Al igual que para series de números reales se demuestra que si la convergencia absoluta implica la convergencia puntual de la serie dada, sin los módulos, pero el recíproco es falso.

Definición 3.2.3. Convergencia uniforme de series de funciones. Una serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *converge uniformemente en* K si existe una función $f(z)$ definida para $z \in K$ tal que

$$\lim_{N \to +\infty} \sup_{z \in K} |f(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z)| = 0$$

Es decir, dado $\epsilon > 0$, existe N_0 (que es independiente de z) tal que

$$N \geq N_0 \;\Rightarrow\; |f(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z)| < \epsilon \;\; \forall\, z \in K$$

Cuando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en K a la función $f(z)$ se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \;(C.U. \text{ en } K)$$

Nota: Si una serie de funciones converge uniformemente en K a $f(z)$, entonces converge puntualmente a $f(z)$ para todo $z \in K$. El recíproco es falso.

Ejemplo 3.2.4. La serie geométrica de razón z definida como $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ [1] converge puntualmente a $1/(1-z)$ para todo z tal que $|z| < 1$. Es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \;\; \forall\, z \in D_1(0)$$

Sin embargo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ no converge uniformemente en $D_1(0)$.

Demostración: Para ver que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge puntualmente para todo $z \in D_1(0)$ calculemos explícitamente su reducida N-ésima:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^N$$

$$z \cdot \sum_{n=0}^{N} z^n = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^N + z^{N+1}$$

Restando ambas igualdades: $(1-z)\sum_{n=0}^{N} z^n = 1 - z^{N+1}$. De donde, si $z \neq 1$:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1-z} \qquad (1)$$

El límite de la reducida N-ésima cuando $N \to +\infty$ no existe si $|z| > 1$ pues en ese caso $z^{N+1} \to \infty$.

El límite de la reducida N-ésima cuando $N \to +\infty$ existe y es $1/(1-z)$ si $|z| < 1$ pues en ese caso $z^{N+1} \to 0$.

Por lo tanto la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge puntualmente a la función $1/(1-z)$ para todo $z \in D_1(0)$.

La convergencia no es uniforme en $D_1(0)$ pues:

$$sup_{z \in D_1(0)} \left| \frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^{N} z^n \right| = sup_{z \in D_1(0)} \left| \frac{1}{1-z} - \frac{1 - z^{N+1}}{1-z} \right| =$$

$$= sup_{z \in D_1(0)} \left| \frac{z^{N+1}}{1-z} \right| = sup_{z \in D_1(0)} \frac{|z|^{N+1}}{|1-z|} = +\infty$$

pues cuando $z \in D_1(z_0)$ se acerca a 1, el denominador tiende a cero. □

[1] Por convención $z^0 = 1$ para todo z, aún abusando de la notación, cuando $z = 0$.

Teorema 3.2.5. Criterio de la mayorante de Weierstrass. *Si $|f_n(z)| \leq A_n$, independiente de z, para todo $z \in K$ y si $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \text{ converge uniformemente y absolutamente en } K$$

Demostración:

Consideremos, para cada z fijo en K la sucesión de reducidas N- ésimas $F_N(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$. Probemos que para cada z fijo en Kesta sucesión es de Cauchy.

Acotemos la diferencia $F_M(z) - F_N(z)$ para todo $M > N \geq 0$, usando la mayorante A_n

$$|F_M(z) - F_N(z)| = |\sum_{n=N+1}^{M} f_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{M} |f_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{M} A_n = \sum_{n=0}^{M} A_n - \sum_{n=0}^{N} A_n$$

Como A_n es real no negativo y $M > N$, el último término de la desigualdad de arriba es no negativo, y deducimos:

$$|F_M(z) - F_N(z)| \leq |\sum_{n=0}^{M} A_n - \sum_{n=0}^{N} A_n| \quad \forall z \in K, \quad \forall M > N \geq 0 \qquad (1)$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ es convergente de términos reales; entonces la sucesión de sus reducidas es una sucesión de Cauchy. Se deduce que para todo $\epsilon^* > 0$ existe N_0 (independiente de $z \in K$, pues los términos A_n son independientes de z) tal que

$$M > N \geq N_0 \Rightarrow |\sum_{n=0}^{M} A_n - \sum_{n=0}^{N} A_n| < \epsilon^*$$

Sustituyendo en (1), se deduce:

$$M > N \geq N_0 \Rightarrow |F_M(z) - F_N(z)| < \epsilon^* \; \forall z \in K, \qquad (2)$$

Entonces la sucesión $F_N(z)$ es una sucesión de Cauchy. De (2) se deduce que las partes reales e imaginarias de $F_N(z)$ son también sucesiones de Cauchy en la recta real, porque para todo complejo u (y en particular para $u = F_N(z) - F_M(z)$ de (2)) se cumple $|Re(u)| \leq |u|$, $|Im(u)| \leq |u|$.

Como la recta real es completa, toda sucesión de reales que sea una sucesión de Cauchy es convergente a algún valor real. Entonces existen

$$u(z) = \lim_{N \to +\infty} Re(F_N(z)), \quad v(z) = \lim_{N \to +\infty} Im(F_N(z))$$

Denotando $f(z) = u(z) + iv(z)$, se cumple

$$\lim_{N \to +\infty} F_N(z) = f(z) \quad \forall\, z \in K \qquad (3)$$

La igualdad (3) significa que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge puntualmente para todo $z \in K$ a la función $f(z)$.

Hemos probado que:

$$|f_n(z)| \leq A_n, \; \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{ convergente } \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \;\text{ converge puntualmente para todo } z \in K \qquad (4)$$

Ahora veamos que la convergencia es también uniforme.

En la desigualdad (2) elijamos un $N > N_0$ y dejémoslo fijo. Para cada $z \in K$ fijo, llamemos $\alpha = F_N(z)$. Entonces (2) se transforma en:

$$M > N \;\Rightarrow\; |F_M(z) - \alpha| < \epsilon^*$$

Haciendo $M \to +\infty$, con N fijo, se deduce: $|f(z) - \alpha| \leq \epsilon^*$, o lo que es lo mismo: $|f(z) - F_N(z)| \leq \epsilon$. Como esta desigualdad es válida para cualquier $N \geq N_0$ y para cualquier $z \in K$ deducimos que:

$$\forall\, \epsilon^* > 0 \text{ existe } N_0 \;\text{ (independiente de } z) \;\text{ tal que}$$

$$N > N_0 \;\Rightarrow\; |f(z) - F_N(z)| \leq \epsilon^* < \epsilon \quad \forall z \in K$$

(Dado $\epsilon > 0$, elegimos $\epsilon^* = \epsilon/2$).

La afirmación anterior es por definición la convergencia uniforme a la función $f(z)$ de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ en el conjunto K.

Hemos terminado la prueba de la convergencia uniforme en K.

Sólo resta demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente para todo $z \in K$. Consideremos la serie de los módulos $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ La afirmación (4) es aplicable a la función $|f_n(z)|$ en lugar de $f_n(z)$, luego la serie de los módulos converge puntualmente, como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 3.2.6. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en cualquier conjunto compacto K contenido en $D_1(0)$.

Prueba: Sea $r = \max_{z \in K} |z|$. Si $K \subset D_1(0)$ es compacto entonces $r < 1$. (Se observa que si K no fuera compacto ese máximo r no tendría por qué existir; habría supremo pero, si no se alcanza, el supremo podría ser 1).

Se tiene $|z^n| = |z|^n \leq r^n = A_n$, independiente de n, para todo $z \in K$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ es geométrica de razón real no negativa $r < 1$. Entonces es convergente. Por el criterio de la mayorante de Weierstrass, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en K. $\square$

Teorema 3.2.7. Convergencia uniforme y continuidad. *Si para todo $n \geq 0$ la función f_n es continua en K, y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ (C.U. en K), entonces f es continua en K.*

Demostración: Llamemos $F_N(z)$ a la reducida N-ésima de la serie, es decir

$$F_N(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$$

Como la reducida es la suma de una cantidad finita de funciones f_n que son continuas, $F_N(z)$ es continua.

Por definición de convergencia uniforme, para todo $\epsilon > 0$ existe N_0 (independiente de $z \in K$) tal que

$$N > N_0 \;\Rightarrow\; |f(z) - F_N(z)| < \epsilon/3 \quad \forall z \in K \qquad (1)$$

Elijamos un $N > N_0$ y dejémoslo fijo. Por la continuidad de F_N respecto de z, fijado $z_0 \in K$, dedo $\epsilon > 0$ (el mismo ϵ que antes) existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in K, \;\; |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |F_N(z) - F_N(z_0)| < \epsilon/3 \qquad (2)$$

Escribamos el incremento de $f(z)$ haciendo aparecer el incremento de F_N, apliquemos la propiedad triangular del módulo de complejos, y luego usemos las desigualdades (1) y (2):

$$|f(z) - f(z_0)| = |f(z) - F_N(z) + F_N(z) - F_N(z_0) + F_N(z_0) - f(z_0)| \leq$$
$$\leq |f(z) - F_N(z)| + |F_N(z) - F_N(z_0)| + |F_N(z_0) - f(z_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$
$$\forall\, z \in K \text{ tal que } |z - z_0| < \delta$$

Por definición de continuidad hemos probado que f es continua en z_0. Como z_0 puede ser cualquier punto de K entonces f es continua en K. $\square$

Teorema 3.2.8. Convergencia uniforme e integración. *Si para todo $n \geq 0$ la función f_n es continua en K, y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en K, entonces*

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_\gamma f_n(z)\, dz \right)$$

para cualquier curva C^1 a trozos contenida en K.

Demostración: Llamemos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ para cada $z \in K$. Por el teorema de convergencia uniforme y continuidad la función f es continua en K. Por lo tanto está definida la integral

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz$$

El objetivo consiste en probar que

$$I = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\int_\gamma f_n(z)\, dz \right) \; ? \qquad (1)$$

(El signo de interrogación se agregó para recordar que aún no está probada la igualdad).

Llamemos $F_N(z)$ a la reducida N-ésima de la serie, es decir:

$$F_N(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$$

Como la reducida es la suma de una cantidad finita de funciones f_n y la integral de la suma (de una cantidad finita de sumandos) es la suma de las integrales, se deduce:

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\int_\gamma f_n(z)\,dz\right) = \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{N} f_n(z)\right)\,dz = \int_\gamma F_N(z) \qquad (2)$$

Como la convergencia es uniforme en K, para todo $\epsilon^* > 0$ existe N_0, independiente de z tal que

$$N \geq N_0 \;\Rightarrow\; \sup_{z\in K}|f(z) - F_N(z)| < \epsilon^*$$

Luego:

$$\left|I - \int_\gamma F_N(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma (f(z)\,dz - F_N(z))\,dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)\,dz - F_N(z)|\,|dz| \leq \epsilon^* \cdot L < \epsilon$$

donde L es la longitud de la curva γ, y $\epsilon^* > 0$ se elige menor que ϵ/L, dado $\epsilon > 0$.

Deducimos entonces que

$$I = \lim_{N\to+\infty} \int_\gamma F_N(z)\,dz$$

y entonces, usando (2), se prueba (1) como queríamos. □

Ejemplo 3.2.9. Para cualquier curva $\gamma \subset D_0(1)$ que una el origen con el punto z_1 se tiene, debido a la compacidad de γ:

$$\int_\gamma \frac{1}{1-z}\,dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma z^n\,dz\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^{n+1}}{n+1}$$

Por otra parte $-Log_{[0,2\pi)}(z-1)$ es primitiva de $1/(1-z)$ para todo z complejo tal que $(z-1)$ no sea real ≥ 0. Entonces es primitiva en $D_1(0)$. Aplicando la regla de Barrow a la integral del primer miembro de la igualdad anterior, se concluye que el desarrollo en serie de potencias de z de $Log_{[0,2\pi)}(z-1)$ es:

$$Log_{[0,2\pi)}(z_1 - 1) = i\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_1^n}{n} \;\; \forall\, z_1 \in D_1(0)$$

Análogamente, sustituyendo z por $-z$ se tiene:

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z}\,dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\right)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma (-z)^n\,dz\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z_1^{n+1}}{n+1}$$

Por otro lado $Log_{(-\pi,\pi]}(z+1)$ es primitiva de $1/(1+z)$ para todo z complejo tal que $(1+z)$ no sea real ≤ 0. Entonces es primitiva en $D_1(0)$. Aplicando la regla de Barrow a la integral al primer miembro de la igualdad anterior, se concluye que el desarrollo en serie de potencias de z de $Log_{(pi,\pi]}(z+1)$ es:

$$Log_{(-\pi,\pi]}(z_1 + 1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z_1^n}{n} \;\; \forall\, z_1 \in D_1(0)$$

SEGUNDA PARTE.
FUNCIONES ANALÍTICAS Y TEORÍA DE CAUCHY.

Resumen

Se prueba que toda función holomorfa es analítica, y recíprocamente. Se desarrolla la teoría de Cauchy-Goursat local en un rectángulo. Se demuestran el teorema de Cauchy global, y la fórmula integral de Cauchy global para la función y para su derivada n-ésima. Se demuestra el principio del módulo máximo y otros teoremas que son consecuencias de la Teoría de Cauchy. Se incluyen aplicaciones al cálculo de integrales impropias en variable real.

4. Síntesis de la primera parte.

Se suponen conocidos las siguiente notaciones y conceptos, expuestos en la sección 1.1:

El plano complejo $\mathbb{C}$. Conceptos de conjunto abierto, cerrado, acotado y compacto en $\mathbb{C}$.

Ω indica un conjunto abierto. $D_R(z_0)$ es el disco abierto de centro z_0 y radio R, $\overline{D}_R(z_0)$ es el disco cerrado.

Conceptos de conjunto abierto conexo (región), y de componentes conexas.

Las curvas en γ son siempre C^1 a trozos.

Conceptos de curvas homotópicas en Ω, y de curvas cerradas homotópicas en Ω a un punto.

Concepto de abierto Ω simplemente conexo.

Concepto de suma de curvas, y de curva opuesta.

Conceptos de límite y continuidad de funciones complejas de variable compleja. Concepto de funciones complejas de clase C^r y de clase C^∞.

La función exponencial compleja. El argumento de un complejo como conjunto.

Teorema de Green para la integración de campos de clase C^1 en el plano, y sus corolarios.

4.1. *Derivación y funciones holomorfas.*

Los detalles así como las demostraciones de los teoremas y proposiciones de esta subsección pueden encontrarse en la sección 2.

Sea Ω abierto contenido en $\mathbb{C}$, $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.

Definición 4.1.1. Función derivable en un punto y función holomorfa.

$f(z)$ es *derivable en* z_0 si existe el límite siguiente, llamado *derivada de* f *en* z_0*:*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

f es *holomorfa en* Ω si es derivable en z_0 para todo $z_0 \in \Omega$.

Notación: Se denota $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω.

Teorema 4.1.2. *Toda función holomorfa es continua.*

4.1.3. Ejemplos de funciones holomorfas y algunas propiedades.

a) Si $f(z) = k$ constante en Ω, entonces $f'(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$.

b) Para todo n natural $n \geq 1$, vale $(z^n)' = nz^{n-1}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

c) Para todo n natural $n \geq 1$, vale $(z^{-n})' = -nz^{-n-1}$, $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

d) La suma, el producto y la composición de funciones holomorfas son holomorfas. Valen las mismas reglas de derivación para la suma, el producto y la composición, que para funciones de variable real (en particular la regla de la cadena para derivar la composición de funciones).

e) Los polinomios son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$.

f) El cociente de funciones holomorfas en Ω es una función holomorfa en Ω si no se anula el denominador en Ω.

g) e^z es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ y $(e^z)' = e^z$ para todo complejo z.

Teorema 4.1.4. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

f es holomorfa en Ω si y solo si u y v son diferenciables en todo punto de Ω y cumplen las ecuaciones de Cauchy- Riemann siguientes:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad \forall\, z \in \Omega$$

Teorema 4.1.5. Expresión de la derivada. *Si f es holomorfa en Ω entonces*

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x, \qquad f' = f_x = -if_y$$

donde $f_x = u_x + iv_x$ y $f_y = u_y + iv_y$.

Corolario 4.1.6. *Si $f \in H(\Omega)$ tiene módulo constante en el abierto conexo Ω entonces es constante en Ω.*

4.2. *Integración compleja.*

Las demostraciones de los teoremas y proposiciones de esta subsección se encuentran en la sección 3.1.

Definición 4.2.1. Dada una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continua, y una curva C^1 a trozos $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, se define la integral de f a lo largo de γ como:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\, dt = \int_a^b Re[f(z(t))\dot{z}(t)]\, dt + i \int_a^b Im[f(z(t))\dot{z}(t)]\, dt$$

Ejemplo 4.2.2. Si $\mathcal{C}_r$ es la circunferencia de centro en el punto a y radio $r > 0$, recorrida una sola vez en sentido antihorario, entonces:

$$\int_{\mathcal{C}_r} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$$

Proposición 4.2.3. Propiedades de la integral compleja.

1. $\int_\gamma f(z)\, dz$ es independiente de la parametrización C^1 a trozos que se elija, con tal que se preserve la misma orientación de la curva.
2. $\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$
3. $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$.
4. $\int_\gamma kf(z)\, dz = k \int_\gamma f(z)\, dz$ si k es una constante compleja independiente de z para $z \in \gamma$.
5. $\int_\gamma (f(z) + g(z))\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\gamma g(z)\, dz$

Definición 4.2.4. Dada una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se llama primitiva de f en Ω, si existe alguna, a cualquier función holomorfa $F \in H(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z) \quad \forall\, z \in \Omega$.

Teorema 4.2.5. Regla de Barrow.
Si f es continua y si existe F primitiva de f en Ω, entonces:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1)$$

para toda curva $\gamma \subset \Omega$ con extremo inicial z_1 y extremo final z_2.
En particular $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$.

Ejemplo 4.2.6. 1. Sea m un número entero, $m \neq -1$. La función $(z-a)^{m+1}/(m+1)$ es primitiva de $(z-a)^m$ en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Luego, para toda curva cerrada γ que no pase por a:

$$\int_\gamma (z-a)^m\, dz = 0 \qquad \text{si } m \neq 1$$

En particular si $m \geq 0$ entonces vale para toda curva cerrada aunque pase por a.

Ejemplo 4.2.7. La función $1/(z-a)$ es continua en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Sin embargo su integral a lo largo de la circunferencia $C_r \subset \Omega$ es $2\pi i \neq 0$. Luego, usando el contrarrecíproco de la Regla de Barrow, se deduce que no existe primitiva de $1/(z-a)$ en Ω.

Corolario 4.2.8. Corolario de la Regla de Barrow. *Si $f \in H(\Omega)$ cumple $f'(z) = 0 \ \forall\, z \in \Omega$ entonces f es constante en cada componente conexa de Ω.*

Teorema 4.2.9. Teorema fundamental del cálculo.
Sea f es continua en Ω.
a) Si existe alguna función F definida en Ω que cumple para toda componente conexa R de Ω

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_\gamma f(z)\, dz$$

para algún punto $z_0 \in R$, para todo $z_1 \in R$ y para toda curva $\gamma \subset \Omega$ que una z_0 con z_1, entonces F es una primitiva de f en Ω (es decir $F \in H(\Omega)$ y $F' = f$).
b) Si $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en Ω entonces existe primitiva de f en Ω.

Teorema 4.2.10. Acotación de integrales.
Sea $\gamma \subset \Omega$ un curva cualquiera C^1 a trozos, con longitud L, y parametrizada con $z = z(t)$, $t \in [a, b]$. Sea f continua en Ω, y sea $M \geq \max_{z \in \gamma} |f(z)|$. Se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left|\int f(z)\, dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz| \leq ML$$

donde $|dz| = |\dot{z}(t)|\, dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = ds$, siendo $s \in [0, L]$ la abscisa curvilínea de la curva γ orientada para t creciente.

4.3. *Convergencia uniforme de series de funciones complejas.*

Los detalles así como las demostraciones de los teoremas y proposiciones de esta subsección se encuentran en la sección 3.2.

Sea K un conjunto no vacío de complejos. Sea para cada natural $n \geq 0$ una función compleja f_n definida para todo $z \in K$ (no necesariamente continua).

Se denota con

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z) \quad \forall z \in K$$

a la serie que converge a la función $f(z)$ puntualmente en K, es decir, para cada z fijo en K. (Ver definición de convergencia puntual en 3.2.1.)

Se denota con

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \ (C.U. \text{ en } K)$$

a la serie que converge uniformemente en el conjunto K a la función $f(z)$. (Ver definición de convergencia uniforme en 3.2.3.)

Se denota con

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \ (C.A. \ \ \forall\, z \in K)$$

a la serie que converge absolutamente en el conjunto K a la función $f(z)$. Es decir, la serie de los módulos $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ converge puntualmente para cada $z \in K$ fijo. Luego, la serie dada, sin los módulos, converge también puntualmente a cierta función $f(z)$.

Nota: Si una serie de funciones converge uniformemente en K a f, entonces converge puntualmente a $f(z)$ para todo $z \in K$ fijo. El recíproco es falso.

Ejemplo 4.3.1. La serie geométrica de razón z definida como $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ [2] converge puntualmente a $1/(1-z)$ para todo z tal que $|z| < 1$. Es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall\, z \in D_1(0)$$

Sin embargo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ no converge uniformemente en $D_1(0)$.

Teorema 4.3.2. Criterio de la mayorante de Weierstrass. *Si $|f_n(z)| \leq A_n$, independiente de z, para todo $z \in K$ y si $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \textit{ converge uniformemente y absolutamente en } K$$

Ejemplo 4.3.3. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ converge uniformemente en cualquier conjunto compacto K contenido en $D_1(0)$.

Teorema 4.3.4. Convergencia uniforme y continuidad. *Si para todo $n \geq 0$ la función f_n es continua en K, y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ (C.U. en K), entonces f es continua en K.*

[2] Por convención $z^0 = 1$ para todo z, aún abusando de la notación, cuando $z = 0$.

Teorema 4.3.5. Convergencia uniforme e integración. *Si para todo $n \geq 0$ la función f_n es continua en K, y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en K, entonces*

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_\gamma f_n(z)\, dz \right)$$

para cualquier curva C^1 a trozos contenida en K.

5. Funciones analíticas y teoría del índice.

5.1. *Definición y derivabilidad infinita de las funciones analíticas.*

Sea Ω un abierto no vacío del plano complejo.

Definición 5.1.1. $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice *analítica en el punto* $z_0 \in \Omega$ si existe un disco $D_R(z_0)$, con $R > 0$ tal que:

$$\text{Para todo } z \in D_R(z_0) \cap \Omega : \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

[3] donde la serie de la derecha es convergente puntualmente para todo z fijo en $D_R(z_0)$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0)$ se llama *desarrollo en serie de potencias* centrado en z_0 de la función $f(z)$.

Definición 5.1.2. $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice *analítica en* Ω si es analítica en z_0 para todo $z_0 \in \Omega$.

Nota 5.1.3. En 6.3.5 probaremos que si f es analítica en $z_0 \in \Omega$ entonces también es analítica en todo los puntos del disco $D_R(z_0)$ de la definición 5.1.1.

Nota 5.1.4. De las definiciones anteriores, y de las propiedades de que la suma de series convergentes es la serie convergente de la sumas, y el producto de una serie convergente por una constante k es la serie convergente del producto de cada término por k, se deduce lo siguiente:

Si f y g son analíticas en Ω entonces $f + g$ y kf también lo son.

Nota 5.1.5. En 8.2.5 probaremos lo siguiente:

Si f es analítica en z_0 y si $D_R(z_0)$ es un disco como en la definición 5.1.1, entonces:

a) Si $D_R(z_0)$ no está contenido en Ω, entonces se puede extender f analíticamente a $\Omega_1 = \Omega \cup D_R(z_0)$ como la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ \forall z \in D_R(z_0)$.

b) Si $D_R(z_0)$ está contenido en Ω el radio R puede elegirse por lo menos igual a la distancia de z_0 al complemento de Ω.

Teorema 5.1.6. Derivabilidad infinita de las funciones analíticas.
Convergencia uniforme y absoluta en compactos de las series de potencias.
Relación entre coeficientes del desarrollo y derivadas de la función.

Sea f analítica en z_0.

Denotamos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z) \quad \forall z \in D_R(z_0)$ *donde* $R > 0$ [4]

Se cumple:

a) $f \in H(D_R(z_0))$, f' *es analítica en* z_0, *y* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \forall z \in D_R(z_0)$.

b) Existen en $D_R(z_0)$ derivadas $f^{(k)}(z)$ (respecto de z) de orden k, para todo natural $k \geq 1$. Es decir, para todo $k \geq 0$, la derivada k-ésima $f^{(k)}$ es holomorfa en $D_R(z_0)$.

c) f es C^∞ en $D_R(z_0)$.

---

[3] Por convención $z^0 = 1$ para todo z, aún abusando de la notación, cuando $z = 0$.

[4] La notación $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z) \quad \forall z \in D_R(z_0)$ resume dos afirmaciones. La primera es que la serie de potencias converge para todo $z \in D_R(z_0)$, aunque z no esté contenido en el conjunto Ω donde la función dada f estaba definida.

La segunda es que a la suma de la serie de potencias se la llama $f(z)$ para todo $z \in D_R(z_0)$, aunque z no esté contenido en Ω, y coincide con el valor de la función dada si $z \in D_R(z_0) \cap \Omega$.

d) Se verifica la siguiente relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de f centrado en $z_0 \in \Omega$ y la derivada n- ésima de f en z_0:

$$a_0 = f(z_0), \;\; a_1 = f'(z_0), \;\; a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \;\; \forall n \geq 0$$

e) Para todo conjunto compacto K tal que $K \subset D_R(z_0)$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z)$ converge uniformemente y absolutamente en K.

Demostración:

Prueba de e): Sea $\alpha = \max_{z \in K} |z - z_0|$. Siendo K compacto este máximo existe, se alcanza en algún(os) punto(s) que llamo $z_1 \in K \subset D_R(z_0)$. Entonces $0 \leq \alpha = |z_1 - z_0| < R$. Elijamos un número real r tal que $0 \leq \alpha < r < R$. Se tiene

$$0 \leq \frac{\alpha}{r} < 1, \quad 0 < r < R \qquad (1)$$

Por hipótesis la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge para todo $z \in D_R(z_0)$, en particular converge para $z = r + 0i$, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge. Luego $\lim_{n \to \infty} a_n r^n = 0$, de donde, para alguna constante k se cumple

$$0 \leq |a_n| r^n \leq k \quad \forall\, n \geq 0, \quad (2)$$

Acotemos ahora el término general de la serie de potencias centrada en z_0 para todo $z \in K$:

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| r^n \left(\frac{|(z - z_0)|}{r} \right)^n \leq k \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n = A_n \text{ independiente de n} \quad \forall z \in K$$

Además la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{es convergente}$$
porque es una serie geométrica de razón α / r y por (1) esta razón es no negativa y menor que 1.

Aplicando ahora el criterio de la mayorante de Weierstrass, se deduce que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente y absolutamente en K, y queda demostrada la parte e).

Nota: Observamos además que aplicando el teorema de convergencia uniforme y continuidad, f es continua en K para todo compacto $K \subset D_R(z_0)$, en particular para $K = \{z\}$ siendo $z \in D_R(z_0)$. Se deduce que f es continua en $D_R(z_0)$.

Prueba de a): Consideremos la serie formal (no sabemos aún si es convergente) que tiene como término general la derivada de $a_n(z - z_0)^n$. Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Afirmación i). Para todo conjunto compacto $K \subset D_R(z_0)$ la serie formal de las derivadas converge uniformemente en K.

Prueba de la afirmación i): Usamos la misma notación que en la demostración de la parte e), hasta la igualdad (2) incluida. Acotemos el término general de la serie formal de las derivadas:

$$|na_n(z-z_0)^{n-1}| = n\frac{|a_n|r^n}{r}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^{n-1} \leq \frac{kn}{r}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{n-1} = B_n \text{ independiente de n} \quad \forall z \in K$$

Además la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \quad \text{es convergente}$$

porque $\lim_{n\to\infty} B_{n+1}/B_n = \lim_{n\to\infty}((n+1)/n)\cdot(\alpha/r) = \alpha/r < 1$ y por (1) este cociente es no negativo y menor que 1.

Aplicando ahora el criterio de la mayorante de Weierstrass, se deduce que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ converge uniformemente en K y queda demostrada la afirmación i).

De la afirmación i), se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ converge puntualmente para todo $z \in D_R(z_0)$, porque para cada z fijo en $D_R(z_0)$ el conjunto $\{z\}$ es compacto contenido en $D_R(z_0)$. Llamemos $g(z)$ a la suma de la serie de las derivadas. Es decir:

$$\forall\ z \in D_R(z_0),\ \ g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n$$

Por definición de analiticidad en un punto, la afirmación anterior dice que

$$g \text{ es analítica en } z_0, \quad g(z_0) = a_1 \qquad (3)$$

Afirmación ii) f es derivable y $f'(z) = g(z)$ para todo $z \in D_R(z_0)$.

Prueba de la afirmación ii):

Consideremos un punto cualquiera $z_1 \in D_R(z_0)$ y una curva cualquiera contenida en $D_R(z_0)$ y que una z_0 con z_1. Por el teorema de convergencia uniforme e integración se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma na_n(z-z_0)^{n-1}\,dz = \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}\,dz$$

Observamos que la integral a la izquierda se puede calcular explícitamente aplicando la regla de Barrow porque $(z-z_0)^{n-1}$ tiene primitiva en $\mathbb{C}$ que es $(z-z_0)^n/n$. Por otro lado la serie a la derecha es convergente a $g(z)$. Se deduce:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n = \int_\gamma g(z)dz$$

Por hipótesis la suma de la izquierda es $f(z_1) - a_0 = f(z_1) - f(z_0)$. Concluimos que

$$f(z_1) - f(z_0) = \int_\gamma g(z)\,dz$$

para todo punto $z_1 \in D_R(z_0)$ y para toda curva $\gamma \subset D_R(z_0)$ que una z_0 con z_1. Por el teorema fundamental del cálculo (parte a) del teorema 4.2.9 usando $D_R(z_0)$ en el lugar de Ω), se deduce que f es un primitiva de g en $D_R(z_0)$ Es decir, existe $f'(z)$ y $f'(z) = g(z)$ para todo $z \in D_R(z_0)$. Queda probada la afirmación ii).

De la afirmación ii) y de (3) deducimos que f es derivable en $D_R(z_0)$, y que su derivada $f' = g$ es analítica en z_0. Queda probada la parte a).

Observamos que además hemos demostrado lo siguiente:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \ \ \forall\, z \in D_R(z_0) \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \ \ \forall\, z \in D_R(z_1) \tag{4}$$

Parte b) Por inducción completa: si $f^{(k-1)}$ es holomorfa en $D_R(z_0)$ y $f^{(k)}$ es analítica en z_0 entonces, por lo demostrado en la parte a), aplicado a $f^{(k)}$ en vez de a f se deduce que $f^{(k)}$ es holomorfa en $D_R(z_0)$ y $f^{(k+1)}$ es analítica en z_0. Por lo tanto para todo $n \geq 0$ la derivada n-ésima de f es analítica en z_0 y holomorfa en $D_R(z_0)$. Queda probada la parte b).

Parte c) La derivada primera f' tiene partes real e imaginaria que son las derivadas parciales de u y v respecto de x e y (Las cuatro derivadas parciales aparecen ya sean como parte real o imaginaria de f'.) Por la parte b) f' es holomorfa, luego es continua, de donde sus partes real e imaginaria son continuas; luego las derivadas parciales de u y v son continuas, y por definición f es C^1. El mismo razonamiento puede aplicarse partiendo de la derivada $k-1$-ésima de f en vez de f, para deducir que las derivadas parciales k- ésimas de u y v son continuas para cualquier $k \geq 1$. Entonces por definición f es C^∞.

Parte d) De (4) se deduce que $f(z_0) = a_0$ y $f'(z_0) = a_1$. Además se deduce, aplicando (4) a f' en vez de a f, que

$$\forall z \in D_R(z_0), \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(z - z_0)^{n-2}$$

Luego $f''(z_0) = 2a_2$. Por inducción completa se obtiene para todo $k \geq 1$:

$$\forall z \in D_R(z_0), \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n(z - z_0)^{n-k} \tag{5}$$

En efecto, basta suponer que la igualdad anterior es cierta para algún valor de k y demostrarla para el siguiente $k+1$ usando la afirmación (4) aplicada a $f^{(k)}$ en vez de a f.

Sustituyendo en (5) $z = z_0$ se obtiene $f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$, y queda probada la parte d). $\square$

Nota 5.1.7. Radio de convergencia y fórmula de la raíz n-ésima.

Usando el criterio de la raíz para la convergencia de series de términos positivos, aplicado la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z-z_0|^n$, se deduce que esta converge para $|z-z_0| = r$ si $r < 1/(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})$ y no converge si $r > 1/(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})$.

Se deduce que el máximo R tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente para todo $z \in D_R(z_0)$ es $R = 1/(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})$.

Por la parte e) del teorema 5.1.6 la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge para cierto $z \in D_R(z_0)$ si y solo si converge absolutamente para ese $z \in D_R(z_0)$. Luego, obtenemos el siguiente resultado:

El máximo R tal que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{converge } \ \forall\, z \in D_R(z_0)$$

es

$$R = 1/(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})$$

Este R se llama *radio de convergencia* de la serie de potencias, y al disco abierto $D_R(z_0)$ se lo denomina *disco de convergencia* de la serie de potencias.

(Por convención, si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ se dice que $R = +\infty$ y $D_R(z_0) = \mathbb{C}$).

5.2. *Principio de prolongación analítica.*

Teorema 5.2.1. *Sea f analítica en Ω, donde Ω es abierto conexo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) $f(z) = 0 \ \ \forall\, z \in \Omega$.

b) Para algún $z_0 \in \Omega$, se cumple $f^{(k)}(z_0) = 0 \ \ \forall k \geq 0$.

c) Existe una sucesión de puntos $z_n \in \Omega$ que converge $z_n \to z_0 \in \Omega$, tal que para todo $n \geq 1$, $z_n \neq z_0$ y $f(z_n) = 0$.

Nota: La afirmación c) se expresa también diciendo que: *Existe un punto de acumulación $z_0 \in \Omega$ del conjunto donde se anula f.*

Demostración: Probaremos que a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a).

Prueba de a) $\Rightarrow$ b) Basta tomar cualquier punto z_0 ya que si la función es idénticamente nula, todas sus derivadas son idénticamente nulas.

Prueba de b) $\Rightarrow$ c) Sea el desarrollo en serie de potencias de f centrado en z_0 en el disco $D_R(z_0)$ con $R > 0$ donde la serie es convergente:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j \quad \forall z \in D_R(z_0) \qquad (1)$$

Por el teorema 5.1.6 $a_j = f^{(j)}(z_0)/j!$. Luego, por hipótesis (afirmación b) $a_j = 0 \ \forall j \geq 0$ y obtenemos de (1) que

$$f(z) = 0 \ \ \forall\, z \in D_R(z_0)$$

Tomando cualquier sucesión $z_n \to z_0$ con $z_n \neq z_0$ en $D_R(z_0)$, por ejemplo $z_n = z_0 + R/(2n) \ \ \forall n \geq 1$, se verifica $f(z_n) = 0 \ \ \forall n \geq 1$, ya que $z_n \in D_R(z_0)$. Entonces se verifica la afirmación c) como queríamos probar.

Prueba de c) $\Rightarrow$ a) Sea Z el conjunto de los puntos donde se anula f.

Sea E el conjunto de los puntos de acumulación de Z en Ω, es decir E es el conjunto de todos los puntos $z_0 \in \Omega$ tales que existe una sucesión que cumple $z_n \to z_0$, $z_n \neq z_0$, $f(z_n) = 0$.

Si $z_0 \in E$ entonces $f(z_0) = \lim f(z_n) = 0$, porque f es continua, y porque $f(z_n) = 0 \forall n \geq 1$. Se deduce que $E \subset Z$.

Sea $H = \Omega \setminus E$. Como $E \subset Z$, se deduce que H contiene todos los puntos de Ω donde f no se anula.

Basta probar que E y H son abiertos, pues como Ω es conexo, uno de los dos, o bien E o bien H será vacío. Como por hipótesis (afirmación c) E no es vacío, se deduce que H lo es. Luego, es vacío el conjunto de puntos donde f no se anula, y se concluye que $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$, y es cierta la afirmación a) como se quería probar.

Prueba de que H es abierto: Los puntos de H se clasifican en dos tipos: aquellos puntos z_0 tales que $f(z_0) \neq 0$, y aquellos puntos z_0 tales que $f(z_0) = 0$ pero z_0 no es punto de acumulación de Z.

Para probar que H es abierto hay que probar que dado cualquier $z_0 \in H$ existe un entorno de z_0 contenido en H.

Primer caso) $z_0 \in H,\ f(z_0) \neq 0$. Como f es continua, existe un entorno de z_0 donde f no se anula. Entonces ese entorno está contenido en H, como queríamos probar.

Segundo caso) $z_0 \in H,\ f(z_0) = 0$ pero z_0 no es punto de acumulación de Z.

Afirmación 1. En las hipótesis del segundo caso, existe $D_R(z_0)$ tal que $z \in D_R(z_0),\ z \neq z_0 \ \Rightarrow\ f(z) \neq 0$.

Para probar que H es abierto, basta probar la afirmación anterior, pues ella implica que existe $D_R(z_0) \subset H$.

Prueba de la afirmación 1.: Por absurdo, supongamos que para todo $D_R(z_0)$ existe $z \in D_R(z_0),\quad z \neq z_0,\quad f(z) = 0$ entonces en particular para $R = 1/n$ existe $z_n \in D_{1/n}(z_0),\ z_n \neq z_0,\ f(z_n) = 0$. Como $|z_n - z_0| < 1/n$ se cumple $z_n \to z_0$. Luego z_0 es punto de acumulación de Z, contradiciendo la hipótesis de la afirmación 1.

Hemos terminado de probar que H es abierto.

Prueba de que E es abierto: Sea el desarrollo en serie de potencias de f centrado en z_0:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad (1)$$

Afirmación 2. Si $z_0 \in E$ entonces los coeficientes del desarrollo (1) cumplen: $a_j = 0 \quad \forall j \geq 0$.

Prueba: Supongamos por absurdo que no todos los a_j son nulos. Sea a_k el primer coeficiente no nulo. Tenemos

$$a_k \neq 0$$

Por (1), dividiendo entre $(z - z_0)^k$ para $z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, se obtiene:

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = g(z) \quad \forall\, z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\} \quad \text{donde} \qquad (2)$$

$$g(z) = \sum_{j=k} a_j (z - z_0)^{j-k} \quad \forall\, z \in D_R(z_0) \quad (3)$$

Aplicando la definición de función analítica en un punto, de (3) se deduce que g es analítica en z_0, luego es holomorfa en $D_R(z_0)$, y por lo tanto continua, en particular en $z = z_0$. Luego tomando límite en (2) cuando $z \to z_0$ se deduce que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = g(z_0) = a_k \quad (4)$$

Pero por hipótesis $z_0 \in E$. Tomemos la sucesión $z_n \to z_0$, $z_n \neq z_0$, tal que $f(z_n) = 0 \; \forall n \geq 1$. Se cumple

$$z_n \to z_0, \quad ; \lim \frac{f(z_n)}{(z_n - z_0)^k} = \lim_{n \to \infty} 0 = 0 \quad (5)$$

De (4) y (5) se concluye que $a_k = 0$ contradiciendo nuestra elección del coeficiente a_k.

Hemos terminado de probar la afirmación 2.

De la afirmación 2 deducimos que si $z_0 \in E$ entonces $f(z) = 0 \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad (6)$.

Afirmación 3. Si $z_0 \in E$ y $D_R(z_0)$ cumple (6), entonces $D_R(z_0) \subset E$.

Prueba: Fijemos $w_0 \in D_R(z_0)$. Basta probar que $w_0 \in E$. Sea $m = R - |w_0 - z_0| > 0$. La sucesión $w_n = w_0 + m/(2n) \quad \forall n \geq 1$ cumple que $w_n \to w_0$, $w_n \neq w_0$, y $|w_n - w_0| = m/(2n) < m \leq R$, luego $w_n \in D_R(w_0)$, de donde $f(w_n) = 0$. Entonces $w_0 \in E$. Hemos probado la afirmación 3.

De la afirmación 3 se deduce que E es abierto. $\square$

Corolario 5.2.2. *Si una función f analítica no es idénticamente nula en una región Ω entonces sus ceros (i.e. puntos donde se anula f) son aislados.*

Dicho de otra manera, cada punto z_0 tal que $f(z_0) = 0$ está contenido en algún entorno $D_R(z_0)$ que no contiene otros ceros de f más que z_0.

Demostración: Por absurdo, si hubiera algún cero z_0 no aislado, entonces para todo entorno $D_r(z_0)$ habría algún punto diferente de z_0 donde se anula f. En particular tomando $r = 1/n$, existe z_n tal que $|z_n - z_0| < 1/n$, $z_n \neq z_0$, $f(z_n) = 0$. Luego z_0 es punto de acumulación del conjunto donde se anula f. Por el teorema 5.2.1 esto implica que f es idénticamente nula, contradiciendo la hipótesis de este corolario. $\square$

Corolario 5.2.3. *Si dos funciones analíticas en la región Ω coinciden en un conjunto con un punto de acumulación en Ω entonces ambas coinciden en todo punto de Ω.*

Demostración: Basta aplicar el teorema 5.2.1 a la función $f - g$. $\square$

5.3. *Construcción de funciones analíticas mediante integración.*

Teorema 5.3.1. Funciones analíticas construidas mediante integrales.

Hipótesis) *Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función continua. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva. Se define para cada $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ fijo, el valor complejo $g(z_0)$ dado por la integral siguiente:*

$$g(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

Tesis) *$g(z_0)$ como función de z_0 es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

Además la derivada n- ésima de g está dada para todo $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ por la siguiente fórmula integral:

$$g^{(n)}(z_0) = n! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

Demostración:

Para demostrar que g es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, por definición, hay que probar que para cada z_0 fijo que no pertenezca a γ^* existe un disco $D_R(z_0)$, con $R > 0$ tal que para todo $w \in D_R(z_0)$ la función $g(w)$ está definida y tiene un desarrollo en series de potencias de $(w - z_0)$.

Entonces sea fijo $z_0 \notin \gamma^*$. Sea $R = dist(z_0, \gamma^*) = \text{mín}_{z\in\gamma^*} |z - z_0| > 0$. Existe ese mínimo porque γ^* es compacto, y es estrictamente positivo porque si fuera cero entonces z pertenecería a γ^*. Tenemos que $|z - z_0| \geq R \;\; \forall z \in \gamma^*$, luego:

$$\frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{R}, \quad \forall z \in \gamma^* \qquad (1)$$

Sea (también fijo) un punto $w \in D_R(z_0)$, es decir $|w - z_0| < R$. Tenemos:

$$\frac{|w - z_0|}{R} < 1 \qquad (2)$$

Por construcción de R y de w se verifica $|w - z_0| < R \leq |z - z_0|, \;\; \forall z \in \gamma^*$. Por lo tanto $w \notin \gamma^*$, y entonces la función g está definida en el punto w. Por definición de la función g tenemos:

$$g(w) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\, dz \qquad (3)$$

Descompongamos el integrando:

$$\frac{f(z)}{z - w} = \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - (w - z_0)/(z - z_0)}$$

y llamemos $u = (w - z_0)/(z - z_0)$. De las desigualdades (1) y (2) se deduce que $|u| < 1$. Por otra parte, recordemos la serie geométrica de razón u: Si $|u| < 1$ se cumple $1/(1 - u) = \sum_{n=0}^\infty u^n$. Entonces el integrando de (3) queda:

$$\frac{f(z)}{z - w} = \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{w - z_0}{z - z_0}\right)^n$$

Observamos que para sumar esta serie puntualmente para cada $z \in \gamma^*$, z está fijo, y por lo tanto el factor $f(z)/(z - z_0)$ puede pasarse para dentro del símbolo de sumatoria. Sustituyendo en (3) resulta:

$$g(w) = \int_\gamma \sum_{n=0}^\infty \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \left(\frac{w - z_0}{z - z_0}\right)^n dz \qquad (4)$$

Ahora veamos que la serie dentro de la integral anterior, converge uniformemente en $z \in \gamma^*$ (recordar que z_0 y w están fijos), para poder aplicar el teorema de convergencia uniforme e integración que asegura que se puede sacar el símbolo de sumatoria de la serie para afuera de la integral.

Primero acotemos el término general de la serie. Llamando M al máximo de $|f(z)|$ para $z \in \gamma^*$ y usando la desigualdad (1) se tiene:

$$\left| \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n \right| \leq \frac{M}{R} \cdot \left(\frac{|w - z_0|}{R} \right)^n = A_n \quad \text{independiente de } z \quad \forall\, z \in \gamma^*$$

Por otra parte $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge porque es una serie geométrica de razón $|w - z_0|/R < 1$. Luego, aplicando el criterio de la mayorante de Weierstrass se deduce que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n \quad \text{C.U. para } z \in \gamma^*$$

Aplicamos ahora el teorema de convergencia uniforme e integración a la igualdad (4):

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} (w - z_0)^n \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

Llamando

$$a_n = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

se tiene:

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n \quad \forall w \in D_R(z_0)$$

lo que termina de probar que g es analítica. Además teniendo en cuenta la relación entre la derivada n-ésima en z_0 y los coeficientes del desarrollo en serie de potencias centrado en z_0, de cualquier función analítica, se deduce:

$$g^{(n)}(z_0) = n!\, a_n = n! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \;\; \square$$

5.4. *Teoría del índice.*

Definición 5.4.1. Índice de una curva cerrada.

Dada una curva cerrada cualquiera $\gamma : z = z(t), t \in [a, b]$ orientada para t creciente, y dado un punto $z_0 \notin \gamma$, se llama *índice de* γ *en el punto* z_0, y se denota $Ind_\gamma(z_0)$, a *la cantidad entera* k *neta de vueltas que da* γ *alrededor de* z_0.

La *cantidad entera* k *neta de vueltas que da* γ *alrededor de* z_0 se define mediante la siguiente construcción:

El vector $z(t) - z_0$ varía continuamente con t cuando el parámetro real t de la curva γ varía en el intervalo $[a, b]$.

Ese vector $z(t) - z_0$ nunca se anula porque $z_0 \notin \gamma$. Entonces define la semirrecta con extremo en z_0 que pasa por $z(t)$, llamada dirección del vector $z(t) - z_0$.

Al variar $t \in [a, b]$ esa dirección sufre giro con centro en z_0 y ángulo $\alpha(t)$ (medido en radianes, positivamente si es en sentido antihorario y negativamente si es en sentido horario), con respecto a la dirección inicial $z(a) - z_0$ (es decir considerando $\alpha(0) = 0$).

El *ángulo de giro neto* al final del recorrido de la curva es por definición $\alpha(b)$.

Como $z(b) = z(a)$, la dirección final $z(b) - z_0$ es igual a la inicial $z(a) - z_0$. Entonces el ángulo de giro neto es un múltiplo entero de 2π, es decir $\alpha(b) = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

El entero k así construido se llama *cantidad neta de vueltas de γ alrededor de z_0 o $Ind_\gamma(z_0)$, Índice de γ en z_0.*

Teorema 5.4.2. Teorema del índice.

Sea γ una curva cerrada cualquiera C^1 a trozos. Para todo $z_0 \notin \gamma$ se cumple:

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Demostración: Se puede hacer una prueba, computando la integral, usando una rama del logaritmo complejo en el conjunto simplemente conexo que se obtiene del plano complejo retirando una semirrecta S adecuada que pasa por z_0, y contando la cantidad de veces que la curva γ atraviesa esta semirrecta S (donde la rama del logaritmo complejo es discontinua) en sentido antihorario y en sentido horario. (Ver sección 3.1, ejercicio 3.1.13)

Sin embargo, presentaremos esta otra prueba que no requiere el estudio de las ramas del logaritmo complejo:

Sea $z = z(t) : t \in [a, b]$ una parametrización de clase C^1 a trozos de la curva γ. Definimos, para la variable real t

$$w(t) = \int_a^t \frac{\dot{z}(t)}{z(t) - z_0}\, dt$$

Por construcción

$$w(b) = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Por lo tanto el objetivo consiste en demostrar que $w(b) = Ind_\gamma(z_0) 2\pi i$.

Por construcción $w(a) = 0$.

Por el teorema fundamental del cálculo para funciones de variable real, se tiene que $w(t)$ es derivable respecto de t y por lo tanto continua, y que su derivada es:

$$\dot{w}(t) = \frac{\dot{z}(t)}{z(t) - z_0}$$

Entonces

$$\left(e^{-w(t)}(z(t) - z_0)\right)^{\cdot} = e^{-w(t)}\left[\dot{w}(t)(z(t) - z_0) - \dot{z}(t)\right] = 0 \quad \forall\, t \in [a, b]]$$

Entonces $e^{-w(t)}(z(t) - z_0)$ es constante para todo t, igual a su valor para $t = b$ y para $t = a$:

$$e^{-w(b)}(z(b) - z_0) = e^{-w(t)}(z(t) - z_0) = e^{-w(a)}(z(a) - z_0) \quad \forall t \in [a, b]$$

Como la curva es cerrada $z(b) = z(a)$. Además por construcción $w(a) = 0$. Entonces:

$$e^{-w(b)}(z(a) - z_0) = e^{-w(t)}(z(t) - z_0) = (z(a) - z_0) \quad \forall t \in [a, b]$$

Dividiendo entre $z(a) - z_0$ y luego multiplicando por $e^{w(t)}$ se deduce:

$$e^{-w(b)} = 1, \qquad \frac{z(t) - z_0}{z(a) - z_0} = e^{w(t)} \quad \forall t \in [a, b] \qquad (1)$$

Recordemos que $|e^u| = e^{Re\,u}$. Tomamos módulo en la primera igualdad de (1) y deducimos:

$$1 = e^{-Re\,w(b)} \Rightarrow Re\,w(b) = 0 \Rightarrow w(b) = iIm\,w(b) \Rightarrow Im\,w(b) = w(b)/i$$

Ahora, recordando que $arg\,(e^u) = \{Im\,u + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ tomando argumento en la segunda igualdad de (1) se obtiene:

$$Im\,w(t) \in arg\,\left(\frac{z(t) - z_0}{z(a) - z_0}\right) = arg\,(z(t) - z_0) - arg\,(z(a) - z_0) \quad \forall t \in [a, b]$$

Entonces $Im\,w(t)$, que varía continuamente con t y cumple $w(a) = 0$, es el ángulo de giro $\alpha(t)$ de la dirección del vector $z(t) - z_0$ en relación a la dirección inicial $z(a) - z_0$. Por definición de índice

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{\alpha(b)}{2\pi} = \frac{Im\,w(b)}{2\pi} = \frac{w(b)}{2\pi i} \quad \Rightarrow \quad w(b) = Ind_\gamma(z_0) \cdot 2\pi i \quad \square$$

Teorema 5.4.3. Propiedades del índice.

Para toda curva cerrada γ el índice $Ind\gamma(z_0)$ definido para todo $z_0 \notin \gamma^*$ cumple:
a) Es un número entero constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
b) Es cero en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Demostración:

a) Dejemos fija la curva cerrada γ, y tomemos $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Por definición de Índice, $Ind_\gamma(z_0)$ es un número entero para todo $z_0 \notin \gamma^*$.

Por el teorema del índice y el teorema de analiticidad de las funciones construidas mediante integración (teorema 5.3.1), se deduce que $Ind_\gamma(z_0)$, es una función analítica como función de $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, y que para todo $z_0 \notin \gamma$:

$$Ind_\gamma\,'\,(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)^2}\,dz$$

Pero la integral de la derecha es cero por la Regla de Barrow, porque γ es una curva cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ y en ese abierto el integrando $(z - z_0)^{-2}$ tiene como primitiva $-(z - z_0)^{-1}$.

Entonces la función Ind_γ tiene derivada idénticamente nula en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Por el corolario de la Regla de Barrow, es constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, como enuncia la tesis a).

b) Sea R la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ y llamemos k al valor constante de $Ind_\gamma(w)$ para todo $w \in R$.

Como R es no acotado, existe una sucesión $z_n \in R$ tal que $|z_n| \to \infty$. Denotemos con $d_n = \min_{z \in \gamma^*} |z - z_n|$ (es decir, d_n es la distancia del punto z_n a la curva γ^*).

Se cumple:

$$\lim_{n \to \infty} d_n = \infty$$

$$\forall\, z \in \gamma^*, \quad |z - z_n| \geq d_n, \quad \frac{1}{|z - z_n|} \leq \frac{1}{d_n}$$

Por el teorema del índice, se deduce:

$$\forall\, n \geq 0, \quad k = Ind_\gamma(z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_n}\,dz$$

Llamando L a la longitud de la curva γ, y aplicando el teorema de acotación de integrales, se obtiene:

$$\forall\, n \geq 0, \quad |k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{|z - z_n|}\, |dz| \leq \frac{1}{2\pi d_n} \int_{\gamma} ds = \frac{L}{2\pi d_n} \rightarrow_{n\to\infty} 0$$

Luego $k = 0$ como queríamos demostrar. $\square$

Nota 5.4.4. Relación entre homotopía e índice. La siguiente propiedad distingue a las curvas cerradas homotópicas a un punto en Ω:

Si una curva cerrada C^1 a trozos $\gamma \subset \Omega$ es homotópica a un punto en Ω entonces para todo $z_0 \notin \Omega$ se cumple $Ind_{\gamma}(z_0) = 0$.

Demostraremos esa condición necesaria en 7.1.3. Advertimos que no es condición suficiente.

6. Teoría de Cauchy local.

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se denota con $R \subset \Omega$ a un rectángulo contenido en Ω. R indica el conjunto de puntos que están, ya sea en el interior del rectángulo, ya sea en el borde del rectángulo. Se denota con ∂R al borde del rectángulo, como curva C^1 a trozos formado por cuatro segmentos que son los lados del rectángulos. Siempre que se denote ∂R se refiere al borde del rectángulo, orientado en sentido antihorario, y recorrido una sola vez.

6.1. *Sucesión de rectángulos encajados convergentes para acotar integrales.*

Lema 6.1.1. *Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función continua. Sea R_0 un rectángulo tal que $R_0 \subset \Omega$. Entonces, existe un rectángulo R_1, tal que:*

1) $R_1 \subset R_0$.

2) $|I_1| \geq |I_0|/4$, donde $I_j = \int_{\partial R_j} f(z)\,dz, \quad j = 0, 1$.

3) $P_1 = P_0/2$ y $D_1 = D_0/2$, donde P_j es el perímetro del rectángulo R_j, y D_j es la longitud de la diagonal del rectángulo R_j, para $j = 0, 1$.

Demostración: (Hágase un dibujo para seguir los razonamientos.)

Trazando los dos segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos del rectángulo R_0, dividimos a R_0 en cuatro rectángulos iguales $R_0 = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. El perímetro de cada $S_j, (j = 1, 2, 3, 4)$ es la mitad del perímetro de R_0. Además la diagonal de cada S_j es la mitad de la diagonal de R_0.

Consideramos las curvas ∂S_j, borde de S_j, orientada en sentido antihorario, para cada $j = 1, 2, 3, 4$. Al recorrer las cuatro curvas ∂S_j, los lados de cada ∂S_j que no están contenidos en ∂R_0 se cancelan, porque están recorridos en sentido opuesto en las curvas ∂S_k contiguas a ∂S_j.

Entonces tenemos:

$$I_0 = \int_{\partial R_0} f(z)\,dz = \int_{\partial S_1} f(z)\,dz + \int_{\partial S_2} f(z)\,dz + \int_{\partial S_3} f(z)\,dz + \int_{\partial S_4} f(z)\,dz$$

Aplicando la propiedad triangular del módulo, se tiene:

$$|I_0| \leq \left|\int_{\partial S_1} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial S_2} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial S_3} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial S_4} f(z)\,dz\right|$$

Por lo tanto $|I_0|$ es un número real menor o igual que la suma de 4 números reales. Entonces alguno de estos 4 números reales debe ser mayor o igual que $|I_0|/4$. (Pues si los 4 números fueran menores que $|I_0|/4$ su suma sería menor que $|I_0|$.) Si existe más de uno entre los 4 números reales que es mayor o igual que $|I_0|/4$ elijo uno. Llamo R_1 al rectángulo S_j correspondiente. Entonces:

$$\left|\int_{\partial R_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|I_0|}{4} \quad \square$$

Proposición 6.1.2. Construcción de rectángulos encajados convergentes para acotar integrales.

Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función continua. Sea R_0 un rectángulo tal que $R_0 \subset \Omega$. Entonces, existe una sucesión de rectángulos $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$, tal que:

1) $R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_{n-1} \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \ldots$.

2) $|I_0| \leq 4^n |I_n| \quad \forall\, n \geq 0$, *donde* $I_n = \int_{\partial R_n} f(z)\, dz$.
3) $P_n = P_0/2^n$ *y* $D_n = D_0/2^n$, *para todo* $n \geq 0$, *donde* P_n *es el perímetro del rectángulo* R_n, *y* D_n *es la longitud de la diagonal del rectángulo* R_n.
4) *Existe un punto* a *(independiente de* n*) tal que* $a \in R_n$ $\forall n \geq 0$. (Esto se escribe: $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n$.)

Demostración:
Construyamos R_n para todo $n \geq 0$, por inducción completa en n.
Para $n = 0$ aplicamos el lema 6.1.1 al rectángulo dado R_0, para construir R_1.
Para $n = h$, dado el rectángulo R_h, construimos el rectángulo R_{h+1} aplicando el lema 6.1.1, usando R_h en vez de R_0.
Entonces, por inducción tenemos para todo $n \geq 0$ un rectángulo R_n tal que:
1) $R_n \supset R_{n+1}$
2) $|I_{n+1}| \geq |I_n|/4$
3) $P_{n+1} = P_n/2$ y $D_{n+1} = D_n/2$
Luego:
1) $R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_{n-1} \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \ldots$
2) $|I_n| \geq |I_{n-1}|/4 \geq |I_{n-2}|/4^2 \geq |I_{n-3}|/4^3 \geq \ldots \geq |I_0|/4^n$. De donde $|I_0| \leq 4^n |I_n|$
3) $P_n = P_{n-1}/2 = P_{n-2}/2^2 = P_{n-3}/2^3 = \ldots = P_0/2^n$. Y análogamente para la longitud de la diagonal: $D_n = D_0/2^n$.
Solo resta probar que existe $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n$.
Sea z_n el centro del rectángulo R_n. Probemos que la sucesión z_n es de Cauchy:
Dado $\epsilon > 0$ elijamos N tal que la diagonal D_N del rectángulo R_N sea menor que ϵ. (Existe tal N porque $D_n = 1/2^n D_0 \to 0$ cuando $n \to +\infty$.)
Para todos $n, m \geq N$ los centros z_n, z_m de los rectángulos R_n y R_m están en R_N porque $R_n \subset R_N$ y $R_m \subset R_N$. Entonces la distancia entre ellos es menor o igual que la longitud de la diagonal de R_N. Tenemos así:

$$n, m \geq N \;\Rightarrow\; |z_n - z_m| \leq D_N < \epsilon$$

Luego, la sucesión z_n es de Cauchy. Tomemos parte real e imaginaria: $z_n = x_n + i y_n$. Las sucesiones de reales x_n e y_n son de Cauchy porque lo es z_n y porque $|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m|$, $|y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$. Como la recta real es completa, toda sucesión de Cauchy de reales es convergente. Luego, la sucesión $z_n = x_n + i y_n$ converge a un complejo que llamamos a.
Probemos que $a \in R_m \quad \forall m \geq 0$. Fijado $m \geq 0$, tomemos variable $n \geq m$. Tenemos que el centro z_n del rectángulo R_n está contenido en R_m porque $R_n \subset R_m$. Resumiendo:
$z_n \in R_m$ con m fijo para todo $n \geq m$.
$z_n \to a$ cuando $n \to +\infty$.
R_m es cerrado.
Entonces $a \in R_m$.
Como $a \in R_m$ para cualquier $m \geq 0$ se tiene $a \in \bigcap_{m=0}^{\infty} R_m$. $\square$

6.2. *Teoría de Cauchy-Goursat en rectángulos.*

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. En lo que sigue R es un rectángulo contenido en Ω y δR denota al borde de R orientado en sentido antihorario y recorrido una sola vez.

Teorema 6.2.1. Teorema de Cauchy local en rectángulos.
Sea $f \in H(\Omega)$. *Sea* R *un rectángulo contenido en* Ω. *Entonces*

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

Demostración: Llamemos $R_0 = R$ y construyamos la sucesión de rectángulos encajados convergentes $R_0 \supset R_1 \supset \ldots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \ldots$, de la proposición 6.1.2. Usamos la misma notación que en el enunciado de esa proposición. El objetivo es probar que $I_0 = 0$.

Como f es holomorfa en Ω, $R_0 \subset \Omega$ y $a \in R_0$, entonces f es derivable en a. Por lo tanto

$$\lim_{z \to a} \left| \frac{f(z) - f(z)}{z - a} - f'(a) \right| = 0$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - a| < \delta \;\Rightarrow\; \left| \frac{f(z) - f(z)}{z - a} - f'(a) \right| < \epsilon \qquad (1)$$

Tomemos un rectángulo R_n de la sucesión de rectángulos convergentes, con n fijo suficientemente grande tal que la longitud D_n de la diagonal de R_n sea menor que δ. (Esto es posible porque $D_n = D_0/2^n \to 0$ cuando $n \to +\infty$.) Para todo $z \in R_n$, como $a \in R_n$, se cumple $|z - a| \leq D_n < \delta$. Luego, por (1):

$$z \in R_n \;\Rightarrow\; \left| \frac{f(z) - f(z)}{z - a} - f'(a) \right| < \epsilon \qquad (2)$$

Ahora consideremos la integral:

$$J = \int_{\partial R_n} \big(f(z) - f(a) - (z - a) f'(a)\big)\, dz = \int_{\partial R_n} (z - a) \left(\frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) \right) dz \qquad (3)$$

(el integrando de la derecha en la igualdad anterior, debe interpretarse como 0 si $z = a$. Así definido el integrando es una función continua para todo $z \in \Omega$, incluso si $z = a$, y la integral de la derecha está definida).

Usando (2) y que $|z - a| \leq D_n \;\; \forall z \in R_n$, sustituimos en (3) y resulta:

$$|J| \leq \int_{\partial R_n} |z - a| \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) \right| |dz| \leq D_n \cdot \epsilon \int_{\partial R_n} |dz| = D_n P_n \cdot \epsilon$$

En las desigualdades anteriores hemos usado que $\int_{\partial R_n} |dz| = \int_{\partial R_n} ds =$ Longitud de la curva $\partial R_n = P_n$ donde s indica la abscisa curvilínea de la curva ∂R_n, y P_n denota el perímetro del rectángulo R_n.

Ahora aplicamos las afirmaciones en la parte 3) de la proposición 6.1.2 que dice que $D_n = D_0/2^n$ y $P_n = P_0/2^n$. Luego

$$|J| \leq \frac{D_0 P_0 \cdot \epsilon}{4^n} \qquad (4)$$

Por otra parte, conviniendo que $(z - a)^0 = 1$ tomamos la primera igualdad de (3) y resulta:

$$J = \int_{\partial R_n} f(z)\, dz - f(a) \int_{\partial R_n} (z - a)^0\, dz - f'(a) \int_{\partial R_n} (z - a)^1\, dz \qquad (5)$$

Recordando que $(z-a)^m$, para cualquier $m \geq 0$ fijo, tiene primitiva en todo el plano complejo que es $(z-a)^{m+1}/(m+1)$, se deduce por la regla de Barrow que su integral a lo largo de cualquier curva cerrada es cero. Entonces de (4) y (5) se obtiene:

$$J = \int_{\partial R_n} f(z)\,dz = I_n, \quad |I_n| \leq \frac{D_0 P_0 \cdot \epsilon}{4^n}$$

Y usando la parte 2) del enunciado de la proposición 6.1.2 se obtiene:

$$|I_0| \leq 4^n |I_n| \leq 4^n \frac{D_0 P_0 \cdot \epsilon}{4^n} = D_0 P_0 \cdot \epsilon$$

Como ϵ es arbitrario, haciendo $\epsilon \to 0$ se deduce que $|I_0| = 0$, luego $I_0 = 0$ como queríamos probar. □

Nota 6.2.2. Si se supone que $f \in H(\Omega)$ es además de clase C^1, entonces aplicando el Corolario 1 del Teorema de Green (ver párrafo 1.1.8), se obtiene la tesis del teorema de Cauchy local en un rectángulo, como se muestra en el ejercicio siguiente.

Sin embargo, el Teorema de Cauchy local que acabamos de demostrar no requiere la hipótesis de que f sea de clase C^1, como lo requiere el Teorema de Green.

Usando el Teorema de Cauchy local en un rectángulo, demostraremos en la sección 6.3 que toda función $f \in H(\Omega)$ es también de clase C^1. Y por eso es importante que en la demostración del Teorema de Cauchy local no se suponga que f es C^1.

Por ese motivo no se debe demostrar el Teorema de Cauchy local usando el corolario 1 del Teorema de Green. (Pero una vez que probemos en la sección 6.3 que toda función $f \in H(\Omega)$ es de clase C^1, entonces sí, se puede aplicar el Corolario 1 del Teorema de Green para ulteriores demostraciones y ejercicios.)

Ejercicio 6.2.3.

- **Parte a)** Demostrar que para toda función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ continua en Ω y para toda curva $\gamma \subset \Omega$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma v dx + u dy$$

  Por lo tanto la integración compleja a lo largo de una curva se traduce en la integración de dos campos reales, $(u, -v)$ y (v, u), a lo largo de la misma curva.

- **Parte b)** Demostrar que si f es holomorfa en Ω y de clase C^1, entonces los campos $(u, -v)$ y (v, u) cumplen las hipótesis del corolario 1 del teorema de Green (ver sección 1.1.8). Sugerencia: usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann (ver apéndice 2.1).

- **Parte c)** Deducir que si $f \in H(\Omega)$ es de clase C^1, entonces para toda curva cerrada γ homotópica a un punto en Ω se cumple:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

El siguiente teorema es una generalización del Teorema de Cauchy local en rectángulos, que en vez de pedir que f sea holomorfa en todo Ω, admite que haya un punto excepcional $z_0 \in \Omega$ donde f no es holomorfa (y hasta puede f no estar siquiera definida en z_0).

Teorema 6.2.4. Teorema de Cauchy-Goursat local en rectángulos.
Sea $z_0 \in \Omega$ y sea $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

Sea R un rectángulo contenido en Ω tal que su borde ∂R no pasa por z_0. Entonces

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

Demostración:
1er. caso) $z_0 \notin \operatorname{int} R$, donde $\operatorname{int} R$ indica el interior de R, o sea $R \setminus \partial R$.

Considerando el abierto $\Omega_1 = \Omega \setminus \{z_0\}$, por hipótesis $f \in H(\Omega_1)$ y $R \subset \Omega_1$. Aplicando el teorema de Cauchy local en rectángulos, resulta $\int_{\partial R} f(z)\, dz$ como queríamos demostrar.

2do caso) $z_0 \in \operatorname{int} R$. Hágase un dibujo. El punto z_0 es interior al rectángulo R.

Por hipótesis, como $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |(z - z_0) f(z)| < \epsilon \quad (1)$$

Elijamos un cuadrado Q (que depende del valor de ϵ dado) con centro en z_0, lados paralelos a los lados de R, diagonal D menor que δ, y que esté contenido en R. Denotemos con ∂Q el borde del cuadrado recorrido una sola vez en sentido antihorario.

Para todo $z \in \partial Q$ se cumple $0 < |z - z_0| \leq D < \delta$. De esto y de (1) se deduce:

$$z \in \partial Q \;\Rightarrow\; |(z - z_0) f(z)| < \epsilon \quad (2)$$

Calculemos la integral de f a lo largo de ∂Q:

$$\int_{\partial Q} f(z)\, dz = \int_{\partial Q} \frac{(z - z_0) f(z)}{z - z_0}\, dz \quad (3)$$

Denotemos con L la longitud del lado de Q. El perímetro de Q, que es igual a la longitud de ∂Q, es $4L$. La distancia de un punto $z \in \partial Q$ al centro z_0 de Q es $|z - z_0| \geq L/2 \quad \forall\, z \in \partial Q$. Luego sustituyendo en (3) y usando (2) queda:

$$|\int_{\partial Q} f(z)\, dz| \leq \int_{\partial Q} \frac{|(z - z_0) f(z)|}{|z - z_0|} |dz| \leq \frac{\epsilon}{L/2} \int_{\partial Q} ds = \frac{\epsilon}{L/2} \cdot 4L = 8 \cdot \epsilon \quad (4)$$

Si prolongamos dos lados paralelos de Q hasta cortar a los lados de R que son perpendiculares a ellos, el rectángulo R queda dividido en cinco rectángulos, de los cuales uno es el cuadrado Q. Tenemos $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup Q$. Orientando los bordes de cada uno de esos rectángulos en sentido antihorario, se cumple:

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = \int_{\partial R_1} f(z)\, dz + \int_{\partial R_2} f(z)\, dz + \int_{\partial R_3} f(z)\, dz + \int_{\partial R_4} f(z)\, dz + \int_{\partial Q} f(z)\, dz$$

Pero $z_0 \notin R_j$, para $j = 1,2,3,4$, y entonces, por lo probado en el primer caso, las primeras cuatro integrales del segundo miembro de la igualdad anterior son cero. Es decir $\int_{\partial R_j} f(z)\,dz = 0$ para $j = 1,2,3,4$. Resulta

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_{\partial Q} f(z)\,dz$$

y usando (4) se deduce que

$$|\int_{\partial R} f(z)\,dz| \leq 8 \cdot \epsilon$$

La desigualdad anterior vale para $\epsilon > 0$ arbitrario. Haciendo $\epsilon \to 0$ se deduce:

$$|\int_{\partial R} f(z)\,dz| = 0. \quad \square$$

Teorema 6.2.5. Fórmula integral de Cauchy local en rectángulos.

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea R un rectángulo contenido en Ω. Sea z_0 un punto en el interior de R. Sea ∂R el borde del rectángulo, recorrido una sola vez en sentido antihorario. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)$$

Demostración:

Sea g la siguiente función auxiliar definida en $\Omega \setminus \{z_0\}$:

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad \forall\, z \neq z_0, \;\; z \in \Omega$$

Se observa que $g(z)$ es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$ porque es cociente de dos funciones holomorfas, con el denominador que no se anula.

Además, como $f(z)$ es continua en z_0, se deduce:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) g(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) = 0$$

Por lo tanto g cumple las hipótesis del Teorema de Cauchy-Goursat local en un rectángulo, y se tiene:

$$\int_{\partial R} g(z) = 0$$

Luego

$$\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - f(z_0)\int_{\partial R} \frac{1}{z - z_0}\,dz = 0 \qquad (1)$$

Como z_0 pertenece al interior del rectángulo R y el borde ∂R del rectángulo está recorrido una sola vez en sentido antihorario, se tiene que $Ind_{\partial R}(z_0) = 1$. Por el teorema del índice: $Ind_{\partial R}(z_0) = (1/(2\pi i)) \int_{\partial R}(1/(z - z_0))\,dz$, de donde se deduce que:

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z - z_0}\,dz = 2\pi i$$

Sustituyendo en (1):

$$\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)\,2\pi i \qquad \square$$

6.3. *Analiticidad de las funciones holomorfas.*

Teorema 6.3.1. Analiticidad de las funciones holomorfas.
Toda función holomorfa es analítica y recíprocamente.

Nota 6.3.2. Debido al resultado del teorema 6.3.1 la notación $H(\Omega)$ indica el conjunto de todas las funciones analíticas en Ω, que es el mismo que el de todas las funciones holomorfas en Ω.

Demostraremos el teorema 6.3.1 junto al teorema siguiente:

Teorema 6.3.3. Fórmula integral de Cauchy local en rectángulos para las derivadas.
Sea $f \in H(\Omega)$. Sea R un rectángulo contenido en Ω. Sea z_0 un punto en el interior de R. Sea ∂R el borde del rectángulo, recorrido una sola vez en sentido antihorario. Entonces

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(z_0)$$

Demostración de los teoremas 6.3.1 y 6.3.3:
Sea $f \in H(\Omega)$. Para demostrar que f es analítica en Ω, por definición hay que probar que para cada $z_0 \in \Omega$, f es analítica en z_0.

Entonces fijemos $z_0 \in \Omega$, cualquiera pero fijo. Y después fijemos R rectángulo, cualquiera pero fijo, contenido en Ω que tenga a z_0 en su interior. Haremos un razonamiento (con construcciones que dependen del z_0 elegido y del rectángulo R elegido), con el objetivo de

$$\text{Probar que } f \text{ es analítica en } z_0 \text{ y } f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

Por la fórmula integral de Cauchy local en el rectángulo R se cumple:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-w}\,dz \qquad \forall\, w \in \operatorname{int} R \qquad (1)$$

Consideremos la función auxiliar g definida como sigue:

$$g(w) = \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-w}\,dz \qquad \forall\, w \in \mathbb{C}\setminus\partial R \qquad (2)$$

Por el teorema de construcción de funciones analíticas mediante integración (Teorema 5.3.1), se tiene

$$g(w) \text{ es analítica } \ \forall\, w \in \mathbb{C}\backslash\partial R \quad \text{y} \quad g^{(n)}(w) = n!\int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz \ \ \forall n \geq 0, \quad \forall\, w \in \mathbb{C}\backslash\partial R \qquad (3)$$

De (1) y (2) se deduce que $f(w) = (1/2\pi i)g(w) \quad \forall w \in \ \operatorname{int} R$. Entonces, aplicando (3) se deduce:

$$f(w) \text{ es analítica } \ \forall\, w \in \mathbb{C}\backslash\partial R \quad \text{y} \quad f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz \ \ \forall n \geq 0, \quad \forall w \in w \in \ \operatorname{int} R$$

En particular las afirmaciones anteriores se verifican para $w = z_0$ como queríamos demostrar. $\square$

Corolario 6.3.4. Derivabilidad infinita de las funciones holomorfas.

Toda función holomorfa en Ω cumple:

a) Existen en Ω derivadas $f^{(k)}(z)$ (respecto de z) de orden k, para todo natural $k \geq 1$. Para todo $k \geq 0$ la derivada $f^{(k)}$ es holomorfa (o lo que es lo mismo, analítica) en Ω.

b) f es C^∞ en Ω.

c) Se verifica la siguiente relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de potencias $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n = f(z) \quad \forall z \in D_R(z_0)$ y la derivada n- ésima de f en z_0:

$$a_0 = f(z_0), \quad a_1 = f'(z_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \quad \forall k \geq 0$$

d) Para todo conjunto compacto K tal que $K \subset D_R(z_0)$ la serie $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n = f(z)$ converge uniformemente en K.

Demostración: Es consecuencia inmediata del teorema de analiticidad de las funciones holomorfas (Teorema 6.3.1) y del teorema de derivabilidad infinita de las funciones analíticas (Teorema 5.1.6). $\square$

Corolario 6.3.5. *Si f es analítica en $z_0 \in \Omega$ entonces también es analítica en todos los puntos del disco $D_R(z_0)$ donde converge la serie de potencias de f centrada en z_0.*

Demostración: Por la parte a) del teorema 5.1.6 la función f es holomorfa en $D_R(z_0)$, luego, por el teorema de analiticidad de funciones holomorfas (teorema 6.3.1), f es analítica en todo punto $z \in D_R(z_0)$. $\square$

Corolario 6.3.6. Teorema de Cauchy-Goursat extendido.

Si $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\}$ cumple

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)f(z) = 0$$

entonces f puede extenderse holomórficamente a Ω y $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ para todo rectángulo R contenido en Ω.

Demostración: Sea $g(z) = (z-z_0)^2 f(z)$. Es holomorfa si $z \neq z_0$ porque es producto de funciones holomorfas en $\Omega \setminus \{z_0\}$. Afirmamos que g también es holomorfa en z_0 y $g'(z_0) = 0$. En efecto, calculando el cociente incremental de g en z_0:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)^2 f(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)f(z) = 0$$

Luego, el desarrollo en serie de potencias de g centrado en z_0 es, para algún disco $D_R(z_0) \subset \Omega$, con $R > 0$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0) \qquad (1)$$

Pero $g(z_0) = 0, \ \ g'(z_0) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ a_0 = 0, \ \ a_1 = 0$. Entonces, sustituyendo en (1) y dividiendo entre $(z-z_0)^2$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^2} = \sum_{n=2}^\infty a_n(z-z_0)^{n-2} \quad \forall z \in D_R(z_0)\ z \neq z_0 \qquad (2)$$

Definiendo $f(z_0) = a_2$ a partir de (2) se obtiene:

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2} \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad (3)$$

La afirmación (3) dice que la función f extendida a $z = z_0$ como $f(z_0) = a_2$, es analítica en z_0. Luego existe una extensión analítica (o lo que es lo mismo holomorfa) de la función f dada a todo Ω.

Aplicando el teorema de Cauchy local en rectángulos a la función f extendida, se deduce que $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ para todo rectángulo cerrado R contenido en Ω. $\square$

Corolario 6.3.7. *a) Si $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ es acotada en algún entorno de z_0 entonces se puede extender holomóficamente a Ω.*

b) Si $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ no se puede extender holomóficamente a Ω entonces $f(z)$ no es acotada en ningún entorno de z_0.

Demostración: Parte a) Si f es acotada en algún entorno de z_0 entonces

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

y f cumple las hipótesis del teorema de Cauchy-Goursat extendido (corolario 6.3.6), de donde se deduce que f tiene una extensión holomorfa a Ω.

Parte b) Es el contrarrecíproco de la parte a). $\square$

7. Teoría de Cauchy global.

7.1. *Teorema de Cauchy global.*

Sea un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Teorema 7.1.1. Teorema de Cauchy global.
Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

Demostración: De acuerdo al Corolario de derivabilidad infinita de las funciones holomorfas (parte b. del Corolario 6.3.4), toda función holomorfa es de clase C^1. Entonces se puede demostrar este teorema usando el Corolario 1 del Teorema de Green (párrafo 1.1.8) como se sugiere en el Ejercicio 6.2.3.

Sin embargo demostraremos el teorema de Cauchy global sin asumir conocido el teorema de Green:

Para seguir esta demostración hágase un dibujo [5].

Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω. Sea $\overline{R} = (R \cup \gamma^*) \subset \Omega$ el conjunto compacto (cerrado y acotado), recorrido por la homotopía $z = z_s(t)$ $t \in [a,b]$, $s \in [0,1]$ que deforma continuamente γ hasta transformarla en un punto. (Para fijar ideas considérese el abierto R como la unión de regiones acotadas que tienen su borde contenido en la curva γ y tómese $\overline{R} = R \cup \gamma^*$.)

Como $\overline{R}$ es compacto contenido en Ω, y la función f es analítica en cada punto de Ω, existe una cantidad finita k de (pequeños) discos D_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, centrados en puntos $z_i \in \overline{R}$, con radios positivos, tales que cubren $\overline{R}$ (es decir $\cup_{j=1}^k D_j \supset \overline{R}$), están contenidos en Ω, y además:

$$\forall\, z \in D_j: \quad f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_{n,j}\, (z - z_j)^n \quad (1)$$

Elegimos en cada disco D_j una curva cerrada $\gamma_j \subset D_j$ de tal forma que, al recorrer todas las curvas γ_j, se vaya recorriendo (de a pequeños trozos) toda la curva γ y además eventualmente otros arcos de las curvas γ_j que no están en γ y que se cancelan al estar recorridos en sentidos opuestos (es decir, arcos recorridos en un sentido en γ_j y que después serán recorridos en sentido opuesto en otras curvas γ_i contiguas a γ_j, con $i \neq j$). Para fijar ideas, se puede dibujar en $\overline{R}$ un cuadriculado con cuadraditos de lado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y tomar como curva γ_j la frontera de cada cuadradito intersectado con $\overline{R}$, orientado adecuadamente.

Por construcción:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(z)\, dz$$

Basta demostrar que para todo $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ la integral de $f(z)$ a lo largo de γ_j es cero.

Por construcción $\gamma_j^* \subset D_j$. Entonces usando (1) se deduce:

[5] La explicación resulta complicada debido a la dificultad que tengo para incluir un dibujo en estas notas. Si se hace un buen dibujo puede sustituirse la explicación por la frase: Sean las curvas γ_i como en la figura.

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int_{\gamma_j} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j}\,(z-z_j)^n\,dz$$

Por la parte e) del teorema 5.1.6 la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j}(z-z_j)^n$ converge uniformemente en γ^*. Entonces, aplicando el teorema de Convergencia Uniforme e integración, se deduce:

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_j} a_{n,j}\,(z-z_j)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j} \int_{\gamma_j} (z-z_j)^n\,dz$$

Pero $\int_{\gamma_j}(z-z_j)^n\,dz = 0$ por la Regla de Barrow, porque γ_j es cerrada y $(z-z_j)^{n+1}/(n+1)$ es una primitiva de $(z-z_j)^n$ en todo el plano complejo. Entonces deducimos que

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j} \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Corolario 7.1.2. Otra versión del teorema de Cauchy global. *Sea $f \in H(\Omega)$. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas en Ω, ambas con el mismo extremo inicial y con el mismo extremo final. Si γ_1 es homotópica a γ_2 en Ω, entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Demostración: Siendo γ_1 homotópica a γ_2 en Ω, la curva cerrada $\gamma_1 - \gamma_2$ es homotópica a un punto en Ω. Aplicando el Teorema de Cauchy global 7.1.1:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f(z)\,dz = 0 \quad \square$$

Corolario 7.1.3. Relación entre curvas homotópicas e índice. *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$.*

a) Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva cerrada. Si γ es homotópica a un punto en Ω, entonces $Ind_\gamma(z_0) = 0$ para todo $z_0 \notin \Omega$.

b) Sean γ_1 y γ_2 dos curvas contenidas en Ω, ambas cerradas y con el mismo extremo inicial y final. Si γ_1 y γ_2 son homotópicas en Ω, entonces $Ind_{\gamma_1}(z_0) = Ind_{\gamma_2}(z_0)$ para todo $z_0 \notin \Omega$.

Nota: No valen los recíprocos de las proposiciones a) y b).

Demostración:

a) Para todo $z_0 \notin \Omega$ fijo, la función $1/(z-z_0)$ es holomorfa en Ω, porque no se anula el denominador. Por el Teorema del índice y el Teorema de Cauchy (teorema 7.1.1) se cumple:

$$2\pi i \cdot Ind_\gamma(z_0) = \int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0. \quad \square$$

b) Siendo γ_1 homotópica a γ_2 en Ω, la curva cerrada $\gamma_1 - \gamma_2$ es homotópica a un punto en Ω. Para todo $z_0 \notin \Omega$ fijo, la función $1/(z-z_0)$ es holomorfa en Ω, porque no se anula el denominador. Aplicando el Teorema del índice y luego el Teorema de Cauchy global 7.1.1:

$$2\pi i(Ind_{\gamma_1}(z_0) - Ind_{\gamma_2}(z_0)) = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-z_0}\,dz - \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_1-\gamma_2} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0. \quad \square$$

Corolario 7.1.4. Existencia de primitiva en simplemente conexos.
Si Ω es simplemente conexo y $f \in H(\Omega)$ entonces existe primitiva F de f en Ω, es decir existe $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$.

Demostración: Elijamos $z_0 \in \Omega$ y dejémoslo fijo. Tomemos $z_1 \in \Omega$ cualquiera. Definamos la función

$$F(z_1) = \int_\gamma f(z)\, dz$$

donde γ es cualquier curva C^1 a trozos contenida en Ω que une z_0 con z_1.

La función F está bien definida, es decir no depende de la curva γ elegida. En efecto, si tomamos dos curvas γ_1 y γ_2 contenidas en Ω que unan el punto z_0 con z_1, la curva cerrada $\gamma_1 - \gamma_2$ es homotópica a un punto en Ω, porque Ω es simplemente conexo. Entonces γ_1 y γ_2 son homotópicas en Ω y por el teorema de Cauchy, la integral de f a lo largo de ambas, da lo mismo.

Probemos que $F'(z_1)$ existe y es igual a $f(z_1)$.

Elijamos un disco D de centro z_1 y radio positivo, contenido en Ω. Tomemos $z_2 \in D, z_2 \neq z_1$. Elijamos una curva γ cualquiera que una z_0 con z_1. Tomemos el segmento $S : z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1),\ t \in [0, 1]$ que une z_1 con z_2. La curva $\gamma + S$ une z_0 con z_2. Entonces:

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma+S} f(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz = \int_S f(z)\, dz = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))](z_2 - z_1)\, dz$$

Dividiendo entre $z_2 - z_1$ se deduce:

$$\frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))]\, dz$$

Tomando límite cuando $z_2 \to z_1$ el integrando en la igualdad anterior tiende a $f(z_1)$ uniformemente con $t \in [0, 1]$ (porque f es continua en el segmento compacto S, por lo tanto es uniformemente continua en S). Resulta que existe el límite y es

$$\text{lím}\, z_2 \to z_1 \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \text{lím}\, z_2 \to z_1 \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))]\, dz = f(z_1)$$

Por definición de derivada ese límite es $F'(z_1) = f(z_1)$ como queríamos demostrar. $\square$

7.2. *Fórmulas integrales de Cauchy global.*

Teorema 7.2.1. Fórmula integral de Cauchy global.
Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω. Sea $z_0 \in \Omega$ un punto que no pertenece a γ^*. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \cdot Ind_\gamma(z_0)$$

Demostración: Sea $g : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ la siguiente función auxiliar:

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{si} \quad z \neq z_0, \qquad g(z_0) = f'(z_0)$$

Afirmación: $g \in H(\Omega)$. En efecto, para $z \neq z_0$ la función g es holomorfa (o lo que es lo mismo, analítica) porque es cociente de funciones holomorfas con el denominador que no se anula. Para probar la afirmación basta entonces probar que g es analítica también en z_0.

Como f es analítica en $z = z_0$, existe un disco $D_r(z_0)$, con $r > 0$ tal que

$$\forall\, z \in D_r(z_0) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

siendo $a_0 = f(z_0)$ y $a_1 = f'(z_0)$. Por lo tanto $\forall\, z \in D_r(z_0)$ tal que $z \neq z_0$

$$g(z) - g(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Entonces, sumando $g(z_0) = f'(z_0) = a_1$ a la serie de la derecha:

$$\forall\, z \in D_r(z_0) \text{ tal que } z \neq z_0, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Pero la igualdad anterior es válida también para $z = z_0$ porque queda $g(z_0) = a_1 = f'(z_0)$. Entonces, para todo $z \in D_R(z_0)$ la función $g(z)$ es igual a la suma de un desarrollo en serie de potencias centrado en z_0, y por definición, g es analítica en z_0. Quedó probada la afirmación.

Apliquemos ahora el Teorema de Cauchy global a la función $g \in H(\Omega)$. Resulta:

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 0$$

Entonces:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz$$

Por el teorema del índice: $\int_\gamma 1/(z - z_0)\, dz = 2\pi i \cdot Ind_\gamma(z_0)$. Entonces

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \cdot 2\pi i \cdot Ind_\gamma(z_0) \quad \square$$

Teorema 7.2.2. Fórmula integral de Cauchy global para las derivadas.

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω. Sea $z_0 \in \Omega$ un punto que no pertenece a γ^*. Entonces

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz = f^{(n)}(z_0) \cdot Ind_\gamma(z_0)$$

Demostración: Tomemos $z_0 \in \Omega \setminus \gamma^*$ y dejémoslo fijo. Sea R la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ tal que $z_0 \in R$.

La función $Ind_\gamma(w)$ es constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Entonces $Ind_\gamma(w) = Ind_\gamma(z_0) \quad \forall w \in R$.

Sea $\Omega_1 = R \cap \Omega$. Es abierto porque es intersección de dos abiertos. No es vacío porque $z_0 \in \Omega_1$. Por construcción, para todo $w \in \Omega_1$ se cumple $Ind_\gamma(w) = Ind_\gamma(z_0)$.

Aplicando la fórmula integral de Cauchy en el punto $w \in \Omega_1$, y usando que $Ind_\gamma(w) = Ind_\gamma(z_0)$ se obtiene:

$$\forall w \in \Omega_1, \quad Ind_\gamma(z_0) \cdot f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz \qquad (1)$$

Para todo $w \in \Omega_1 \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ definimos la función siguiente:

$$g(w) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz \qquad (2)$$

Por el teorema 5.3.1 g es analítica y

$$g^{(n)}(w) = n! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz \quad \forall w \in \Omega_1 \qquad (3)$$

Combinando (1) y (2) se deduce:

$$\forall w \in \Omega_1 : Ind_\gamma(z_0) \cdot 2\pi i \cdot f(w) = g(w)$$

Derivando n veces respecto de w y aplicando (3) se obtiene:

$$Ind_\gamma(z_0) \cdot 2\pi i \cdot f^{(n)}(w) = n! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz \quad \forall w \in \Omega_1$$

En particular la igualdad anterior se verifica para $w = z_0$ como queríamos demostrar. □

7.3. *Recíprocos de los Teoremas de Cauchy.*

El siguiente teorema dice que vale también un recíproco del Teorema de Cauchy global, si se supone que la función es continua.

Teorema 7.3.1. *Sea f una función continua en el abierto Ω. Se cumple $f \in H(\Omega)$ si y solo si*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

para toda curva cerrada γ que sea homotópica a un punto en Ω.

Demostración: Directo: Es el teorema de Cauchy global: si $f \in H(\Omega)$ entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

para toda curva cerrada γ homotópica a un punto en Ω.

Recíproco: Tomemos como hipótesis que f es continua y que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

para toda curva cerrada γ que sea homotópica a un punto en Ω. Probemos que $f \in H(\Omega)$.

Hay que probar que para todo $z_0 \in \Omega$ la función f es derivable en z_0. Tomemos un disco abierto $D_R(z_0) \subset \Omega$, con $R > 0$. Cualquier curva cerrada γ contenida $D_R(z_0)$ es homotópica a un punto en Ω. Entonces, de la hipótesis se deduce que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \quad \forall \text{ curva cerrada } \gamma \text{ contenida en } D_R(z_0).$$

Por el teorema fundamental del cálculo (parte b) del teorema 4.2.9), existe primitiva F de f en $D_R(z_0)$, es decir existe $F \in H(D_R(z_0))$ tal que $F'(z) = f(z) \;\; \forall z \in D_R(z_0)$. Como toda función holomorfa es infinitamente derivable, existe $F'' = f'$ lo que muestra que $f \in H(D_R(z_0))$, y en particular es f derivable en z_0. $\square$

El siguiente teorema (de Morera) da un recíproco del teorema de Cauchy local en rectángulos, para funciones continuas.

Teorema 7.3.2. Teorema de Morera.

Sea f una función continua en Ω. Se cumple:
$f \in H(\Omega)$ si y solo si

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

para todo rectángulo $R \subset \Omega$ que tenga lados paralelos a los ejes real e imaginario.

Nota: El teorema de Morera vale también para triángulos por ejemplo, en vez de rectángulos. Lo que se llama Teorema de Morera es el recíproco, pues el directo es el teorema de Cauchy. El recíproco asegura que basta verificar en los bordes de ciertos rectángulos contenidos en Ω que la integral de f es nula, para deducir que f es holomorfa en Ω. Dicho de otra manera, no es necesario verificar a priori que la integral es también nula en todas las otras curvas homotópicas a un punto en Ω (aunque a posteriori, una vez que sabemos que f es holomorfa, por el teorema de Cauchy global va a ser nula la integral también en todas en esas curvas).

Demostración:

Directo: Es el teorema de Cauchy local en rectángulos: si $f \in H(\Omega)$ entonces

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

para todo rectángulo $R \subset \Omega$.

Recíproco: Tomemos como hipótesis que f es continua y que

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

para todo rectángulo $R \subset \Omega$. Probemos que $f \in H(\Omega)$. Fijemos $z_0 \in \Omega$. Hay que probar que cualquiera sea z_0 que hayamos fijado en Ω, la función f es derivable en z_0.

En lo que sigue hágase un dibujo.

Tomemos un disco abierto $D_R(z_0) \subset \Omega$, con $R > 0$. Para todo punto $z_1 \in D_R(z_0)$ definamos:

$$F(z_1) = \int_{\Gamma_{HV(z_0 \mapsto z_1)}} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_{VH(z_0 \mapsto z_1)}} f(z)\, dz \qquad (1)$$

donde:

$\Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1)$ es la curva formada por el segmento horizontal (paralelo al eje real) que une el punto z_0 con cierto punto z_2, más el segmento vertical (paralelo al eje imaginario) que une el punto z_2 con el punto z_1.

$\Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1)$ es la curva formada por el segmento vertical (paralelo al eje imaginario)que une el punto z_0 con cierto punto z_3, más el segmento horizontal (paralelo al eje real) que une el punto z_3 con el punto z_1.

Sea R el rectángulo con vértices z_0, z_2, z_1, z_3. (quizás el rectángulo R degenera a un segmento, cuando la parte real o la parte imaginaria de $z_1 - z_0$ es nula). Entonces:

$$\pm\partial R = \Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1) - \Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1)$$

El signo $\pm$ indica que o bien queda ∂R orientada en sentido antihorario, o bien queda $-\partial R$ orientada en sentido horario, dependiendo de la posición relativa del punto z_1 respecto a z_0.

Obsérvese que $R \subset D_R(z_0) \subset \Omega$. Entonces por hipótesis la integral de f a lo largo de ∂R da cero, de donde, las integrales de f a lo largo de $\Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1)$ y de $\Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1)$ dan el mismo resultado y definen según (1) a una única función $F(z_1)$.

Afirmación: La función F definida por (1) en el disco abierto $D_R(z_0)$, es una primitiva de f en $D_R(z_0)$, es decir: F es holomorfa en ese disco y su derivada es f.

Una vez probada la afirmación, como toda función holomorfa tiene derivadas de todos los órdenes, existe, en el disco $D_R(z_0)$ la derivada segunda $F'' = f'$. Se deduce que f es holomorfa en $D_R(z_0)$, en particular es derivable en $z = z_0$ como queríamos demostrar.

Prueba de la afirmación: Demostremos que $F = U + iV$ es holomorfa en $D_R(z_0)$. Para eso, aplicando el teorema 4.1.4, verificaremos que cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann $U_x = V_y$, $U_y = -V_x$ y que U y V son diferenciables en $D_R(z_0)$.

Calculemos primero las derivadas parciales U_x, V_x respecto de x, en el punto $z_1 = x_1 + iy_1$. Para eso debemos incrementar x_1 en una cantidad real $h \neq 0$, dejando y_1 constante. Entonces calculemos el incremento de F, en los puntos $x_1 + iy_1 = z_1$, $\quad x_1 + h + iy_1 = z_1 + h$ donde h es un real no nulo. Para calcular F en cada uno de esos puntos, aplicamos la definición (1), ya sea usando la curva Γ_{VH} o la curva Γ_{HV}, según más convenga:

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_{\Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1 + h)} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1)} f(z)\,dz \qquad (2)$$

Observemos que $\Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1 + h) = \Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1) + [z_1, z_1 + h]$, donde $[z_1, z_1 + h]$ denota el segmento horizontal que une z_1 con $z_1 + h$, que puede parametrizarse como $z = z_1 + ht$, $\ t \in [0, 1]$. Luego, de (2) se obtiene:

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_{[z_1, z_1 + h]} f(z)\,dz = \int_0^1 f(z_1 + th)h\,dt$$

Dividiendo entre h y haciendo $h \to 0$, como f es continua $\lim_{h\to 0} f(z_1 + th) = f(z_1)$, se obtiene:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} = \int_0^1 f(z_1)\, dt = f(z_1)$$

de donde, sustituyendo en partes real e imaginaria de $F = U + iV$ y de $f = u + iv$, resulta:

$$\lim_{h\to 0} \frac{U(x_1+h, y_1) - U(x_1, y_1)}{h} + i\frac{V(x_1+h, y_1) - V(x_1, y_1)}{h} = u(x_1, y_1) + iv(x_1, y_1)$$

De esa igualdad se deduce que existe el límite de la parte real y el límite de la parte imaginaria. Por definición de derivada parcial respecto de x esos límites son U_x y V_x respectivamente. Se concluye que existen las derivadas parciales de U y V respecto de x en el punto (x_1, y_1) y son

$$U_x = u, \quad V_x = v \qquad (3)$$

Calculemos ahora las derivadas parciales U_y, V_y respecto de y, en el punto $z_1 = x_1 + iy_1$. El procedimiento es análogo pero no totalmente igual. Para eso debemos incrementar y_1 en una cantidad real $h \neq 0$, dejando x_1 constante. Entonces calculemos el incremento de F, en los puntos $x_1 + iy_1 = z_1$, $\;x_1 + i(y_1 + h) = z_1 + ih$ donde h es un real no nulo. Para calcular F en cada uno de esos puntos, aplicamos la definición (1), pero ahora usando la curva Γ_{HV}:

$$F(z_1 + ih) - F(z_1) = \int_{\Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1+ih)} f(z)\, dz - \int_{\Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1)} f(z)\, dz \qquad (4)$$

Observemos que $\Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1+ih) = \Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1) + [z_1, z_1+ih]$, donde $[z_1, z_1+ih]$ denota el segmento vertical que une z_1 con $z_1 + ih$, que puede parametrizarse como $z = z_1 + iht, \;\; t \in [0, 1]$. Luego, de (4) se obtiene:

$$F(z_1 + ih) - F(z_1) = \int_{[z_1, z_1+ih]} f(z)\, dz = \int_0^1 f(z_1 + ith) ih\, dt$$

Dividiendo entre h y haciendo $h \to 0$, como f es continua $\lim_{h\to 0} f(z_1 + ith) = f(z_1)$, se obtiene:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z_1+ih) - F(z_1)}{h} = i \int_0^1 f(z_1)\, dt = if(z_1)$$

de donde, sustituyendo en partes real e imaginaria de $F = U + iV$y de $f = u + iv$, resulta:

$$\lim_{h\to 0} \frac{U(x_1, y_1+h) - U(x_1, y_1)}{h} \;+\; i\,\frac{V(x_1, y_1+h) - V(x_1, y_1)}{h} =$$

$$= i(u(x_1, y_1) + iv(x_1, y_1)) = -v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$$

Se concluye que existen las derivadas parciales de U y V respecto de y en el punto (x_1, y_1) y son

$$U_y = -v, \quad V_y = u \qquad (5)$$

De (3) y (5) se concluye:

- $U_x = V_y = u, \quad U_y = -V_x = -v \;\; \forall z \in D_R(z_0) \qquad (6)$
  o sea F verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $D_R(z_0)$.

- Además U_x, U_y, V_x, V_y son continuas en $D_R(z_0)$, porque por (6) cada una de ellas es igual a, ya sea u, ya sea $\pm v$, y por hipótesis $f = u + iv$ es continua.

Como las funciones reales de dos variables reales, que tienen derivadas parciales continuas en un abierto, son diferenciables en todo punto del abierto, se concluye que F cumple la siguiente condición necesaria y suficiente para ser holomorfa en $D_R(z_0)$: sus partes real e imaginaria son diferenciables y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. (Ver teorema 4.1.4.)

Hemos probado que $F \in H(\Omega)$.

En virtud del teorema 4.1.5, la derivada $F'(z)$ de cualquier función holomorfa $F = U + iV$ se expresa en función de su parte real como

$$F'(z) = U_x - i\,U_y$$

De esta expresión y de (6) se deduce

$$F'(z) = u + iv = f(z) \qquad \square$$

8. Consecuencias de la Teoría de Cauchy.

8.1. *Principio del módulo máximo.*

Definición 8.1.1. Sea f una función continua en Ω. Se dice que $|f|$ *tiene un máximo local en* $z_0 \in \Omega$ si existe un disco abierto $D_R(z_0) \subset \Omega$ tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D_R(z_0)$$

Teorema 8.1.2. Principio del módulo máximo. *Sea Ω un abierto conexo y sea $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ tiene algún máximo local en Ω entonces f es constante en Ω.*

Nota: Este principio es un corolario casi inmediato de la desigualdad de Parseval-Plancherel que se verá en el teorema 8.3.2. Se incluye en el párrafo 8.3.4 una demostración del prinicipio del módulo máximo usando esa desigualdad. Sin embargo se incluye aquí una demostración independiente.

Demostración: Si $|f|$ tiene un máximo local en $z_0 \in \Omega$, entonces existe un disco abierto $D_R(z_0) \subset \Omega$ tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D_R(z_0)$$

Sea $r \in (0, R)$ y sea C_r la circunferencia de centro z_0 y radio r, recorrida una sola vez en sentido antihorario. Se cumple $C_r \subset D_R(z_0)$, luego:

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in C_r \quad (1)$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy a la circunferencia C_r se obtiene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Por el teorema de acotación de integrales, sabiendo que $|z - z_0| = r \;\; \forall\, z \in C_r$, y que la longitud de C_r es $2\pi r$, se obtiene:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(z)|}{r}\, |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(z_0)|}{r}\, |dz| = \frac{|f(z_0)|}{2\pi r} \int_{C_r} |dz| = |f(z_0)|$$

Llamemos $I = (1/2\pi) \int_{C_r} (|f(z)|/r)\, |dz|$. Las desigualdades anteriores dicen que $|f(z_0)| \leq I$ y que $I \leq |f(z_0)|$. Entonces $I = |f(z_0)|$. Por lo tanto, sabiendo que $\int_{C_r} |dz| = 2\pi r$

$$0 = |f(z_0)| - I = \frac{1}{2\pi r}\left(\int_{C_r} |f(z_0)|\, |dz| - \int |f(z)|\, |dz|\right) = \frac{1}{2\pi r}\int_{C_r} (|f(z_0)| - |f(z)|)\, |dz|$$

Parametrizando la circunferencia $C_r : z = z_0 + re^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$, calculando la última integral de la igualdad de arriba, donde $|dz| = |\dot{z}(t)|\, dt = r dt$, se obtiene:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + e^{irt})|)\, dt \quad (2)$$

La integral de la derecha en (2), es la integral de una función real continua y no negativa (debido a la desigualdad (1)). Pero esa integral es 0. Luego la función real en el integrando tiene que ser idénticamente nula. Se deduce que $|f(z)| = |f(z_0)| \;\; \forall z \in C_r$.

Haciendo variar $r \in (0, R)$ se deduce que

$$|f(z)| = |f(z_0)| \quad \forall z \in D_R(z_0) \qquad (3)$$

Hemos probado que el módulo de f es constante en $D_R(z_0)$. Esto implica que f es constante en $D_R(z_0)$ por la proposición 4.1.6. Por el principio de prolongación analítica (ver Corolario 5.2.3), f es constante en Ω. $\square$

Corolario 8.1.3. Otro enunciado del Principio del módulo máximo.
Sea Ω un abierto conexo. Sea $f \in H(\Omega)$. Sea un disco cerrado $\overline{D} \subset \Omega$, y sea $M = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$.
Si f no es constante en Ω entonces el máximo M en $\overline{D}$ se alcanza solamente en la frontera ∂D (es estrictamente mayor que $|f(z)|$ para todo z en el interior D).

Demostración: Por absurdo, si el máximo M de $|f|$ en $\overline{D}$ se alcanzara en un punto z_1 interior a D entonces z_1 sería un máximo local de $|f|$ en Ω y por el teorema 8.1.2, f sería constante. $\square$

8.2. *Otras consecuencias de la Teoría de Cauchy.*

Teorema 8.2.1. Desigualdades de Cauchy. *Sea $f \in H(\Omega)$. Para todo $z_0 \in \Omega$, para todo $R > 0$ tal que $\overline{D_R(z_0)} \subset \Omega$, se cumple*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\, M(R)}{R^n}$$

donde $M(R) = \max_{z \in \overline{D_R(z_0)}} |f(z)|$

Demostración: Por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, siendo C_R la circunferencia de centro z_0 y radio R, se tiene:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

Aplicando el teorema de acotación de integrales, observando que para todo $z \in C_R$ vale $|z - z_0| = R$, y recordando que la longitud de la circunferencia C_R es $2\pi R$, se obtiene:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}}\, |dz| \leq$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_R} \frac{M(R)}{R^{n+1}}\, |dz| = \frac{n!}{2\pi} \frac{M(R)}{R^{n+1}} \int_{C_R} |dz| = \frac{n!}{2\pi} \frac{M(R) 2\pi R}{R^{n+1}} = \frac{n!\, M(R)}{R^n} \quad \square$$

Definición 8.2.2. Un función $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ se llama *entera* si $f \in H(\mathbb{C})$.
Por ejemplo la función $f(z) = e^z$ es entera. Los polinomios en z son funciones enteras.

Teorema 8.2.3. Teorema de Liouville *Si una función entera está acotada entonces es constante.*

Demostración: Fijemos un punto z_0 cualquiera en el plano complejo. Sea K una cota de $|f(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Aplicando la desigualdad de Cauchy para la derivada primera $f'(z_0)$ se obtiene:

$$0 \leq |f'(z_0)| \leq \frac{K}{R} \quad \forall R > 0$$

Luego, tomando $R \to +\infty$ se deduce que

$$f'(z_0) = 0$$

Como el razonamiento anterior es válido cualquiera sea $z_0 \in \mathbb{C}$ que se haya fijado, entonces la derivada f' es idénticamente nula. Luego, por el corolario de la Regla de Barrow, f es constante. □

Teorema 8.2.4. Teorema fundamental del Álgebra.

a) Todo polinomio con coeficientes complejos de grado mayor o igual que 1 tiene alguna una raíz compleja.

b) Todo polinomio con coeficientes complejos de grado $k \geq 1$ tiene exactamente k raíces complejas, contada cada una tantas veces como sea su multiplicidad.

Demostración:

Parte a) Por absurdo, supongamos que el polinomio $P(z) = a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0$, con $a_k \neq 0$, tiene grado $k \geq 1$ y no se anula para ningún $z \in \mathbb{C}$. Entonces la función

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

es entera, porque es el cociente de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ con el denominador que no se anula. Además $f(z)$ no se anula nunca.

Demostremos que $f(z)$ es acotada. En efecto,

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{|a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0|} = 0$$

Entonces, fijo algún $\epsilon > 0$ (por ejemplo $\epsilon = 1$), y por definición de límite cuando $z \to \infty$, existe $R > 0$ tal que

$$|z| \geq R \;\; \Rightarrow \;\; |f(z)| < \epsilon$$

Por lo tanto $|f(z)|$ está acotada (con cota ϵ) fuera del disco cerrado $\overline{D_R(0)}$. Pero en el disco cerrado $\overline{D_R(0)}$, como f es continua, $|f|$ tiene un máximo M. Tomando

$$K = \max\{\epsilon, M\}$$

resulta

$$|f(z)| \leq K \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Por el teorema de Liouville $f(z)$ es constante para todo $z \in \mathbb{C}$. Esa constante no es cero porque $f(z)$ no se anula. Entonces $P(z) = 1/f(z)$ también es constante. Luego, $P(z) = a_0$ y tiene grado cero, contradiciendo la hipótesis de que tiene grado $k \geq 1$.

Parte b) Dado el polinomio $P(z)$ de grado $k \geq 1$, por la parte anterior tiene alguna raíz compleja z_1. Entonces $P(z)$ es divisible entre $z - z_1$. ($P(z)$ se puede bajar por el procedimiento de Ruffini aplicado a $z = z_1$: queda resto nulo y un polinomio cociente $Q_1(z)$ de grado $k-1$). Resulta

$$P(z) = (z - z_1) Q_1(z) \quad \text{grado } (Q_1(z)) = k - 1$$

Si $k-1 \geq 1$ podemos aplicar el mismo razonamiento a $Q_1(z)$ y resulta

$$P(z) = (z-z_1)(z-z_2)Q_2(z) \quad \text{grado } (Q_2(z)) = k-2$$

donde las raíces z_1 y z_2 no son necesariamente diferentes entre sí.

Se puede repetir el razonamiento anterior exactamente k veces, hasta que el grado de $Q_k(z)$ sea nulo, es decir $Q_k(z) = a$ constante. Resulta

$$P(z) = (z-z_1)(z-z_2) \cdot \ldots \cdot (z-z_{k-1})(z-z_k)a \quad (1)$$

donde las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_k$ pueden estar repetidas. La cantidad de veces que cada raíz aparece en la factorización anterior es la multiplicidad de la raíz. La constante a no es nula porque de lo contrario $P(z)$ sería idénticamente nulo, y no tendría grado $k \geq 1$.

La factorización (1) muestra que $P(z)$ tiene exactamente k raíces complejas, contando cada una con su multiplicidad. □

Teorema 8.2.5. *Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ analítica en $z_0 \subset \Omega$ y sea*

$$D_R(z_0) \text{ tal que } R > 0, \quad R = \lim \sup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

el disco de convergencia del desarrollo en serie de potencias de f centrado en z_0; es decir

$$R > 0 \text{ es el máximo tal que } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ converge } \forall\, z \in D_R(z_0)$$

Se cumple:

a) Si $D_R(z_0)$ no está contenido en Ω, y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall\, z \in D_R(z_0) \cap \Omega$, entonces se puede extender f analíticamente a $\Omega_1 = \Omega \cup D_R(z_0)$ como la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \ \forall\, z \in D_R(z_0)$.

b) Si $D_R(z_0)$ está contenido en $\Omega \neq \mathbb{C}$ entonces el radio R es igual a la distancia de z_0 al complemento de Ω.

Demostración: La parte a) es consecuencia del teorema 6.3.5. En efecto, definiendo $f(z)$ como la suma del desarrollo en serie de potencias para todo $z \in D_R(z_0)$, se extiende la función dada $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ analíticamente al conjunto $\Omega \cup D_R(z_0)$. (La extensión está bien definida porque por hipótesis la suma del desarrollo en serie de potencias toma el mismo valor que la función $f(z)$ dada, para todo $z \in D_R(z_0) \cap \Omega$.)

Demostración de la parte b):

Sea $R_0 = \min_{w \notin \Omega} |w - z_0| > 0$, la distancia de z_0 al complemento de Ω. Se observa que $D_{R_0}(z_0) \subset \Omega$.

Enunciamos lo siguiente:

Afirmación: Para todo $z \in D_{R_0}(z_0)$ la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge.

Basta probar la afirmación anterior, pues el radio de convergencia es por definición el máximo R tal que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge para todo $z \in D_R(z_0)$. De la afirmación anterior y de la definición de radio de convergencia se concluye que $R \geq R_0$. Pero como $D_R \subset \Omega$, se tiene $R \leq R_0$. Entonces $R = R_0$ como queríamos demostrar.

Prueba de la afirmación: Sea $z \in D_{R_0}(z_0)$. Se tiene $|z - z_0| = r < r_0 < R_0$, donde r_0 se elige fijo en el intervalo (r, R_0).

Sea $M = \text{máx}_{|z-z_0| \leq r_0} |f(z)|$.

Por la parte d) del teorema 5.1.6 y por la desigualdad de Cauchy (teorema 8.2.1) se obtiene:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \leq \frac{M}{(r_0)^n} \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{1}{r^n}$$

De donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

La última serie converge porque es geométrica de razón $0 \leq r/r_0 < 1$. Luego, por el criterio de comparación de series de términos positivos, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|$ converge; es decir la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente, y por lo tanto converge. □

8.3. *Series de Fourier.*

Definición 8.3.1. Sea $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ que toma valores complejos $g = g(t)$ en función de una variable real t. La función g se llama periódica de período 2π si

$$g(t + 2\pi) = g(t) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo para toda función compleja $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, y todo disco $D_R(z_0) \subset \Omega$, y todo $0 < r < R$, es periódica de período $2pi$ la función:

$$g_r(t) = f(z_0 + re^{it})$$

Si $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ es periódica de período 2π y es continua a trozos, se llaman *coeficientes de Fourier de* g a los números:

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-int}\, dt \quad \forall n \geq 0$$

Teorema 8.3.2. Igualdad de Parseval-Plancherel.

Sea $f \in H(\Omega)$. Para cierto $D_R(z_0)$ denotamos al desarrollo en serie de potencias de f como:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Para todo $0 < r < R$ se cumple:

$$a_n\, r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int}\, dt \ \ \forall\, n \geq 0$$

Es decir, $a_n\, r^n$ son los coeficientes de Fourier de la función periódica $g_r(t) = f(z_0 + re^{it})$.

Además

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^{2n} = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(z_0)} |f(z)|^2\, |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2\, dt$$

Esta igualdad se llama de Parseval-Plancherel.

Demostración:
Por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, se cumple:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

Parametrizando la circunferencia $\partial D_r(z_0)$ como $z(t) = z_0 + e^{it}$, $\quad t \in [-\pi, \pi]$ y usando que $a_n = (f^{(n)}(z_0))/n!$ (ver teorema 5.1.6), resulta:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})\, rie^{it}}{(r)^{n+1} e^{i(n+1)t}} \, dz = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} \, dt$$

De donde

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} \, dt \qquad (1)$$

quedando probada la primera igualdad del enunciado.

Ahora probemos la igualdad de Parseval-Plancherel:

Multipliquemos la igualdad (1) por $(\overline{a}_n) r^n$, donde $(\overline{a}_n)$ indica el conjugado de a_n. Sabiendo que $|a_n|^2 = a_n \, (\overline{a}_n)$ resulta:

$$|a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) (\overline{a}_n) r^n e^{-int} \, dt \qquad (2)$$

Usaremos el criterio de la mayorante de Weierstrass para demostrar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(z_0 + re^{it}) (\overline{a}_n) r^n e^{-int}$$

converge uniformemente en $t \in \mathbb{R}$.

En efecto, siendo M el máximo de $|f(z)|$ cuando $z \in \partial D_r(z_0)$, resulta:

$$|f(z_0 + re^{it}) (\overline{a}_n) r^n e^{-int}| \leq M |a_n| r^n = A_n \quad \text{independiente de } t \in \mathbb{R}$$

Además la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = M \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, r^n|$$

es convergente porque es la serie de los módulos del desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in D_R(z_0) \quad (3)$$

cuando $z = z_0 + r$ con $0 < r < R$. (Se recuerda que el desarrollo en serie de potencias converge absolutamente en todo punto de $D_R(z_0)$, por el teorema 5.1.6, parte e).)

Aplicando el criterio de la mayorante de Weierstrass se concluye que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(z_0 + re^{it}) (\overline{a}_n) r^n e^{-int} \quad C.U. \text{ en } t \in \mathbb{R}$$

Luego, por el teorema de convergencia uniforme e integración:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it})(\overline{a}_n) r^n e^{-int} \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(z_0 + re^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{a}_n) r^n e^{-int} \right) dt \qquad (4)$$

Se observa que, usando (3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\overline{a}_n) r^n e^{-int} \quad \text{es el conjugado de} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} = f(x_0 + re^{it})$$

Sustituyendo en (2) y en (4) se deduce:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{a}_n) r^n e^{-int} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) \, \overline{f(z_0 + re^{it})} \, dt$$

Deducimos la igualdad de Parseval-Plancherel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, dt \qquad \square$$

Corolario 8.3.3. Serie de Fourier.

Sea $f \in H(\Omega)$ *y* $D_R(z_0) \subset \Omega$*. Para* $0 < r < R$*, se define la función* g *periódica de período* 2π*:*

$$g(t) = f(z_0 + re^{it}), \quad t \in \mathbb{R}$$

y se definen sus coeficientes de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \, e^{-int} \, dt$$

Entonces:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esta serie se llama serie de Fourier de g.

La serie de Fourier converge absolutamente y uniformemente en $t \in \mathbb{R}$*. Además:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \, dt$$

Demostración: Sea el desarrollo en serie de potencias de f:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ \ \forall z \in D_R(z_0)$$

Sustituyendo $z - z_0 = re^{it}$ en ese desarrollo, que por el teorema 5.1.6 converge absolutamente y uniformemente en $z \in \partial D_r(z_0)$ se obtiene:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} \qquad (1)$$

que converge absolutamente y uniformemente en $t \in \mathbb{C}$.

Usando el teorema 8.3.2 se tiene

$$c_n = a_n r^n, \qquad |c_n|^2 = |a_n|^2 r^{2n} \qquad (2)$$

Luego, sustituyendo en (1):

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$$

que converge absolutamente y uniformemente en $t \in \mathbb{C}$. Sustituyendo (2) en la igualdad de Parseval-Plancherel del teorema 8.3.2 se deduce:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \, dt \quad \square$$

8.3.4. Otra demostración del principio del módulo máximo, teorema 8.1.2:

Si z_0 es un máximo local de $|f(z)|$, entonces

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \;\; \forall z \in D_R(z_0) \;\; \Rightarrow \;\; |f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)| \;\; \forall\, 0 < r < R, \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

Sean $a_n, \;\; n \geq 0$ los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de f centrado en z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0) \qquad (1)$$

Por el teorema 5.1.6, se tiene

$$a_0 = f(z_0)$$

Aplicando la desigualdad de Parseval-Plancherel del teorema 8.3.2, se obtiene:

$$|a_0|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, dt \leq \frac{|f(z_0)|^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = |f(z_0)|^2 = |a_0|^2$$

Luego, todas las desigualdades son igualdades. Restando $|a_0|^2$ se deduce que la siguiente serie de términos no negativos, (sumando en $n \geq 1$) tiene suma nula:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = 0$$

Pero una serie de términos no negativos tiene suma nula solo si todos sus términos son nulos. Entonces $|a_n| r^{2n} = 0$. Como $r > 0$ deducimos que $|a_n| = 0$ para todo $n \geq 1$. Entonces por (1)

$$f(z) = a_0 \;\; \text{constante} \quad \forall\, z \in D_R(z_0)$$

Por el principio de prolongación analítica (ver Corolario 5.2.3), f es constante igual a a_0 en el conexo abierto Ω. $\square$

9. Aplicaciones al cálculo de integrales impropias.

Las aplicaciones de la teoría de Cauchy de funciones analíticas para el cálculo de integrales impropias, se puede resumir como sigue:

El objetivo es calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, para una cierta función integrable $f(x)$ de variable real x sabiendo que la integral impropia es convergente, y está definida como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

El procedimiento que resumimos a continuación no es aplicable a cualquier función $f(x)$ dada, pero es aplicable a algunos ejemplos, como los que se exponen en las subsecciones siguientes:

Paso 1) Cuando la función $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ se obtiene restringiendo a $z = x \in \mathbb{R}$ una cierta función $f(z)$ de variable compleja $z \in \mathbb{C}$, se puede completar el segmento $[-R, R]$ en el eje real con un camino de regreso, que puede ser una semicircunferencia S_R de centro en el origen y radio $R > 0$: $S_R : z = z(t) = Re^{it},\ 0 \le t \le \pi$. (Hágase un dibujo).

Se define así una curva cerrada $\gamma_R = [-R, R] + S_R$.

Paso 2) Si la función f cumple las hipótesis correspondientes, podemos aplicar el teorema de Cauchy, o las fórmulas integrales de Cauchy.

Por ejemplo cuando $f(z) = g(z)/(z - z_0)^{k+1}$ para todo $z \neq z_0$ de un abierto Ω que contiene al semiplano $\{Im(z) \ge 0\}$ del plano complejo, (en particular contiene a la región encerrada por γ_R); si $g(z)$ es una función holomorfa en Ω; y si z_0 está en la región encerrada por γ_R, se obtiene:

$$\frac{2\pi i g^{(k)}(z_0)}{k!} = \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{S_R} f(z)\,dz$$

Y tomando límite cuando $R \to +\infty$, suponiendo que existiera el límite de la integral de la derecha, se deduce:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{2\pi i g^{(k)}(z_0)}{k!} - \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz$$

Nota: Quizás haya que descomponer f como suma de varias funciones del tipo $f(z) = g(z)/(z-z_0)^{k+1}$, por ejemplo cuando f es una función racional descompuesta en fracciones simples.

Paso 3) Cuando se cumplen las hipótesis correspondientes, se aplican los lemas de deformación de curvas o el lema de Jordan, detallados en las subsecciones próximas, para calcular el límite de la integral en la semicircunferencia S_R.

9.1. *Lema de deformación de curvas y sus aplicaciones.*

Lema 9.1.1. Lema de deformación de curvas.

Sea $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ continua. Sea S_R el arco de circunferencia $z = z(t) = Re^{it},\ \theta_1 \le t \le \theta_2$.

a) Si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = L$ entonces

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = iL(\theta_2 - \theta_1)$$

b) Si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ entonces

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

Demostración: La parte b) se deduce de la parte a) usando $L = 0$.
Para probar la parte a) consideramos

$$I_R = \int_{S_R} \frac{zf(z) - L}{z}\, dz = \int_{S_R} f(z)\, dz - L \int_{S_R} \frac{dz}{z}$$

$$I_R = \int_{S_R} f(z)\, dz - L \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}}\, dt$$

$$I_R = \left(\int_{S_R} f(z)\, dz \right) - iL(\theta_2 - \theta_1)$$

Entonces basta probar que $I_R \to 0$ cuando $R \to +\infty$. Acotando la integral I_R se obtiene

$$|I_R| \leq \int_{S_R} \frac{|zf(z) - L|}{|z|} |dz| \quad (1)$$

Como por hipótesis $|zf(z) - L| \to 0$ cuando $z \to \infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe R_0 tal que

$$|z| > R_0 \;\Rightarrow\; |zf(z) - L| < \epsilon \quad (2)$$

En (1) sustituimos la última desigualdad (2) , sabiendo que $|z| = R$ para todo $z \in S_R$. Resulta:

$$R > R_0 \;\Rightarrow\; |I_R| \leq \frac{\epsilon}{R} \int_{S_R} |dz| = \frac{\epsilon}{R}(\theta_2 - \theta_1)R = k\epsilon < \epsilon^*$$

donde $k = \theta_2 - \theta_1 \geq 0$ es constante, y dado $\epsilon^* > 0$ se elige $\epsilon > 0$ de modo que $k\epsilon < \epsilon^*$. Luego:

$$\forall \epsilon^* > 0 \text{ existe } R_0 > 0 \text{ tal que: } \quad R > R_0 \;\Rightarrow\; |I_R| < \epsilon^*$$

Por definición de límite, la afirmación anterior dice que $I_R \to 0$ cuando $R \to +\infty$, como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 9.1.2. Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx$$

Consideremos la curva cerrada orientada en sentido antihorario $\gamma_R = [-R, R] + S_R$ donde $[-R, R]$ es el intervalo en el eje real $-R \leq x \leq R$, y S_R es la semicircunferencia $z = z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2} = \frac{g(z)}{(z-2i)^2} \quad (1)$$

donde

$$g(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$$

es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$.

La curva γ_R es homotópica a un punto en Ω. En la región encerrada por γ_R se encuentra el punto $2i$ donde se anula el denominador de (1). Por la fórmula de Cauchy para las derivadas, se obtiene:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{(z-2i)^2} = 2\pi i\, g'(2i) = 2\pi i \left.\frac{-2}{(z+2i)^3}\right|_{z=2i} = 2\pi i \frac{-2}{(4i)^3} = \frac{\pi}{16} \quad (2)$$

Por otra parte

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \int_{S_R} f(z)\,dz$$

de donde, usando (2), se obtiene:

$$\frac{\pi}{16} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz \qquad (3)$$

Apliquemos ahora el lema de deformación de curvas a la última integral de la derecha en (3):

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{(z^2+4)^2} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

Sustituyendo en (3) se obtiene

$$\frac{\pi}{16} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx \quad \square$$

9.2. *Lema de Jordan y sus aplicaciones.*

Lema 9.2.1. Lema de Jordan (primera versión).

$$0 \le \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt \le \frac{\pi}{R} \quad \forall\, R > 0$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt = 0$$

Demostración:

$$\int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt = \int_0^{\pi/2} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt \quad (1)$$

Observemos que $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Luego, haciendo el cambio de variables reales $u = \pi - t$ en la segunda integral de (1) resulta:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt = -\int_{\pi/2}^{0} e^{-R \operatorname{sen} u}\,du = \int_0^{\pi/2} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt$$

Sustituyendo en (1) resulta:

$$\int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt \quad (2)$$

En lo que sigue hágase un dibujo. Para $t \in [0, \pi/2]$ la gráfica de la función $f(t) = \operatorname{sen} t$ está por arriba de la cuerda (es decir el segmento de recta que une los vértices $(0,0)$ y $(\pi/2, 1)$). Esta cuerda tiene como ecuación $g(t) = (2/\pi)t$. Entonces tenemos $0 \leq g(t) \leq f(t)\ \forall\, t \in [0, \pi/2]$, es decir:

$$0 \leq (2/\pi)t \leq \operatorname{sen} t \quad \forall t \in [0, \pi/2]$$

Luego, para $R > 0$, se tiene

$$e^{-R(2/\pi)t} \geq e^{-R \operatorname{sen} t} \geq 0 \quad \forall t \in [0, \pi/2]$$

Luego, sustituyendo en (2) se obtiene:

$$0 \leq \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R(2/\pi)t}\, dt = -\frac{\pi}{R}\, e^{-R(2/\pi)t}\Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{R}\,(1 - e^{-R}) \leq \frac{\pi}{R}$$

Haciendo $R \to +\infty$ se obtiene:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt = 0 \quad \square$$

Lema 9.2.2. Lema de Jordan (versión general).
Si $f(z)$ es una función compleja continua para todo z tal que $|z| \geq R_0$, que cumple

$$|f(z)| \leq K \quad \forall\, |z| \geq R_0$$

Entonces:

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z)\, dz \right| \leq \frac{\pi K}{s} \quad \forall\, R \geq R_0$$

donde $s > 0$ es constante y Γ_R es un arco contenido en la semicircunferencia: $z = R\, e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Además si $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ entonces:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z)\, dz = 0$$

Demostración: Sea, para todo $R \geq R_0$ la curva $\Gamma_R : z = R\, e^{it}$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$, con θ_1 y θ_2 que pueden depender de R. Calculando la integral de la tesis:

$$I_R = \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z)\, dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-sR \operatorname{sen} t + isR \cos t} f(Re^{it}) Rie^{it}\, dt$$

Acotando la segunda integral de la igualdad anterior, se deduce:

$$|I_R| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} |e^{-sR \operatorname{sen} t + isR \cos t}|\, |R\, f(Re^{it})|\, dt$$

$$|I_R| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-sR \operatorname{sen} t} |R\, f(Re^{it})|\, dt \leq K_R R \int_0^{\pi} e^{-sR \operatorname{sen} t}\, dt \qquad (1)$$

donde K_R es una cota superior de $|f(z)|$ en el conjunto $|z| = R$.

Luego, aplicando la primera versión del lema de Jordan a la última integral de (1), se deduce que

$$|I_R| \leq K_R R \frac{\pi}{sR} = \frac{\pi K_R}{s} \leq \frac{\pi K}{s} \quad (2)$$

Si además $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0$, entonces $K_R \to 0$ cuando $R \to +\infty$. Como s es una constante positiva fija, tomando límite en (2) cuando $R \to +\infty$ se deduce:

$$\lim_{R\to+\infty} |I_R| = 0 \quad \square$$

Ejemplo 9.2.3. Calcular

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \lim_{r\to 0} \lim_{R\to+\infty} \int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

Sea $0 < r < R$ fijos.

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por el teorema de Cauchy, su integral a lo largo de todo camino cerrado γ homotópico a un punto en Ω es cero.

En lo que sigue hágase un dibujo. Tomemos como camino γ la suma de las siguientes curvas:

$$\gamma = [r, R] + S_R + [-R, -r] - S_r$$

donde

$[r, R]$ es el segmento que va de r hasta R, en el semieje real positivo.

S_R es la semicircunferencia de centro en el origen y radio R parametrizable como $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, orientada para t creciente.

$[-R, -r]$ es el segmento que va de $-R$ hasta $-r$, en el semieje real negativo.

S_r es la semicircunferencia de centro en el origen y radio r parametrizable como $z(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, orientada para t creciente. Luego $-S_r$ está orientada para t decreciente.

Por el teorema de Cauchy:

$$\int_{[r,R]} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{S_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{[-R,-r]} \frac{e^{iz}}{z}\, dz - \int_{S_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0$$

Luego:

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = i \int_0^\pi e^{ir\cos t - r \operatorname{sen} t}\, dt - i \int_0^\pi e^{iR\cos t - R\operatorname{sen} t}\, dt \quad (3)$$

En la segunda integral de (3) hacemos el cambio de variable $u = -x$ y resulta:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \int_R^r \frac{e^{-iu}}{u}\, du = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x}\, dx$$

Sustituyendo en (3) resulta:

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\, dx = i \int_0^\pi e^{ir\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t}\, dt - i \int_0^\pi e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}\, dt \qquad (4)$$

Observando que $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\,\mathrm{sen}\, x$, de (4) se deduce:

$$\lim_{r\to 0}\lim_{R\to+\infty} 2i \int_r^R \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\, dx = \lim_{r\to 0} i \int_0^\pi e^{ir\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t}\, dt - \lim_{R\to+\infty} i \int_0^\pi e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}\, dt \qquad (5)$$

Por un lado, la función $e^{ir\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t}$ es continua en el compacto $r \in [0, \epsilon],\ t \in [0, 2\pi]$. Entonces es uniformemente continua. Por lo tanto:

$$\lim_{r\to 0} i \int_0^\pi e^{ir\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t}\, dt = i \int_0^\pi \lim_{r\to 0} e^{ir\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t}\, dt = \pi i \qquad (6)$$

Por otro lado, acotando la última integral de (5) se obtiene:

$$\left|\int_0^\pi e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}\, dt\right| \leq \int_0^\pi |e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}|\, dt = \int_0^\pi e^{-R\,\mathrm{sen}\, t}\, dt$$

Usando el Lema de Jordan, la última integral de la igualdad de arriba tiende a cero cuando $R \to +\infty$. Entonces se obtiene:

$$\lim_{R\to+\infty} i \int_0^\pi e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}\, dt = 0 \qquad (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5) se concluye:

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\, dx = \pi i$$

de donde

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

9.3. *Transformada de Fourier.*

Definición 9.3.1. Transformada de Fourier.

Dada una función $f(x)$ de variable real x, se define para aquellos valores de s para los cuales existe el límite siguiente, la transformada de Fourier $F(s)$ de f, como

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x) e^{-isx}\, dx$$

A la transformada F de f se la denota como $\mathcal{F}(f)$. El objetivo de este ejemplo es demostrar el siguiente Teorema:

Teorema 9.3.2. Vector propio de la Transformada de Fourier.

La función $f(x) = e^{-x^2/2},\ \ x \in \mathbb{R}$ *es un vector propio de la transformada de Fourier con valor propio* 1*, es decir*

$$\mathcal{F}(f) = f, \quad F(s) = e^{-s^2/2} \ \ \forall\, s \in \mathbb{R}$$

Demostración: Dividiremos la demostración en varios pasos:

1. Demostrar que para todo real fijo $r > 0$, y para todo real fijo s, se cumple:

$$\int_{-r}^{r} e^{-x^2/2}\,dx = \int_{\gamma_1} e^{-z^2/2}\,dz + \int_{\gamma_0} e^{-z^2/2}\,dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2/2}\,dz$$

   donde

   γ_1 es el segmento de recta en el plano complejo que une el punto $-r$ con $-r+si$;

   γ_0 es el segmento de recta en el plano complejo que une el punto $-r+si$ con $r+si$;

   γ_2 es el segmento de recta en el plano complejo que une el punto $r+si$ con r.

   En efecto, $\gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_2 = [-r, r]$ donde $[-r, r]$ es el segmento en el eje real que va del punto $-r$ al punto r. Aplicando el teorema de Cauchy, como la función $e^{-z^2/2}$ es analítica en todo el plano complejo, su integral en el segmento $[-r, r]$ es igual a la suma de las integrales en las curvas γ_i, con $i = 0, 1, 2$.

2. Demostrar que para $i = 1, 2$

$$|\int_{\gamma_i} e^{-z^2/2}\,dz| \leq e^{-r^2/2} e^{s^2/2} s$$

   En efecto, en la curva γ_1 parametrizada como $z(t) = -r + it, \;\; t \in [0, s]$, se cumple

$$(-z^2/2) = -(r^2/2) + (t^2/2) + rti \;\; \Rightarrow$$

$$Re(-z^2/2) = -(r^2/2) + (t^2/2) \leq -(r^2/2) + (s^2/2) \quad \forall\, t \in [0, s]$$

   para todo $z \in \gamma_1$. Luego

$$|e^{-z^2/2}| = e^{Re(-z^2/2)} \leq e^{-r^2/2} e^{-s^2/2} \quad \forall\, z \in \gamma_1$$

   Se obtiene

$$|\int_{\gamma_1} e^{-z^2/2}\,dz| \leq \int_{\gamma_1} |e^{-z^2/2}|\,|dz| \leq e^{-r^2/2} e^{s^2/2} \int_0^s dt = e^{-r^2/2} e^{s^2/2} s$$

   Análogamente para la curva $-\gamma_2$ parametrizada como $z(t) = r + it, \quad t \in [0, s]$ se obtiene la misma desigualdad.

3. Usando las partes 1) y 2) y tomando límite con s fijo, cuando $r \to +\infty$, se deduce que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_0} e^{-z^2/2}\,dz$$

4. Probar que

$$\int_{\gamma_0} e^{-z^2/2}\,dz = e^{s^2/2} \int_{-r}^{r} e^{-x^2/2} e^{-ixs}\,dx$$

En efecto, parametrizando γ_0 como $z = x + is, \ \ x \in [-r, r]$ se obtiene:

$$-\frac{-z^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{s^2}{2} - ixs \quad \Rightarrow \quad e^{-z^2/2} = e^{s^2/2} e^{-x^2/2} e^{-ixs}$$

Sustituyendo la última igualdad en la integral, e integrando con el parámetro x variando en el intervalo $[-r, r]$ se obtiene la afirmación 4.

5. De la definición de transformada de Fourier y de las igualdades 3 y 4, se deduce que la transformada de Fourier $F(s)$ de la función

$$f(x) = e^{-x^2/2}$$

cumple

$$(1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = e^{s^2/2} F(s) \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$$

Luego, multiplicando por $e^{-s^2/2}$ se deduce que :

$$F(s) = K e^{-s^2/2}, \text{ donde } K = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx$$

Hemos probado que la función $f(x) = e^{-x^2/2}$ es un vector propio de la transformada de Fourier con valor propio K.

6. Demostrar que el valor propio K de la transformada de Fourier es igual a 1.

Consideremos en el plano, el cuadrado Q_r de centro en el origen y lados paralelos a los ejes con longitud $2r$.

Sea el disco D_r de centro en el origen y radio r y el disco $D_{\sqrt{2}r}$.

Se tiene $D_r \subset Q_r \subset D_{\sqrt{2}r}$. Entonces la integral doble de cualquier función de dos variables no negativa en D_r será menor o igual que en Q_r que a su vez será menor o igual que en $D_{2\sqrt{2}r}$.

Calculamos las integrales dobles siguientes (las de los discos las calculamos pasando a coordenadas polares):

$$\iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy \leq \iint_{Q_r} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy$$

Se obtiene

$$2\pi(1 - e^{-r^2/2}) \leq \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2/2}\, dx \right)^2 \leq 2\pi(1 - e^{-r^2})$$

Haciendo $r \to +\infty$ se deduce que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

Luego el valor propio K definido al final del paso 5 es $K = 1$. $\square$

10. Otros resultados y ejercicios resueltos.

10.1. *Consecuencias del principio de módulo máximo.*

Ejercicio 10.1.1. Mínimos locales. *Sea $f \in H(\Omega)$. Se dice que $|f|$ tiene un mínimo local en $z_0 \in \Omega$ si existe un entorno $D_R(z_0) \subset \Omega$ tal que*

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| \;\; \forall\, z \in D_R(z_0)$$

Probar que si Ω es conexo y $|f|$ tiene un mínimo local en Ω entonces o ese mínimo es nulo, o f es constante en Ω.

Probemos que si ese mínimo no es nulo entonces f es constante en Ω. Llamemos $m > 0$ al mínimo local que tiene $|f|$ en z_0. Llamemos $D = D_R(z_0)$. Se cumple

$$0 < m = |f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \forall\, z \in D \quad (1)$$

Luego f no se anula nunca cuando $z \in D$. Por lo tanto la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall z \in D \quad (2)$$

es analítica en D y no se anula nunca en D.

Reuniendo (1) y (2) se deduce que:

$$|g(z_0)| \geq |g(z)| \quad \forall z \in D$$

Luego g tiene un máximo local en z_0. Por el principio del módulo máximo $g(z) = c$ constante en D. Como g no se anula nunca en D, se cumple $c \neq 0$. Por (2)

$$f(z) = \frac{1}{c} \quad \forall z \in D$$

Luego, $f(z) - 1/c = 0$ para todo $z \in D$. Por el principio de prolongación analítica, $f(z) - 1/c = 0$ para todo $z \in \Omega$, y deducimos que f es constante en Ω, como queríamos demostrar. $\square$

Ejercicio 10.1.2. Existencia de ceros en las transformaciones del disco.

Sea $f \in H(\Omega)$, donde Ω es abierto conexo; sea D un disco abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Si

$$|f(z)| \text{ es constante} \quad \forall z \in \partial D$$

probar que f tiene al menos un cero en D, es decir existe al menos un $a \in D$ tal que $f(a) = 0$, ó de lo contrario f es constante en Ω.

Sea $|f(z)| = c$ constante cuando $z \in \partial D$.

Primer caso. Si $c = 0$ entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \partial D$. Por el principio de prolongación analítica la función f es constante igual a cero en Ω.

Segundo caso. Si $c > 0$ basta probar que si f no tiene ningún cero en D entonces f es constante en D.

Si $f(z)$ no se anula en D entonces tampoco se anula en $\overline{D}$, ya que en $\partial D : |f| = c > 0$. Como f es continua, y no se anula en el compacto $\overline{D}$ entonces no se anula en un abierto V que contiene al disco cerrado $\overline{D}$. Por lo tanto la función:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall\, z \in V \supset \overline{D} \quad (1)$$

es analítica en V. Por el principio del módulo máximo aplicado a g se tiene:

$$\max_{z \in \overline{D}}\{|g(z)|\} = \max_{z \in \partial D}\{|g(z)|\} = \frac{1}{c} \quad (2)$$

En efecto, si g es constante, obviamente el máximo de $|g|$ se alcanza en todo punto de $\overline{D}$, en particular en la frontera ∂D. Y si g no es constante, el máximo de $|f(z)|$ en $\overline{D}$ se alcanza exclusivamente en la frontera ∂D (ver corolario 8.1.3 del principio de módulo máximo). De (1) y (2) se deduce:

$$\frac{1}{|f(z)|} = |g(z)| \leq \frac{1}{c} \quad \forall z \in D \quad (3)$$

Por otro lado, por el principio del módulo máximo aplicado a f se tiene:

$$\max_{z \in \overline{D}}\{|f(z)|\} = \max_{z \in \partial D}\{|f(z)|\} = c$$

Luego:

$$|f(z)| \leq c \quad \forall z \in D \quad (4)$$

Reuniendo (3) con (4), se deduce que

$$|f(z)| = c \quad \forall z \in D$$

lo que significa que $|f|$ tiene un máximo local en todos los puntos de D. Por el principio del módulo máximo esto implica que $f = k$ constante en D.

Luego $f(z) - k = 0 \quad \forall z \in D$. Por el principio de prolongación analítica $f(z) - k = 0 \quad \forall z \in \Omega$, lo que prueba que f es constante en Ω como queríamos. $\square$

Lema 10.1.3. Lema de Schwartz. *Sea $D = D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Sea $f \in H(D)$ tal que*

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| \leq 1 \quad \forall\, z \in D$$

Entonces:

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D, \quad |f'(0)| \leq 1$$

Además, si $|f'(0)| = 1$ ó si existe algún $z \in D \setminus \{0\}$ para el cual se cumple la igualdad $|f(z)| = |z|$, entonces

$$f(z) = cz \quad \forall\, z \in D$$

donde c es una constante con módulo 1.

Demostración:
Sea la función auxiliar $g(z)$ definida para todo $z \in D$ del siguiente modo:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \quad \text{si } z \neq 0, \quad g(0) = f'(0) \quad (1)$$

La función g es analítica en $D \setminus \{0\}$ porque es cociente de funciones analíticas con el denominador que no se anula. Además es continua en $z = 0$ porque $\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0}[f(z) - f(0)]/z = f'(0) = g(0)$. Entonces la función g es analítica en D porque es analítica en $D \setminus \{0\}$ y es continua en $z = 0$. En efecto, por el teorema de Cauchy-Goursat extendido (ver corolario 6.3.6,) g analítica en $D \setminus \{0\}$ tiene una extensión analítica a D. Esta extensión analítica es por lo tanto una extensión continua, y entonces coincide en $z = 0$ con el valor que tiene $g(0)$.

Calculando el máximo de $|g|$ en $\overline{D_r}$, donde $0 < r < 1$ y $D_r = D_r(0)$; y aplicando el principio del módulo máximo (corolario 8.1.3) a g, se obtiene:

$$\max_{z\in\overline{D_r}}\{|g(z)|\} = \max_{z\in\partial D_r}\{|g(z)|\} = \max_{z\in\partial D_r}\left\{\frac{|f(z)|}{|z|}\right\} \leq \frac{1}{r}$$

Haciendo $r \to 1$ se deduce:

$$\sup_{z\in D}\{|g(z)|\} \leq 1 \quad (2)$$

Combinando (1) con (2) se deduce:

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D, \quad |f'(0)| \leq 1$$

Además si $|f'(0)| = 1$ o si para algún $z_0 \in D \setminus \{0\}$ fuera $|f(z_0)| = |z_0|$ entonces, usando (1) se tendría

$$|g(z)| = 1 \text{ para } z = 0 \text{ o para } z = z_0 \in D \quad (3)$$

En ambos casos, usando (2) se deduce que $|g|$ tiene un máximo local en $z = 0$ o en $z = z_0$. Por el principio del módulo máximo, esto implica

$$g(z) = c \quad \forall z \in D \quad (4)$$

donde c es una constante. Combinando (3) con (4) se deduce que

$$|c| = 1$$

Luego, usando (1) y (4), y usando la condición que $f(0) = 0$, se deduce que

$$f(z) = cz \quad \forall z \in D \quad \square$$

10.2. *Aplicaciones de otros teoremas.*

Del teorema de Liouville.

Ejercicio 10.2.1. En lo que sigue, a y b son dos complejos fijos diferentes, $[a, b]$ es el segmento que une a con b, y $D = D_1(0)$ es el disco unitario, es decir el disco abierto con centro en el origen y radio 1.

a) Encontrar una función analítica g que transforme biyectivamente $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ en D.

b) Demostrar el siguiente teorema:

Si una función f entera omite un segmento (es decir el recorrido de f está contenido en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$), entonces f es constante.

Nota: En realidad vale un resultado más fuerte, que se llama **Teorema pequeño de Picard**, cuyo enunciado es el siguiente:

Si f es una función entera que omite dos puntos diferentes, entonces f es constante.

En el ejercicio anterior no se pide demostrar el teorema pequeño de Picard sino el resultado más débil, asumiendo que el recorrido de f omite no solo dos puntos diferentes, sino todo el segmento que los une.

Resolución del ejercicio 10.2.1.
Parte a) Construyamos g como la composición de

- Una transformación de Moebius $w = w(z)$ que lleve el segmento $[a, b]$ sobre la semirrecta $S = \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. Toda transformación de Moebius es biyectiva del plano compactificado $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en sí mismo. Por lo tanto esta transformación de Moebius (que habrá muchas) lleva uno de los puntos a o b a ∞, y restringida a $C \setminus [a, b]$ será analítica y llevará biyectivamente $C \setminus [a, b]$ a $C \setminus S$
- La función $v.p.\sqrt{w}$, valor principal de la raíz cuadrada de w, definida en el parágrafo 1.2.3, que lleva analíticamente $C \setminus S$ al semiplano $\prod = \{z : Rez > 0\}$ en forma biyectiva.

  Esta función está definida así: dado $w \notin S$, y considerado su argumento $\theta(w) = Arg_{(-\pi,\pi)}(w)$, el complejo $v.p.\sqrt{w}$ tiene como módulo $\sqrt{|w|}$ (aquí $\sqrt{|w|}$ es la raíz cuadrada real de un número real positivo, que es un número real positivo bien definido), y tiene como argumento $\theta(w)/2$. Entonces el argumento del complejo $v.p.\sqrt{w}$ está comprendido en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Eso quiere decir que la imagen de la función $v.p.\sqrt{w}$ aplicada al conjunto $\mathbb{C} \setminus S$ es el semiplano derecho $\prod$ de todos los complejos que tienen parte real positiva.
- Una transformación de Moebius $u = u(z)$ que lleve el semiplano $\prod$ al disco unitario D (hay muchas).

La función g buscada finalmente será la composición

$$g(z) = u\left(v.p.\sqrt{w(z)}\right) \quad \forall z \in C \setminus [a, b]$$

Operando de esa manera, una tal función g se obtiene así:

1. Busco la única $w = w(z)$ de Moebius que cumple

   $$w(a) = 0, \;\; w((a + b)/2) = -1, \quad w(b) = \infty$$

   Resulta:

   $$w(z) = \frac{z - a}{z - b} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus [a, b] \qquad (1)$$

   $$w : \mathbb{C} \setminus [a, b] \leftrightarrow \mathbb{C} \setminus S, \;\; \text{donde} \;\; S = \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

   Nota: Podría haberse elegido otra combinación para construir $w = w(z)$, por ejemplo que lleve b al cero, a al infinito y un punto intermedio cualquiera a elegir en el interior del segmento [a,b], al punto -1. En ese caso se habría obtenido otra transformación de Moebius $w = w(z)$ que también serviría a los fines propuestos, porque llevaría el segmento $[a, b]$ a la semirrecta S.

2. Elijo alguna transformación analítica que lleve biunívocamente $\mathbb{C} \setminus S$ a algún semiplano abierto $\prod$. Por ejemplo, como fue explicado más arriba, la función

$$v.p.\sqrt{w}, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus S, \text{ donde } S = \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \quad (2)$$

   cumple:

$$v.p.\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus S \leftrightarrow \prod, \text{ donde } \prod = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$$

3. Busco alguna transformación de Moebius $u = u(z)$ que lleve el eje vertical imaginario a la circunferencia de centro 0 y radio 1, y que lleve el semiplano derecho $\prod$ al interior del círculo D.

   Para eso elijo tres puntos diferentes en la recta (uno puede ser ∞), que estén ordenados de modo de dejar el semiplano $\prod$ por ejemplo a la derecha, y le hago corresponder tres puntos distintos en la circunferencia, que estén ordenados de modo de dejar el interior del círculo del mismo lado (es decir a la derecha). Por ejemplo:

$$u(0) = -1, \quad u(i) = i, \quad u(\infty) = 1 \quad \Rightarrow \quad u(z) = \frac{z-1}{z+1} \qquad (3)$$

$$u : \prod \leftrightarrow D$$

Construimos

$$g(z) = u\left(v.p.\sqrt{w(z)}\right) \quad \forall z \in C \setminus [a,b]$$

Sustituyendo (1), (2) y (3), resulta:

$$g(z) = \frac{v.p.\sqrt{(z-a)/(z-b)} - 1}{v.p.\sqrt{(z-a)/(z-b)} + 1} \quad \forall z \in C \setminus [a,b] \ \square$$

Parte b) Sea f entera, tal que $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus [a,b]$. Considero la composición

$$h(z) = g(f(z)), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

donde

$$g : \mathbb{C} \setminus [a,b] \leftrightarrow D$$

es la función analítica y biyectiva construida en la parte a).

La función h es analítica en todo el plano complejo, porque es composición de una función entera f con una función analítica g en un abierto que contiene al recorrido de f.

El recorrido de h está contenido en el recorrido de g, por lo tanto está contenido en el disco unitario D. Eso significa que

$$|h(z)| < 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Luego h es entera y acotada, y por el teorema de Liouville, (ver teorema 8.2.3), $h(z)$ es constante igual a c, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Como g es biyectiva, se tiene:

$$h(z) = g(f(z)) \ \Rightarrow \ f(z) = g^{-1}(h(z)) = g^{-1}(c) = a \text{ constante} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}. \ \square$$

Consecuencias de las desigualdades de Cauchy. Una consecuencia de las desigualdades de Cauchy es el resultado sobre el radio de convergencia de las series de potencias de funciones analíticas en Ω, enunciado en el teorema 8.2.5.

Otra consecuencia se enuncia en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 10.2.2. Caracterización de polinomios por su crecimiento en módulo.

Sea f una función entera. Probar que f es un polinomio si y solo si existen dos números reales no negativos A y B y un numero natural $k \geq 0$ tales que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Directo: Si $f(z)$ es un polinomio de grado $k \geq 0$, entonces:

$$f(z) = a_k z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_k \neq 0$$

Luego, para $z \neq 0$:

$$|f(z)| \leq |z^k| \left| a_k + \frac{a_{k-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k} \right| \quad (1)$$

Cuando $z \to \infty$ se cumple

$$\lim_{z\to\infty} \left| a_k + \frac{a_{k-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k} \right| = |a_k|$$

Entonces esa expresión está acotada en el exterior del disco $D_R(0)$ para cierto $R > 0$

$$\left| a_k + \frac{a_{k-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k} \right| \leq B \quad \forall z \text{ tal que } |z| \geq R$$

Sustituyendo en (1) se tiene:

$$|f(z)| \leq B|z|^k \quad \forall z \text{ tal que } |z| \geq R \quad (2)$$

Por otra parte $|f(z)|$ es continua, luego está acotada en el compacto $\{|z| \leq R\}$, es decir:

$$|f(z)| \leq A \quad \forall z \text{ tal que } |z| \leq R \quad (3)$$

Observemos que $B|z|^k \leq A + B|z|^k$ y que $A \leq A + B|z|^k$ (porque A y B son reales no negativos). Luego en (2) y (3) se puede acotar con $A + B|z|^k$ (en vez de $B|z|^k$ en (2) y en vez de A en (3)). Se deduce entonces de (2) y (3) que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k \quad \forall\, z \in \mathbb{C}. \quad \square$$

Recíproco: Sea f entera tal que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k \quad \forall\, z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Para probar que f es un polinomio basta probar que la derivada $k+1-$ésima $f^{(k+1)}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ pues entonces la derivada $k-$ésima es una constante c_k; luego la derivada $k-1-$ésima es de la forma $c_k z + c_{k-1}$. Luego la derivada $k-2-$ésima es de la forma $(c_k/2)z^2 + c_{k-1}z + c_k$; y así sucesivamente hasta llegar a la función $f(z)$ sin derivar, que queda entonces un polinomio en z.

Para probar que la derivada $k+1-$ésima de f es idénticamente nula, fijemos un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y usemos las desigualdades de Cauchy (ver teorema 8.2.1):

$$|f^{(k+1)}(z_0)| \leq \frac{(k+1)!\, M_R}{R^{k+1}} \quad (6)$$

donde R es cualquier real positivo, y

$$M_R = \max_{z \in \overline{D_R(z_0)}} |f(z)| \leq \max_{z \in \overline{D_R(z_0)}} (A + B|z|^k) = A + B\,(|z_0| + R)^k \quad (7)$$

En la última desigualdad de (7) se usó (5), y en la última igualdad de (7) se usó que el máximo de $|z|$ en $\overline{D_R(z_0)}$ es $|z_0| + R$. Sustituyendo (7) en (6), se deduce que

$$|f^{(k+1)}(z_0)| \leq \frac{(k+1)!\,(A + B\,(|z_0| + R)^k)}{R^{k+1}} \quad (8)$$

Haciendo tender R a $+\infty$ en (8), con z_0, A, B y k constantes, (se observa que la derivada $k+1$-ésima de f en z_0, es independiente del valor de $R > 0$ elegido para usar la desigualdades de Cauchy), se obtiene:

$$|f^{(k+1)}(z_0)| = 0 \quad \Rightarrow f^{(k+1)}(z_0) = 0$$

Como z_0 fijo era cualquier punto del plano complejo, se deduce que $f^{(k+1)}$ es idénticamente nula, como queríamos demostrar. $\square$

Consecuencia del teorema del índice.

La siguiente es una fórmula parecida a la fórmula integral de Cauchy para funciones analíticas, pero que vale para funciones continuas:

Ejercicio 10.2.3. *Sea f continua en el abierto Ω y sea $z_0 \in \Omega$. Probar que*

$$f(z_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

donde $\partial D_r(z_0)$ indica la circunferencia de radio r y centro en z_0, recorrida una sola vez en sentido antihorario.

Resolución: Basta demostrar que tiende a cero cuando $r \to 0$ la siguiente diferencia:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) Ind_{\partial D_r(z_0)}(z_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{f(z_0)}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \quad (1)$$

Primero hemos usado que $Ind_{\partial D_r(z_0)}(z_0) = 1$, y después el teorema del índice.

Dado $\epsilon > 0$ como $f(z)$ es continua en $z = z_0$, sea $\delta > 0$ tal que:

$$|z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

En particular si $0 < r < \delta$ y si $z \in \partial D_r(z_0)$ entonces se cumple $|z - z_0| < \delta$ lo que implica la desigualdad de arriba. En conclusión:

$$0 < r < \delta, \quad z \in \partial D_r(z_0) \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \qquad (2)$$

Acotemos entonces la última integral de la igualdad (1), usando (2):

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \, |dz| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{r} \, |dz| < \frac{\epsilon}{2\pi r} \int_{\partial D_r(z_0)} |dz| = \epsilon, \quad \text{si } 0 < r < \delta$$

La desigualdad anterior, por definición de límite prueba que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, dz = 0$$

Luego, usando (1) se deduce que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = f(z_0) \quad \square$$

10.3. *Teoremas de la función inversa y forma local de las transformaciones analíticas.*

El siguiente teorema afirma que si la derivada de una función analítica f es no nula en un punto, entonces existe una función inversa *local* , que es también analítica. Pero esto no significa que f tenga que ser invertible. En efecto, aunque la derivada $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$, la función f puede no ser invertible de Ω a $f(\Omega)$, aunque lo sea de algún disco $D_r(a)$ a su imagen $f(D_r(a))$, para cada $a \in \Omega$.

Por ejemplo la función exponencial $exp(z) = e^z$ es analítica en todo el plano complejo con derivada que no se anula nunca, pero no es invertible (no existe función inversa exp^{-1} que vaya del recorrido $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de la función exp a su dominio $\mathbb{C}$). Esto se debe a que e^z no es inyectiva: z y $z + 2k\pi i$ con k número entero cualquiera, tienen la misma imagen $e^z = e^{z+i2k\pi}$.

Sin embargo, fijemos un punto $a \in \mathbb{C}$ y un disco $D_r(a)$ que no corta a las rectas horizontales $y = Im(a) + \pi i$ ni $y = Im(a) - \pi i$ (hacer un dibujo). La función e^z restringida a este disco es inyectiva (es decir dos puntos diferentes de ese disco tienen correspondientes diferentes por la función e^z). Luego es biyectiva sobre su imagen V, y existe una función inversa local. Esta función inversa es la restricción al abierto V de la rama del logaritmo $Log_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}$ donde $\theta_0 = -\pi + arg(a)$.

En resumen:

Nota 10.3.1. Aunque $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, la función f NO es necesariamente inyectiva, y NO es necesariamente invertible.

Teorema 10.3.2. Teorema de la función inversa local. *Si $f \in H(\Omega)$ cumple $f'(a) \neq 0$ para algún $a \in \Omega$ entonces existe un entorno $D_r(a) \subset \Omega$ y un abierto $V = f(D_r(a))$ tal que f lleva biyectivamente $D_r(\Omega)$ a V y la función inversa f^{-1} es analítica en V teniendo como derivada:*

$$f^{-1\,\prime}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in D_r(a)$$

Demostración: Consideremos las partes real e imaginaria u y v de $f = u + iv$. La derivada $f'(z)$ se expresa como

$$f' = u_x - iu_y$$

Como $f'(a) \neq 0$ y f' es continua, tenemos $f'(z) \neq 0$ en un entorno de $z = a$. Luego

$$u_x^2 + u_y^2 \neq 0 \quad (1)$$

Calculemos el Jacobiano de la transformación de dos variables reales (x, y) a dos variables reales (u, v) mediante el siguiente determinante, y apliquemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y = u_x u_x - (-u_y)u_y = u_x^2 + u_y^2$$

Usando (1) se tiene que el jacobiano $J \neq 0$ en un entorno de $z = a$. Aplicando el teorema de la función inversa para funciones de dos variables de clase C^1, existe un entorno abierto $D_r(a)$ y un entorno abierto V de $f(a)$ tal que f lleva biyectivamente $D_r(a)$ en V y la función inversa f^{-1} es diferenciable en todo punto de V. Por lo tanto f^{-1} es continua. Aplicando el teorema 2.1.12, se deduce que la función inversa local f^{-1} es analítica en V y tiene por derivada

$$f^{-1\,\prime}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in D_r(a) \quad \square$$

Ejercicio 10.3.3. Rama del logaritmo definida en simplemente conexos.
Sea D un abierto simplemente conexo (por ejemplo un disco abierto). Probar que si $f \in H(D)$ y $f'(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in D$ entonces existe $h \in H(D)$ tal que

$$e^{h(z)} = f(z) \quad \forall z \in D$$

Nota: A esta función $h(z)$ se la llama rama analítica del logaritmo de $f(z)$ y se la denota como $Log(f(z))$. La función $h(z)$ no es única, ya que dada una $h(z)$ que cumple las condiciones del ejercicio 10.3.3, si se le suma $2k\pi i$ con k número entero cualquiera, se obtiene otra función $h(z)$ que también cumple las condiciones requeridas.

Resolución del ejercicio 10.3.3:
Consideremos la función $f'(z)/f(z)$. Es analítica en D porque es el cociente de dos funciones analíticas con el denominador que no se anula. El conjunto D es simplemente conexo. Luego, por el corolario 7.1.4 del teorema de Cauchy, existe una primitiva $G(z)$ de la función $f'(z)/f(z)$ en D. Consideremos la función $H(z) = e^{G(z)}/f(z)$. Es analítica en D porque es la composición de funciones analíticas y el cociente de funciones analíticas con el denominador que no se anula. Calculemos la derivada de H:

$$H'(z) = e^{G(z)} \left(\frac{G'(z)}{f(z)} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \right) = e^{G(z)} \left(\frac{f'(z)}{f^2(z)} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \right) = 0 \quad \forall\, z \in D$$

Luego H es igual a una constante k en D. Determinemos la constante k:

$$H(a) = \frac{e^{G(a)}}{f(a)} = k \neq 0$$

Entonces se obtuvo:

$$H(z) = \frac{e^{G(z)}}{f(z)} = k \neq 0 \quad \forall\, z \in D \quad (1)$$

Elijamos un número b constante cualquiera tal que $e^b = k$ (existen infinitos posibles b porque $k \neq 0$). Definamos

$$h(z) = G(z) - b$$

$h \in H(D)$ porque G es analítica y b es una constante. Verifiquemos que h cumple las condiciones deseadas:

$$e^{h(z)} = e^{G(z)-b} = e^{G(z)}e^{-b} = \frac{e^{G(z)}}{k} = f(z) \quad \forall z \in D$$

En la última igualdad se usó (1). Hemos construido una función analítica $h(z)$ en el disco D tal que $e^{h(z)} = f(z)$ $\forall z \in D$, como queríamos. $\square$

Ejercicio 10.3.4. Forma local de las funciones analíticas:
Las funciones analíticas son localmente "trasladados de z^k ".
Sea f analítica en la región Ω y no constante; y sea $a \in \Omega$. Probar que existe un disco abierto D con centro en a contenido en Ω, una función analítica φ en D tal que $\varphi'(a) \neq 0, \varphi(a) = 0$, y un número $k \geq 1$ tales que:

$$f(z) - f(a) = (\varphi(z))^k \quad \forall z \in D \quad (1)$$

Además $k \geq 1$ indica el lugar del primer coeficiente $a_k \neq 0$ del desarrollo en serie de potencias de $f(z) - f(a)$ y cumple:

$$f(z) - f(a) = (z-a)^k g(z) \quad \forall z \in D$$

donde $g(z)$ es una función analítica tal que $g(a) \neq 0$.

Definición 10.3.5. Orden o multiplicidad de un cero. Al número $k \geq 1$ que cumple las condiciones del ejercicio 10.3.4, se lo llama *orden o multiplicidad de a* como cero de la función $f(z) - f(a)$.

Nota: La interpretación de la igualdad (1) en el ejercicio 10.3.4 es como sigue:

La función $\varphi(z)$, como tiene derivada no nula en a, tiene derivada no nula en un entorno de a y es localmente invertible (ver teorema 10.3.2), con inversa local analítica. Entonces puede interpretarse φ meramente como un cambio de variable, que lleva la variable original z, analíticamente y en forma biyectiva, a una nueva variable $z_2 = \varphi(z)$. Con esa interpretación $(\varphi(z))^k$ es z_2^k, o sea la función potencia k-ésima donde $k \geq 1$ es fijo. Siendo $f(z) = f(a) + z_2^k$ con $f(a) = c$ constante, resulta $f(z)$ igual a la composición de la función potencia $k-$ésima con una traslación (de vector c). Toda función analítica es entonces, dicho en forma rápida y poco precisa, localmente igual al "trasladado de la función potencia $k-$ésima". Con esa frase queremos resumir el resultado del teorema a probar en este ejercicio.

Consideremos el desarrollo en serie de potencias de f centrado en a en un cierto disco D:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

Tenemos $a_0 = f(a)$. Tomando a_k el primer coeficiente a partir de a_1 que no sea nulo, resulta:

$$f(z) - f(a) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^{n-k} \quad a_k \neq 0$$

Llamando $g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^{n-k}$ resulta g analítica en el disco D (porque es la suma de una serie de potencias), y además $g(a) = a_k \neq 0$. En resumen:

$$f(z) - f(a) = (z-a)^k g(z) \quad \forall z \in D, \;\; g \in H(D), \;\; g(a) \neq 0 \quad (1)$$

Como $g(a) \neq 0$, entonces $g(z) \neq 0$ en algún entorno de a. Sustituyendo el disco D por un disco más pequeño centrado en a, tal que $g(z) \neq 0$ en él (y volviendo a llamar D a ese disco más pequeño), se tiene:

$$g(z) \neq 0 \;\; \forall z \in D$$

Aplicando lo demostrado en el ejercicio 10.3.3, existe una función $h \in H(D)$ tal que

$$e^{h(z)} = g(z) \quad \forall z \in D \quad (2)$$

Tomemos

$$\varphi(z) = (z-a)e^{h(z)/k} \;\; \forall z \in D \quad (3)$$

φ es analítica en D porque es la composición de la exponencial con una función analítica $h(z)/k$ (recordar que k es constante mayor o igual que 1), y luego multiplicada por otra función analítica $(z-a)$.

Juntando (1), (2) y (3), resulta:

$$f(z) - f(a) = (z-a)^k e^{h(z)} = (z-a)^k \left(e^{h(z)/k}\right)^k = \left((z-a)e^{h(z)/k}\right)^k = (\varphi(z))^k \quad \forall\, z \in D$$

La última es la igualdad de la tesis que queríamos probar.

Solo resta probar que $\varphi'(a) \neq 0$. En efecto, usando (3)

$$\varphi'(z) = e^{h(z)/k} + (z-a)e^{h(z)/k}\frac{h'(z)}{k}$$

Para $z = a$, usando (2) y el final de (1) se deduce:

$$|\varphi'(a)| = |e^{h(a)/k}| = \sqrt[k]{|e^{h(a)}|} = \sqrt[k]{|g(a)|} \neq 0 \quad \Box$$

Nota: La raíz k-ésima que se toma en la igualdad anterior es en los reales positivos que está siempre bien definida. No es raíz k-ésima compleja.

Ejercicio 10.3.6. *Probar que si $f \in \Omega$ es inyectiva entonces*

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$$

y para todo $a \in \Omega$ es $k = 1$ el orden o multiplicidad de a como cero de la función $f(z) - f(a)$.

Sea $a \in \Omega$ un punto cualquiera, que dejamos fijo. Hay que probar que $f'(a) \neq 0$. Considerando los coeficientes a_n del desarrollo en serie de potencias de f centrado en a, y recordando que

$$a_1 = f'(a)$$

basta probar que $a_1 = 0$. Por lo visto en el ejercicio que muestra que f es localmente igual al "trasladado de z^k "(ejercicio 10.3.4), hay que probar que $k \geq 1$, donde k es el primer natural positivo tal que $a_k \neq 0$, que coincide con el orden de a como cero de la función $f(z) - f(a)$.

Supongamos por absurdo que $k \geq 2$.

Aplicamos el resultado del ejercicio del "trasladado de z^k "(ejercicio 10.3.4). En un cierto disco D, entorno del punto a, existe una función analítica φ tal que $\varphi'(a) \neq 0$, $\varphi(a) = 0$ y que cumple:

$$f(z) - f(a) = (\varphi(z))^k \quad \forall z \in D \quad (1)$$

Aplicando el teorema 10.3.2, de la desigualdad $\varphi'(a) \neq 0$ se deduce que φ es biyectiva de un cierto entorno D del punto a a un cierto abierto $V = \varphi(D)$ que contiene $\varphi(a) = 0$; es decir $\varphi : D \mapsto \varphi(D)$ tiene inversa local, que es $\varphi^{-1} : \varphi(D) \mapsto D$.

Elijamos $z_1 \in D$, $z_1 \neq a$. Consideremos $w_1 = \varphi(z_1)$. Como φ es inyectiva en D y $\varphi(a) = 0$, se deduce $w_1 \neq 0$. Tomemos $w_2 = w_1 e^{i2\pi/k}$. Si $k \geq 2$, entonces $w_2 \neq w_1$. Sea $z_2 = \varphi^{-1}(w_2)$. Como φ^{-1} también es inyectiva, se cumple $z_2 \neq z_1$. En resumen, tenemos:

$$z_2 \neq z_1 \in D, \ \ \varphi(z_2) = w_2 = w_1 e^{i2\pi/k} = \varphi(z_1) e^{i2\pi/k} \quad (2)$$

Reuniendo (1) con (2) se cumple:

$$z_2 \neq z_1 \in D, \ \ f(z_2) - f(a) = \varphi(z_2)^k = \varphi(z_1)^k \left(e^{i2\pi/k}\right)^k = \varphi(z_1)^k e^{i2\pi} = \varphi(z_1)^k = f(z_1) - f(a)$$

Luego:

$$z_2 \neq z_1 \in D, \ \ f(z_2) - f(a) = f(z_1) - f(a) \quad \Rightarrow \quad f(z_1) = f(z_2)$$

Lo anterior muestra que f no es inyectiva, lo que es absurdo porque contradice la hipótesis. □

Teorema 10.3.7. Teorema de la función inversa global. *Sea $f \in H(\Omega)$ inyectiva. Entonces*

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$$

y $f : \Omega \mapsto f(\Omega)$ es invertible con inversa analítica $f^{-1} : f(\Omega) \mapsto \Omega$ en el abierto $f(\Omega)$. Además la derivada de la función inversa es:

$$f^{-1\,\prime}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in \Omega$$

Además para todo $a \in \Omega$ es $k = 1$ el orden de a como cero de la función $f(z) - f(a)$.

Demostración: En el ejercicio 10.3.6, se probó que $f'(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \Omega$. Entonces, aplicando el teorema de inversa local (teorema 10.3.2), se deduce que f es localmente invertible para todo punto $a \in \Omega$, con inversa local analítica $f_a^{-1} : f(D(a)) \mapsto D(a)$, donde $D(a)$ es un entorno abierto de a y $f(D(a))$ un entorno abierto de $f(a)$.

El recorrido $f(\Omega)$ es abierto, porque cada $f(a)$ en él está en el entorno $f(D(a))$, abierto y contenido en $f(\Omega)$.

Por hipótesis, f es inyectiva en Ω. Cualquier función f inyectiva de Ω a $f(\Omega)$, es invertible. (Porque cualquier función es sobreyectiva sobre su recorrido).

La inversa $f^{-1} : f(\Omega) \mapsto \Omega$, como es la única, cuando se la restringe a $f(D(a))$ para cualquier punto $a \in \Omega$, coincide con la inversa local f_a^{-1} que sabemos que es analítica. Luego la inversa global f^{-1} es analítica.

Aplicando a cada $z \in \Omega$ la última igualdad del teorema 10.3.2 se deduce:

$$f^{-1\,\prime}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in \Omega \ \square$$

10.4. *Transformaciones del disco unitario en sí mismo.*

Sea $D = D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el *disco unitario* abierto. En esta subsección estudiaremos las transformaciones analíticas que llevan el disco unitario D en sí mismo (aunque el recorrido no sea todo D).

Los siguientes resultados ya probados son aplicables en particular a estas transformaciones:

- **Lema de Schwartz.** Ver lema 10.1.3.
- **Existencia de ceros.** Ver ejercicio 10.1.2.

Ejercicio 10.4.1. Transformaciones de Moebius del disco unitario en sí mismo.
Sea α un complejo constante tal que $|\alpha| < 1$. Sea φ_α la siguiente transformación de Moebius:

$$\varphi_\alpha = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

a) *Probar que $\varphi_\alpha \in H(D)$, $\quad \varphi_\alpha(\alpha) = 0$, $\quad \varphi_\alpha(0) = -\alpha$.*
b) *Probar que φ_α es biyectiva de D en D y de ∂D en ∂D, con función inversa*

$$\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$$

c) *Probar que*

$$\varphi'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1-|\alpha|^2}, \qquad \varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$$

Resolución: Parte a): La transformación de Moebius φ_α es analítica para todo punto z que no anule el denominador, pues es el cociente de dos funciones analíticas. Entonces es analítica para todo $z \neq 1/\overline{\alpha}$. Como $|1/\overline{\alpha}| = 1/|\alpha| > 1$ entonces es analítica para todo $z \in D$. Es inmediato verificar que $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$, $\quad \varphi_\alpha(0) = -\alpha$.

Parte b): La transformación de Moebius φ_α es biyectiva del plano compactificado $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en sí mismo. Entonces es biyectiva de D en la imagen de D y de ∂D en la imagen de ∂D. Para probar que es biyectiva de D en D y de ∂D en ∂D basta probar entonces que la imagen de ∂D es ∂D y que la imagen de D es D.

Primero verifiquemos que $\varphi_\alpha(\partial D) \subset \partial D$:

Sea $z \in \partial D$, es decir $|z| = 1$. Probemos que $\varphi_\alpha(z) \in \partial D$, es decir que $|\varphi_\alpha(z)| = 1$:

$$|z| = 1 \ \Rightarrow \ \varphi_\alpha(z)| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = |\overline{z}| \left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = \left|\frac{z\overline{z}-\overline{z}\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = \left|\frac{1-\alpha\overline{z}}{1-\overline{\alpha}z}\right| = 1 \quad (1)$$

El módulo del último cociente en la igualdad (1) es 1 porque el numerador es el conjugado del denominador, y entonces tienen el mismo módulo.

Como φ_α es una transformación de Moebius, lleva la circunferencia ∂D a una circunferencia o a una recta. En (1) probamos que lleva la circunferencia ∂D dentro de sí misma. Entonces la lleva a sí misma. Hemos probado entonces que la imagen de la circunferencia ∂D es sí misma.

Ahora probemos que la imagen del disco D es el mismo disco D. Como φ_α es una transformación de Moebius, lleva el interior D de la circunferencia ∂D a una de las dos regiones del plano complejo que tienen como frontera ∂D. Como para $0 \in D$ se cumple $\varphi_\alpha(0) = -\alpha \in D$, entonces la imagen de D es la única región del plano complejo que contiene a $-\alpha$ y que tiene como frontera ∂D: esto es D. Hemos probado que la imagen de D es D.

Por lo explicado antes, esto basta para probar que φ_α es biyectiva de D en sí mismo. Por lo tanto existe función inversa φ_α^{-1} de D en D, que es la única función que compuesta con φ_α da la identidad.

Para probar que la función inversa de φ_α es $\varphi_{-\alpha}$ basta verificar que

$$\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z)) = z \quad \forall z \in \overline{D} \qquad \text{(a probar)}$$

En efecto

$$\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z)) = \varphi_\alpha\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right) = \frac{(z-\alpha/1-\overline{\alpha}z)-(-\alpha)}{1-(z-\alpha/1-\overline{\alpha}z)\,(-\overline{\alpha})} =$$

$$\frac{z-\alpha+\alpha(1-\overline{\alpha}z)}{1-\overline{\alpha}z+\overline{\alpha}(z-\alpha)} = \frac{z-|\alpha|^2 z}{1-|\alpha|^2} = z$$

Parte c): Calculemos la derivada de $\varphi_\alpha(z)$:

$$\varphi'_\alpha(z) = \frac{(1-\overline{\alpha}z)+\overline{\alpha}(z-\alpha)}{(1-\overline{\alpha}z)^2}$$

Sustituyendo $z = \alpha$ y $z = 0$ se obtiene:

$$\varphi'_\alpha(\alpha) = \frac{1-\overline{\alpha}\alpha}{(1-\overline{\alpha}\alpha)^2} = \frac{1}{1-|\alpha|^2}, \quad \varphi'_\alpha(0) = \frac{1-\overline{\alpha}\alpha}{1} = 1-|\alpha|^2 \qquad \square$$

Ejercicio 10.4.2. Acotación de la derivada de las transformaciones analíticas del disco unitario en sí mismo.

Sean α y β dos complejos fijos con módulo menor que 1. Sea $f \in H(D)$ tal que $f(D) \subset D$ y $f(\alpha) = \beta$.

a) *Probar que*

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$$

b) *Probar que la igualdad se da si y solo si existe c constante tal que $|c| = 1$ y*

$$f(z) = \varphi_{-\beta}(c\varphi_\alpha(z)) \quad \forall z \in D$$

donde φ_α es la transformación definida en el ejercicio 10.4.1.

Resolución: Tomemos la composición:

$$h(z) = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}(z) \quad (1)$$

Se tiene $h(D) \subset D$ y $h \in H(D)$ porque es composición de funciones analíticas que llevan del disco D en sí mismo. Por el lema de Schwartz (ver lemma 10.1.3), se cumple:

$$h'(0) \leq 1 \quad (2a)$$

y además

$$h'(0) = 1 \;\; \Leftrightarrow h(z) = cz \;\; \forall z \in D \;\; \text{donde } c \text{ es constante tal que } |c| = 1 \quad (2b)$$

Aplicando la regla de la cadena a la ecuación (1) se obtiene:

$$h'(0) = \varphi'_\beta(f(\varphi_{-\alpha}(0))) \cdot f'(\varphi_{-\alpha}(0)) \cdot \varphi'_{-\alpha}(0) = \varphi'_\beta(\beta) \cdot f'(\alpha)\varphi'_{-\alpha}(0) = \frac{1-|\alpha|^2}{1-|\beta|^2}\, f'(\alpha)$$

En la última igualdad se usó el resultado de la parte c) del ejercicio 10.4.1. En definitiva:

$$|h'(0)| = \frac{1-|\alpha|^2}{1-|\beta|^2}\,|f'(\alpha)| \quad (3)$$

Reuniendo (2a) con (3) se deduce que:

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2} \quad (4)$$

Reuniendo (2b) con (3), y usando (1), se deduce que:

$$|f'(\alpha)| = \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}(z) = cz \;\; \forall z \in D \;\; \text{donde } c \text{ es constante tal que } |c| = 1 \quad (5)$$

Veamos el significado de la última condición en (5), usando $w = \varphi_{-\alpha}(z),\; z = \varphi_{-\alpha}^{-1}(w)$:

$$\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}(z) = cz \quad \Leftrightarrow \quad f(w) = \varphi_\beta^{-1}(c\varphi_{-\alpha}^{-1}(w)) = \varphi_{-\beta}(c\varphi_\alpha(w))$$

En la última igualdad se usó la parte b) del ejercicio 10.4.1. Luego la afirmación en (5) es:

$$|f'(\alpha)| = \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2} \quad \Leftrightarrow \quad f(w) = \varphi_{-\beta}(c\varphi_\alpha(w)) \;\; \forall w \in D \;\; \text{donde } c \text{ es constante tal que } |c| = 1 \quad (6)$$

Las afirmaciones (4) y (6) son la tesis de las partes a) y b) respectivamente, como queríamos probar. $\square$

Ejercicio 10.4.3. Transformaciones invertibles del disco unitario en sí mismo.

a) *Sea α un complejo fijo con módulo menor que 1. Sea $f \in H(D)$ inyectiva tal que $f(D) = D$ y $f(\alpha) = 0$ con $\alpha \in D$. Probar que existe c constante, con $|c| = 1$, tal que*

$$f(z) = c\varphi_\alpha(z) \quad \forall z \in D$$

donde φ_α es la transformación definida en el ejercicio 10.4.1.

b) *Probar que si f es una función entera e inyectiva tal que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$ entonces f tiene un único cero en el disco unitario D y existe una constante c con módulo igual a 1 tal que*

$$f(z) = cz \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Parte a): Si f es analítica e inyectiva de D sobre D, entonces por el teorema 10.3.7, f es invertible sobre su imagen D; $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$, y la función inversa $g = f^{-1} : D \mapsto D$ es analítica y su derivada cumple

$$g'(f(z)) = \frac{1}{f('z)}$$

Como por hipótesis se tiene $f(\alpha) = 0$, la igualdad anterior aplicada en particular a $z = \alpha$ conduce a:

$$g'(0) = \frac{1}{f'(\alpha)} \quad (1)$$

Aplicando el resultado del ejercicio 10.4.2 a la función f, con $\beta = 0$, donde $\varphi_\beta(z) = \varphi_0(z) = z$, y $\varphi_\alpha = (z-\alpha)/(1-\overline{\alpha}z)$ son las funciones definidas en el ejercicio 10.4.1; se obtiene:

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1-|\alpha|^2} \quad (2)$$

y además

$$|f'(\alpha)| = \frac{1}{1-|\alpha|^2} \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = c\varphi_\alpha(z) \ \ \forall z \in D \quad \text{donde } c \text{ es constante tal que } |c| = 1 \qquad (3)$$

Como por hipótesis se tiene $f(\alpha) = 0$, entonces la función inversa $g = f^{-1} : D \mapsto D$ cumple $g(0) = \alpha$. Aplicando el resultado del ejercicio 10.4.2 a la función g, (intercambiando los roles de α y β en el enunciado del ejercicio 10.4.2 y usando que $\beta = 0$), se obtiene:

$$|g'(0)| \leq 1 - |\alpha|^2 \quad (4)$$

Reuniendo (1) con (4) se deduce:

$$|f'(\alpha)| \geq \frac{1}{1-|\alpha|^2} \quad (5)$$

Reuniendo (2) con (5) se deduce que:

$$|f'(\alpha)| = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

y usando (3) se deduce que

$$f(z) = c\varphi_\alpha(z) \ \ \forall z \in D \quad \text{donde } c \text{ es constante tal que } |c| = 1. \quad \square$$

Parte b): Usando el resultado probado en el ejercicio 10.1.2, existe al menos un cero en el disco D. Este cero es único porque f es inyectiva. Llamándolo α tenemos $f(\alpha) = 0$ con $\alpha \in D$.

Además f lleva inyectivamente el disco D sobre su imagen. f es analítica y biyectiva de todo el plano complejo sobre su imagen. Entonces el borde de la imagen $f(D)$ es la imagen del borde de D. Como la imagen de ∂D es ∂D (por hipótesis), concluimos que la imagen $f(D)$ tiene como borde a la circunferencia ∂D. Entonces $f(D)$ es una de las dos regiones que tienen como borde a la circunferencia ∂D. Como $\alpha \in D$ y $f(\alpha) = 0 \in D$ se deduce que la región imagen $f(D)$ es D.

En resumen tenemos:

$$f(D) = D; \quad f \text{ analítica e inyectiva }; \quad f(\alpha) = 0 \text{ con } \alpha \in D$$

Usando la parte a) se deduce que

$$f(z) = c\varphi_\alpha(z) = \frac{c(z-\alpha)}{1-\overline{\alpha}z} \quad \forall z \in D \qquad \text{donde } c \text{ es constante con } |c| = 1$$

Como $f(z)$ coincide con $c\varphi_\alpha(z)$ para todo $z \in D$, la función $f(z) - c\varphi_\alpha(z)$ se anula en D. Por el principio de prolongación analítica, se anula para todo $z \in \Omega$ donde Ω es la región que contiene a D donde ambas funciones f y φ_α sean analíticas. Es decir:

$$f(z) = \frac{c(z-\alpha)}{1-\overline{\alpha}z} \quad \forall z \in \Omega \qquad \text{donde } c \text{ es constante con } |c| = 1 \quad (6)$$

Probemos que $\alpha = 0$ y por lo tanto $\Omega = \mathbb{C}$.

Por absurdo, si $\alpha \neq 0$ tomando límite en (6) para $z \to 1/\overline{\alpha}$ y usando que f es continua porque es entera, se deduce:

$$f(1/\overline{\alpha}) = \lim_{z \to 1/\overline{\alpha}} \frac{c(z-\alpha)}{1-\overline{\alpha}z} = \infty \quad \text{Absurdo.}$$

Luego tenemos $\alpha = 0$ y la región Ω donde f y φ_α son analíticas, es todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

Sustituyendo $\alpha = 0$ y $\Omega = \mathbb{C}$ en (6) se deduce

$$f(z) = cz \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \text{donde } c \text{ es constante con } |c| = 1. \quad \square$$

Ejercicio 10.4.4. Caracterización de transformaciones analíticas del disco unitario en sí mismo.

Sea $f \in H(\Omega)$, donde Ω es abierto conexo que contiene al disco unitario cerrado

$$\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

a) *Probar que si f no es constante y si $|f(z)| = 1 \ \forall z \in \partial D$ entonces existe una constante M con $|M| = 1$ tal que*

$$f(z) = M \prod_{j=1}^{m} \varphi_{\alpha_j}(z) \quad \forall z \in \Omega$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m$ son los ceros de f contenidos en D, repetido cada uno tantas veces como su multiplicidad, y φ_{α_j} es la transformación definida en el ejercicio 10.4.1.

b) *Probar que si f es entera y cumple $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$, entonces existe una constante c con $|c| = 1$ y un número natural $k \geq 0$ tales que*

$$f(z) = cz^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Parte a): Por el resultado del ejercicio 10.1.2, como la función f no es constante, f tiene al menos un cero en D.

La transformación f es analítica en $\Omega \supset \overline{D}$, no constante y transforma ∂D en ∂D por hipótesis. Luego, transforma D en una de las dos regiones que tiene como frontera a ∂D. Como existe $\alpha \in D$ tal que $f(\alpha) = 0 \in D$, entonces f transforma D en D.

Llamemos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m$ a los ceros de f en D, repetido cada uno tantas veces como su multiplicidad.

Recordar que, por lo visto en la definición 10.3.5, la multiplicidad de un cero α_j de f es el número natural $k_j \geq 1$ tal que

$$f(z) = (z - \alpha_j)^{k_j} g_j(z), \quad \text{donde } g_j \in H(D_r(\alpha_j)), \quad g_j(\alpha_j) \neq 0$$

siendo $D_r(\alpha_j)$ un entorno de radio $r > 0$ del punto α_j.

Luego:

$$\lim_{z \to \alpha_j} \frac{f(z)}{(z - \alpha_j)^{k_j}} = g_j(\alpha_j) = L_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad (1)$$

Construyamos la función auxiliar $g(z)$, definida para todo $z \in \Omega$ tal que $z \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m$, del siguiente modo:

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^m \varphi_{\alpha_j}(z)} \qquad (2)$$

Recordando que $\varphi_{\alpha_j}(z) = (z - \alpha_j)/(1 - \overline{\alpha_j}\, z)$, consideremos la primera raíz α_1 de f en D, que tiene multiplicidad $k_1 \geq 1$.

En la productoria $\prod_{j=1}^m \varphi_{\alpha_j}(z)$ aparece el factor $(z - \alpha_1)/(1 - \overline{\alpha_j} z)$ exactamente k_1 veces (en los primeros k_1 factores). Luego, esa productoria se escribe como:

$$\prod_{j=1}^{m} \varphi_{\alpha_j}(z) = \frac{(z - \alpha_1)^{k_1}}{(1 - \overline{\alpha_j}\, z)^{k_1}} \prod_{j=k_1+1}^{m} \varphi_{\alpha_j}(z), \text{ siendo } \alpha_j \neq \alpha_1 \text{ si } j > k_1 \qquad (3)$$

donde, por convención, la última productoria es 1 si $m \leq k_1$.

Tomando límite en (2) y usando (3) y (1), se deduce que:

$$\lim_{z \to \alpha_1} g(z) = \lim_{z \to \alpha_1} \frac{f(z)(1 - \overline{\alpha}_1\, z)^{k_1}}{(z - \alpha_1)^{k_1}} \cdot \frac{1}{\prod_{j=k_1+1}^m \varphi_{\alpha_j}(z)} = L_1 \cdot \frac{(1 - |\alpha_1|^2)}{\prod_{j=k_1+1}^m \varphi_{\alpha_j}(\alpha_1)} = M_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Se observa que no se anula el denominador a la derecha (para definir el número complejo M_1) porque $\alpha_j \neq \alpha_1$ si $j > k_1$. Además $M_1 \neq 0$ porque $L_1 \neq 0$ y $|\alpha_1| < 1$.

Análogamente para las otras raíces $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ de f en D se obtiene:

$$\lim_{z \to \alpha_j} g(z) = M_j \neq 0 \qquad (4)$$

Por lo tanto

$$\lim_{z \to \alpha_j} (z - \alpha_j) g(z) = 0 \cdot M_j = 0$$

Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat extendido (ver corolario 6.3.6) se deduce que la función g definida en (2) se extiende analíticamente a todo el disco D.

Probemos que $|g(z)| = 1$ para todo z tal que $|z| = 1$. En efecto, usando (2), usando que $f(\partial D) \subset \partial D$ y usando la propiedad (b) del ejercicio 10.4.1 que dice que $\varphi_{\alpha_j}(\partial D) = \partial D$, se deduce que

$$|z| = 1 \;\Rightarrow\; |g(z)| = \frac{|f(z)|}{\prod_{j=1}^m |\varphi_{\alpha_j}(z)|} = \frac{1}{1} = 1$$

En resumen tenemos una transformación $g \in H(D)$ tal que $|g(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Usando el resultado del ejercicio 10.1.2, la función g es, o bien constante igual a M (con $|M| = 1$ porque $|g(z)| = 1$ si $|z| = 1$); o bien g tiene algún cero en D.

Probemos que g no tiene ningún cero en D. (Por lo tanto g es constante igual a M con $|M| = 1$.) En efecto: Por absurdo, si $\alpha \in D$ es un cero de g entonces usando (2), α es uno de los ceros de f en D, digamos que es α_j. Entonces aplicando la continuidad de $g(z)$ en $z = \alpha_j$ (porque g es analítica en D), y usando la igualdad (4) se deduce:

$$0 = g(\alpha_j) = \lim_{z \to \alpha_j} g(\alpha_j) = M_j \neq 0. \text{ Absurdo.}$$

Esto termina de probar que $g \in H(D)$ no tiene ningún cero en D. Por lo tanto g es constante igual a M con $|M| = 1$. Sustituyendo en (2) se deduce:

$$f(z) = M \prod_{j=1}^{m} \varphi_{\alpha_j}(z) \quad \forall\, z \in \Omega, \text{ donde } M \text{ es una constante tal que } |M| = 1 \quad \square$$

Parte b): Si f es entera y es constante igual a c, y además cumple $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$, entonces $|c| = 1$ y se obtiene la tesis que queríamos probar, con $k = 0$:

$$f(z) = c \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \text{ donde } c \text{ es una constante tal que } |c| = 1.$$

Ahora estudiemos el caso en que f es entera y no constante tal que $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$.

Entonces f cumple todas las hipótesis de la parte a), donde $\Omega = \mathbb{C}$. Luego, usando lo probado en la parte a):

$$f(z) = c \prod_{j=1}^{m} \varphi_{\alpha_j}(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \text{ donde } c \text{ es una constante tal que } |c| = 1 \quad (5)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m$ son las raíces de f en en el disco unitario, repetida cada una tantas veces como su multiplicidad.

Probemos que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, m$. Por absurdo, si alguna raíz α_j de f en D fuera $\alpha_j \neq 0$ entonces la función $\varphi_{\alpha_j}(z) = (z - \alpha_j)/(1 - \overline{\alpha_j}\, z)$ no sería analítica en $z = 1/\overline{\alpha_j}$. Por lo tanto, usando (5) la función f no sería analítica en ese punto, contradiciendo la hipótesis de que f es una función entera.

Hemos probado que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, m$. Entonces f tiene en el disco unitario D una única raíz $\alpha = 0$ con multiplicidad $k = m \geq 1$. Sustituyendo en (5), $\alpha_j = 0$, $m = k$ y observando que $\varphi_0(z) = z$ se obtiene

$$f(z) = cz^k \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \text{ donde } c \text{ es una constante tal que } |c| = 1. \quad \square$$

TERCERA PARTE.
SINGULARIDADES Y TEORÍA DE LOS RESIDUOS.

Resumen

Se estudian las singularidades aisladas: evitables, polos y esenciales y se obtiene el desarrollo en serie de Laurent.

Se define la topología de convergencia uniforme en compactos de las funciones analíticas. Se expone un teorema de aproximación de funciones meromorfas por funciones racionales. Se definen las familias normales y se prueba la compacidad secuencial de estas familias.

Se expone la teoría de los residuos para funciones meromorfas, el principio del argumento y el teorema de Rouché. Se dan aplicaciones matemáticas del cálculo de residuos.

11. Síntesis de la segunda parte.

Se suponen conocidos los siguientes conceptos previos desarrollados en las secciones 1, 2, 3.1 y 3.2:

- El plano complejo compactificado $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde un entorno de ∞ se define como $D_{1/R} = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, con $R > 0$.

- En un abierto Ω, una función f es holomorfa si existe en todo punto $z_0 \in \Omega$ el siguiente límite, llamado derivada de f en z_0:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

- La integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ de una función continua f en Ω a lo largo de una curva γ, C^1 a trozos en Ω, y sus propiedades.

- Si m un número entero $m \neq 1$, entonces, para toda curva cerrada γ que vaya del punto z_1 al punto z_2 se tiene:

$$\int_\gamma (z-a)^m\, dz = \frac{z_2^{m+1} - z_1^{m+1}}{m+1}$$

  Si la curva γ es cerrada entonces la integral anterior es nula.

- Los conceptos de convergencia puntual, convergencia absoluta y convergencia uniforme de series de funciones de variable compleja.

- La serie geométrica de razón z definida como $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge puntualmente a $1/(1-z)$ para todo z tal que $|z| < 1$.

- Criterio de la mayorante de Weierstrass: Si $|f_n(z)| \leq A_n$, independiente de z, para todo $z \in K$ y si $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \text{ converge uniformemente y absolutamente en } K$$

- La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en cualquier conjunto compacto K contenido en $D_1(0)$.
- Convergencia uniforme e integración: Si para todo $n \geq 0$ la función f_n es continua en K, y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en K, entonces la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ es continua en K y
$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_\gamma f_n(z)\, dz \right)$$
para cualquier curva C^1 a trozos contenida en K.

11.1. *Funciones analíticas.*

Los detalles y demostraciones de los resultados incluidos en este resumen se encuentran en las secciones 5 y 6.

Definición 11.1.1. $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice *analítica en el punto* $z_0 \in \Omega$ si existe un disco $D_R(z_0)$, con $R > 0$ tal que:
$$\text{Para todo } z \in D_R(z_0) \cap \Omega : \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
[6] donde la serie de la derecha es convergente puntualmente para todo z fijo en $D_R(z_0)$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0)$ se llama *desarrollo en serie de potencias* centrado en z_0 de la función $f(z)$.

$f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice *analítica en* Ω si es analítica en z_0 para todo $z_0 \in \Omega$.

Nota 11.1.2. Radio de convergencia y fórmula de la raíz n-ésima.

El máximo R tal que la serie de potencias
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{converge } \forall\, z \in D_R(z_0)$$
es
$$R = 1/(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})$$
La serie de potencias **converge absolutamente** para todo z tal que $|z - z_0| < R$, y **converge uniformemente en todo compacto** $K \subset D_R(z_0)$**.**

(Por convención, si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ se dice que $R = +\infty$ y $D_R(z_0) = \mathbb{C}$).

Nota 11.1.3. Si f es analítica en $z_0 \in \Omega$ entonces también es analítica en todo los puntos del disco $D_R(z_0)$.

Nota 11.1.4. Si f es analítica en Ω y si R es el radio de convergencia de la serie de potencias centrada en $z_0 \in \Omega$, entonces:

a) Si $D_R(z_0)$ no está contenido en Ω, , y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in D_R(z_0) \cap \Omega$, entonces se puede extender f analíticamente a $\Omega_1 = \Omega \cup D_R(z_0)$ como la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ \forall\, z \in D_R(z_0)$.

b) Si $D_R(z_0)$ está contenido en Ω el radio R es igual a la distancia de z_0 al complemento de Ω.

---

[6] Por convención $z^0 = 1$ para todo z, aún abusando de la notación, cuando $z = 0$.

Teorema 11.1.5. Analiticidad de las funciones holomorfas.
Una función f es holomorfa en el abierto Ω si y solo si es analítica en Ω.

Se denota con $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas o lo que es lo mismo analíticas en Ω.

Teorema 11.1.6. Derivabilidad infinita de las funciones analíticas.
Relación entre coeficientes del desarrollo y derivadas de la función.
Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z) \quad \forall\, z \in D_R(z_0)$ donde $R > 0$ Se cumple:
a) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \quad \forall\, z \in D_R(z_0)$.
b) Existen en $D_R(z_0)$ derivadas $f^{(k)}(z)$ (respecto de z) de orden k, para todo natural $k \geq 1$.
c) Se verifica la siguiente relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de f centrado en $z_0 \in \Omega$ y la derivada n- ésima de f en z_0:

$$a_0 = f(z_0), \quad a_1 = f'(z_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \quad \forall n \geq 0$$

Teorema 11.1.7. Principio de prolongación analítica. Sea f analítica en Ω, donde Ω es abierto conexo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:
a) $f(z) = 0 \quad \forall\, z \in \Omega$.
b) Para algún $z_0 \in \Omega$, se cumple $f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k \geq 0$.
c) Existe una sucesión de puntos $z_n \in \Omega$ que converge $z_n \to z_0 \in \Omega$, tal que para todo $n \geq 1$, $z_n \neq z_0$ y $f(z_n) = 0$.
Nota: *La afirmación c) se expresa también diciendo que:* Existe un punto de acumulación $z_0 \in \Omega$ del conjunto donde se anula f.

Corolario 11.1.8. Si una función f analítica no es idénticamente nula en una región Ω entonces sus ceros (i.e. puntos donde se anula f) son aislados.
Dicho de otra manera, cada punto z_0 tal que $f(z_0) = 0$ está contenido en algún entorno $D_R(z_0)$ que no contiene otros ceros de f más que z_0.

Corolario 11.1.9. Si dos funciones analíticas en la región Ω coinciden en un conjunto con un punto de acumulación en Ω entonces ambas coinciden en todo punto de Ω.

Teorema 11.1.10. Funciones analíticas construidas mediante integrales.
Hipótesis) *Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función continua. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva. Se define para cada $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ fijo, el valor complejo $g(z_0)$ dado por la integral siguiente:*

$$g(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Tesis) *$g(z_0)$ como función de z_0 es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*
Además la derivada n- ésima de g está dada para todo $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ por la siguiente fórmula integral:

$$g^{(n)}(z_0) = n! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

11.2. *Teoría del índice.*

Los detalles y las demostraciones de este parágrafo se encuentran en la subsección 5.4.

Definición 11.2.1. Índice de una curva cerrada.
Dada una curva orientada y cerrada cualquiera γ, y dado un punto $z_0 \notin \gamma$, se llama *índice de γ en el punto z_0,* y se denota $Ind_\gamma(z_0)$, a *la cantidad entera k neta de vueltas que da γ alrededor de z_0.*

La cantidad de vueltas que da γ alrededor de z_0 está definida con precisión en la sección 5.4, Definición 5.4.1.)

Teorema 11.2.2. Teorema del índice.
Sea γ una curva cerrada cualquiera C^1 a trozos. Para todo $z_0 \notin \gamma$ se cumple:

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

11.3. *Teoría de Cauchy.*

Los detalles así como las demostraciones de este parágrafo se encuentran en las secciones 6 y 7.

Sea un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Teorema 11.3.1. Teorema de Cauchy global.
Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Corolario 11.3.2. Otra versión del teorema de Cauchy global. *Sea $f \in H(\Omega)$. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas en Ω, ambas con el mismo extremo inicial y con el mismo extremo final. Si γ_1 es homotópica a γ_2 en Ω, entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Teorema 11.3.3. Teorema de Cauchy-Goursat extendido.
Si $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\}$ cumple

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

entonces f puede extenderse holomórficamente a Ω.

Teorema 11.3.4. Fórmula integral de Cauchy global.
Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω. Sea $z_0 \in \Omega$ un punto que no pertenece a γ^*. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)\cdot Ind_\gamma(z_0)$$

Teorema 11.3.5. Fórmula integral de Cauchy global para las derivadas.
Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω. Sea $z_0 \in \Omega$ un punto que no pertenece a γ^*. Entonces

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(z_0)\cdot Ind_\gamma(z_0)$$

El siguiente teorema dice que vale también un recíproco del Teorema de Cauchy, si se supone que la función es continua:

Teorema 11.3.6. Teorema de Morera.
Sea f una función continua en el abierto Ω. Se cumple:
a) $f \in H(\Omega)$ si y solo si

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

para toda curva cerrada γ que sea homotópica a un punto en Ω.
b)$f \in H(\Omega)$ si y solo si

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

para todo rectángulo $R \subset \Omega$ que tenga lados paralelos a los ejes real e imaginario.

11.4. *Consecuencias de la teoría de Cauchy.*

Los detalles y demostraciones de este parágrafo se encuentran en la sección 8.

Definición 11.4.1. Sea f una función continua en Ω. Se dice que $|f|$ *tiene un máximo local en* $z_0 \in \Omega$ si existe un disco abierto $D_R(z_0) \subset \Omega$ tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D_R(z_0)$$

Teorema 11.4.2. Principio del módulo máximo. *Sea Ω un abierto conexo y sea $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ tiene algún máximo local en Ω entonces f es constante en Ω.*

Corolario 11.4.3. Otro enunciado del Principio del módulo máximo.
Sea Ω un abierto conexo. Sea $f \in H(\Omega)$. Sea un disco cerrado $\overline{D} \subset \Omega$, y sea $M = \max_{z\in\overline{D}} |f(z)|$.
Si f no es constante en Ω entonces el máximo M en $\overline{D}$ se alcanza solamente en la frontera ∂D (es estrictamente mayor que $|f(z)|$ para todo z en el interior D).

Teorema 11.4.4. Desigualdades de Cauchy.
Sea $f \in H(\Omega)$. Para todo $z_0 \in \Omega$, para todo $R > 0$ tal que $\overline{D_R(z_0)} \subset \Omega$, se cumple

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\,M(R)}{R^n}$$

donde $M(R) = \max_{z\in\overline{D_R(z_0)}} |f(z)|$

Definición 11.4.5. Un función $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ se llama *entera* si $f \in H(\mathbb{C})$.
Por ejemplo la función $f(z) = e^z$ es entera. Los polinomios en z son funciones enteras.

Teorema 11.4.6. Teorema de Liouville *Si una función entera está acotada entonces es constante.*

Teorema 11.4.7. Teorema fundamental del Álgebra.

a) Todo polinomio con coeficientes complejos de grado mayor o igual que 1 tiene alguna una raíz compleja.

b) Todo polinomio con coeficientes complejos de grado $k \geq 1$ tiene exactamente k raíces complejas, contada cada una tantas veces como sea su multiplicidad.

11.5. *Lema de Jordan y de deformación de curvas.*

Los detalles y demostraciones de esta parte se encuentran en la sección 9.

Para aplicar la teoría de Cauchy y la teoría de Residuos (que se verá en la sección 15), al cálculo de integrales impropias, se utilizan los siguientes lemas, llamados Lema de Jordan y Lemas de Deformación de Curvas.

Lema 11.5.1. Lema de deformación de curvas I.

Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continua. Sea para todo $R > 0$ suficientemente grande $S_R \subset \Omega$ el arco de circunferencia $z = z(t) = Re^{it}$, $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$.

a) Si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = L$ *entonces*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = iL(\theta_2 - \theta_1)$$

b) Si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ *entonces*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = 0$$

Lema 11.5.2. Lema de deformación de curvas II.

Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continua. Sea para todo $R > 0$ suficientemente pequeño $S_R \subset \Omega$ el arco de circunferencia $z = z(t) = Re^{it}$, $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$.

Si $\lim_{z\to 0} zf(z) = L$ *entonces*

$$\lim_{R\to 0} \int_{S_R} f(z)\, dz = iL(\theta_2 - \theta_1)$$

Lema 11.5.3. Lema de Jordan.

Si $f(z)$ es una función compleja continua para todo z tal que $|z| \geq R_0$, que cumple

$$|f(z)| \leq K \quad \forall\, |z| \geq R_0$$

Entonces:

$$|\int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z)\, dz| \leq \frac{\pi K}{s} \quad \forall\, R \geq R_0$$

donde $s > 0$ es constante y Γ_R es un arco contenido en la semicircunferencia: $z = R\, e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Además si $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ *entonces:*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z)\, dz = 0$$

12. Ceros y singularidades aisladas.

12.1. *Funciones racionales.*

Una función racional es un cociente de dos polinomios no idénticamente nulos, con coeficientes complejos:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Está definida y es holomorfa en todos los puntos del plano complejo que no sean raíces del polinomio $Q(z)$.

Siempre podemos suponer que los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ son primos entre sí, esto es, no tienen raíces comunes. En efecto, si ambos polinomios tienen alguna(s) raíz(es) z_0 en común, dividiendo ambos entre $(z - z_0)$ tantas veces como sea necesario, alguno de ellos, o ambos, deja de tener a z_0 como raíz.

Por el teorema fundamental del Álgebra, cada polinomio tiene tantas raíces $z_1, z_2, \ldots, z_n$ como su grado n (repitiendo cada raíz tantas veces como su multiplicidad). Entonces dividiendo sucesivas veces el polinomio entre $z - z_i$ se factoriza el polinomio.

Llamando $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a las raíces de $P(z)$ (repitiendo cada una tantas veces como su multiplicidad) y llamando $p_1, p_2, \ldots, p_m$ a las raíces de $Q(z)$, se obtiene:

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$$

$$Q(z) = b(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_m)$$

donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$ son los coeficientes de los términos de mayor grado de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ que tienen grado n y m respectivamente. (Alguno de los dos polinomios o ambos puede tener grado 0. Si ambos tienen grado 0, la función racional $P(z)/Q(z)$ es constante.)

Se tiene

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)}{b(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_m)}$$

Extendemos continuamente la función racional $f(z)$ al plano compactificado $\overline{\mathbb{C}}$, definiendo:

$$f(p_i) = \infty = \lim_{z \to p_i} f(z), \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m$$

Además:

$$m > n \ \Rightarrow\ \lim_{z \to \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0. \quad \text{Definimos } f(\infty) = 0$$

$$m < n \ \Rightarrow\ \lim_{z \to \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \infty. \quad \text{Definimos } f(\infty) = \infty$$

$$m = n \ \Rightarrow\ \lim_{z \to \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a}{b} \neq 0. \quad \text{Definimos } f(\infty) = \frac{a}{b}$$

En lo que sigue consideramos la función racional $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios primos entre sí, de grado n y m respectivamente.

Definición 12.1.1. Ceros de una función racional.

Se llaman ceros de la función $f(z) = P(z)/Q(z)$ a las raíces de $P(z)$ y además, si $m > n$ se llama también cero de la función racional a ∞

Se llama orden de un cero $z_i \in \mathbb{C}$ a su multiplicidad como raíz de $P(z)$. Se llama orden de ∞, cuando es un cero de la función, al número natural positivo $m - n$.

Definición 12.1.2. Polos de una función racional.

Se llaman polos de la función $f(z) = P(z)/Q(z)$ a las raíces de $Q(z)$ y además, si $m < n$ se llama también polo de la función racional a ∞

Se llama orden de un polo $p_i \in \mathbb{C}$ a su multiplicidad como raíz de $Q(z)$. Se llama orden de ∞, cuando es un polo de la función, al número natural positivo $n - m$.

Proposición 12.1.3. Cantidad de ceros y polos de una función racional.

La cantidad de ceros de la función racional $f(z) = P(z)/Q(z)$ (contado cada uno tantas veces como su orden) es igual a la cantidad de polos (contado cada uno tantas veces como su orden) y es igual a $\max\{m, n\}$.

En efecto, esta proposición se deduce de las definiciones de ceros y polos, discutiendo según $m > n$, $m < n$ y $m = n$.

Proposición 12.1.4. Caracterización de ceros y polos de una función racional.

$z_0 \in \mathbb{C}$ *es un cero de* $f(z) = P(z)/Q(z)$ *con orden* $k \geq 1$ *si y solo si existe*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} \notin \{0, \infty\}$$

∞ *es un cero de* $f(z) = P(z)/Q(z)$ *con orden* $k \geq 1$ *si y solo si existe*

$$\lim_{z \to \infty} z^k f(z) \notin \{0, \infty\}$$

$p_0 \in \mathbb{C}$ *es un polo de* $f(z) = P(z)/Q(z)$ *con orden* $k \geq 1$ *si y solo si existe*

$$\lim_{z \to p_0} (z - z_0)^k f(z) \notin \{0, \infty\}$$

∞ *es un polo de* $f(z) = P(z)/Q(z)$ *con orden* $k \geq 1$ *si y solo si existe*

$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^k} \notin \{0, \infty\}$$

La demostración es una simple verificación que se realiza factorizando los polinomios primos entre sí $P(z)$ y $Q(z)$, y aplicando la definición de ceros y polos.

Hallemos la cantidad de preimágenes de $f(z) = P(z)/Q(z)$, es decir, dado un elemento $c \in \overline{\mathbb{C}}$ encontrar la cantidad de elementos $z \in \overline{\mathbb{C}}$ (contado cada uno con su multiplicidad) tales que:

$$z \in f^{-1}\{c\} \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = c$$

Notación: $f^{-1}\{c\}$ indica el conjunto preimagen por f del elemento c. No indica función inversa. Es solamente el conjunto, que podría hasta ser vacío, formado por todos los elementos del dominio de la función f cuyos correspondientes por f son c.

Si $c = \infty$, entonces por definición de polo, la cantidad de preimágenes de c es la cantidad de polos (contado cada uno con su orden), es decir

$$\#(f^{-1}\{\infty\}) = \text{máx}\{m, n\}$$

Si $c \in \mathbb{C}$, entonces la cantidad de preimágenes de c por f es la cantidad de ceros de la función racional $f(z)-c = (P(z)-cQ(z))/Q(z)$. El numerador y el denominador son primos entre sí porque lo son $P(z)$ y $Q(z)$. Entonces la cantidad de ceros de $f(z) - c$ es igual al máximo M de los grados de $P(z) - cQ(z)$ y $Q(z)$. Si $m \neq n$ entonces $M = \text{máx}\{m, n\}$. Si $m = n$ entonces el numerador $P(z) - cQ(z)$ tiene grado menor o igual que $m = n$; luego $M = \text{máx}\{m, n\}$. Se concluye que

$$\#(f^{-1}\{c\}) = \text{máx}\{m, n\}$$

Lo anterior demuestra la siguiente proposición:

Proposición 12.1.5. Cantidad de preimágenes por una función racional.

Sea $f(z) = P(z)/Q(z)$ una función racional, donde P y Q son polinomios primos entre sí de grados n y m respectivamente.

Para todo $c \in \overline{\mathbb{C}}$ la cantidad de preimágenes por f de c, contada cada una tantas veces como su multiplicidad, es

$$\#(f^{-1}\{c\}) = \text{máx}\{m, n\}$$

12.2. *Ceros de las funciones analíticas.*

Definición 12.2.1. Ceros de una función analítica.

Un cero de la función analítica $f \in H(\Omega)$ es un punto $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$.

Por el teorema de prolongación analítica, si f no es idénticamente nula en la componente conexa de Ω que contiene a a, entonces el cero a es aislado. (Ver corolario 5.2.2.)

Estudiaremos entonces los ceros de las funciones analíticas que no son idénticamente nulas en una región Ω.

Si a es un cero de f, desarrollando f en serie de potencias centrada en a en un disco $D_R(a) \subset \Omega$ con $R > 0$, como el coeficiente $a_0 = f(a) = 0$ se obtiene:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^n = (z-a)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^{n-k} = (z-a)^k g(z) \ \ \forall z \in D_R(a), \quad g(a) = a_k \neq 0 \qquad (1)$$

donde $a_k \neq 0,\ k \geq 1$ es el primer coeficiente del desarrollo que no es nulo. Existe tal a_k porque f no es idénticamente nula en $D_R(a)$. Y la función $g(z)$ es igual a la suma de la serie de potencias

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^{n-k} \quad \forall\, z \in D_R(a)$$

Luego g es analítica en $D_R(a)$ y además $g(a) = a_k \neq 0$.

Por otra parte, dividiendo (1) entre $(z-a)^k$ y tomando límite cuando $z \to a$ se obtiene que:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z-a)^k} = g(a) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad (2)$$

Además, siendo $a_k = f^{(k)}(a)/k!$, el número natural $k \geq 1$ que verifica (1) y (2) es el primer natural para el cual la derivada $k-$ésima de $f(z)$ en $z = a$ no es nula. (3)

Definición 12.2.2. Orden o multiplicidad de un cero.
Sea a un cero de la función analítica f no idénticamente nula en la región Ω. Se llama *multiplicidad u orden de* a al único entero $k \geq 1$ tal que:

$$f(z) = (z-a)^k g(z)$$

donde $g(z)$ es una función analítica en un disco $D_R(a)$ con $R > 0$, tal que

$$g(a) \neq 0$$

En resumen, el orden $k \geq 1$, o multiplicidad del cero a, es igual a:

- El único entero $k \geq 1$ tal que: $f(z) = (z-a)^k g(z)$, donde $g(z)$ es una función analítica en un disco $D_R(a)$ con $R > 0$, tal que $g(a) \neq 0$. (Por definición.)
- El lugar del primer coeficiente $a_k \neq 0$ del desarrollo en potencias de f centrado en a. (Por (1).)
- El único entero k tal que

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z-a)^k} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad \text{(Por (2).)}$$

- El primer natural para el cual la derivada $k-$ésima de $f(z)$ en $z = a$ no es cero. (Por (3).)

En particular, si a es un cero de f entonces $f'(a) \neq 0$ si y solo si el orden o multiplicidad de a es $k = 1$.

Definición 12.2.3. Ceros simples y múltiples.
Un cero aislado se llama simple si tiene orden o multiplicidad igual a 1, y se llama múltiple (doble, triple, etc) si tiene orden o multiplicidad ≥ 2 (2, 3, etc. respectivamente).

12.2.4. Ejemplos.
1. $f(z) = 2e^z - 2$ tiene un cero en cada $z = 2h\pi i$ donde h es entero. La derivada de $f(z)$ en $z = 2h\pi i$ es $2 \neq 0$. Luego, el orden del cero $2h\pi i$ es 1. Considerando el desarrollo en serie de potencias de $f(z)$ centrado en $z = 2h\pi i$ se obtiene:

$$f(z) = 2e^z - 2 = 2e^z e^{-2h\pi i} - 2 = 2e^{z-2h\pi i} - 2 = -2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(z-2h\pi i)^n}{n!} =$$

$$f(z) = (z - 2h\pi i) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(z-2h\pi i)^{n-1}}{n!}$$

(Se usó que el desarrollo en serie de potencias de e^u centrado en $u = 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty} u^n/n!$ ya que su coeficiente $n-$ésimo es $(e^u)^{(n)}|_{u=0}/n! = 1/n!$).

Luego la función analítica $g(z)$ tal que $g(2\pi hi) \neq 0$ y que cumple $f(z) = (z - 2\pi hi)g(z)$ es

$$g(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - 2h\pi i)^{n-1}}{n!}, \qquad g(2\pi hi) = 2$$

Se obtiene

$$\lim_{z\to 2h\pi i} \frac{2e^z - 2}{z - 2\pi hi} = g(2\pi hi) = 2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

2. La función $2Log_{(-\pi,\pi]}(z)$ tiene un cero en $z = 1$. Como su derivada en $z = 1$ es $2/z|_{z=1} = 2 \neq 0$ entonces el orden del cero $z = 1$ es $k = 1$.

3. La función polinómica $f(z) = (z^2 + 4)^2$ tiene dos ceros $z = 2i$ y $z = -2i$ que son las únicas raíces del polinomio. El orden de ambas raíces es 2 ya que $f(z) = (z - 2i)^2(z + 2i)^2$, luego $f(z) = (z - 2i)^2 g_1(z)$ con g_1 analítica que no se anula en $z = 2i$ y $f(z) = (z + 2i)^2 g_2(z)$ con g_2 analítica que no se anula en $z = -2i$. En general: los ceros de un polinomio son sus raíces, y el orden o multiplicidad de cada cero es la multiplicidad de la raíz.

Algunos resultados relativos a los ceros de funciones analíticas.

En la sección 10 se exponen algunos resultados relativos a la existencia o inexistencia de ceros de funciones analíticas, más precisamente en el lema de Swchartz (ver lema 10.1.3) y en los ejercicios 10.1.2, 10.3.3, 10.4.3, y 10.4.4.

Otros resultados se exponen en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 12.2.5. Comparación de funciones enteras.

Sean f y g funciones enteras tales que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

a) *Probar que si g tiene un cero de orden m en a entonces f tiene un cero en a que, si f no es idénticamente nula, tiene orden $n \geq m$.*

b) *Deducir que $f(z) = kg(z)$ con k constante de módulo menor o igual que 1.*

Parte a): Si $g(a) = 0$ y $|f(a)| \leq |g(a)| = 0$ entonces $f(a) = 0$. Por lo tanto todo cero de g es un cero de f.

Si a es un cero de g con orden $m \geq 1$ entonces

$$g(z) = (z - a)^m h(z)$$

con $h(a) \neq 0$. Sea

$$L_m = \lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z - a)^m}$$

Se cumple

$$|L_m| = \lim_{z\to a} \frac{|f(z)|}{|z - a|^m} \leq \lim_{z\to a} \frac{|g(z)|}{|z - a|^m} = |h(a)| \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad L_m \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Sea n el orden de $z = a$ como cero de f. Se cumple:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z - a)^n} = L_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Entonces, para todo $h > n$ se cumple:

$$L_h = \lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z-a)^h} = \lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z-a)^n} \; \frac{1}{(z-a)^{h-n}} = L_n \lim_{z\to a} \frac{1}{(z-a)^{h-n}} = \infty$$

En resumen, hemos probado que $L_h = \infty$ para todo $h > n$. Por otro lado en (1) teníamos $L_m \in \mathbb{C}$. Esto implica que $m \leq n$ como queríamos probar.

Parte b) Sea la función

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

analítica excepto en los ceros de la función g.

Tomemos un cero a cualquiera de g. Por la parte a) sea m el orden de a como cero de g y sea $n \geq m$ el orden de a como cero de f. Se cumple:

$$f(z) = (z-a)^n f_1(z), \quad f_1 \in H(\mathbb{C}), \quad f_1(a) \neq 0$$

$$g(z) = (z-a)^m g_1(z), \quad g_1 \in H(\mathbb{C}), \quad g_1(a) \neq 0$$

Luego

$$\lim_{z\to a} h(z) = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^{n-m} f_1(z)}{g_1(z)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} \; \lim_{z\to a} (z-a)^{n-m} = L \in \mathbb{C}$$

(Si $n > m$ entonces $L = 0$, y si $n = m$ entonces $L \neq 0$.)

Entonces $\lim_{z\to a} (z-a)h(z) = 0 \cdot L = 0$, y aplicando el teorema de Cauchy-Goursat extendido (ver teorema 11.3.3), la función h se extiende a una función analítica en $z = a$. Esto vale para cualquier cero a de la función g. Luego h es entera.

Como por hipótesis el módulo de h está acotado superiormente por 1, aplicando el teorema de Liouville (ver teorema 11.4.6), la función h es igual a una constante k con $|k| \leq 1$. Luego

$$f(z) = kg(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{donde } k \text{ es una constante con } |k| \leq 1. \quad \square$$

Ejercicio 12.2.6. Regla de L'Hôpital. *Sean f y g analíticas en una región Ω y no idénticamente nulas. Sea a un cero de f y de g. Probar que*

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Sea n el orden de a como cero de f, y sea m el orden a a como cero de g. Y sea $D \subset \Omega$ un disco abierto centrado en a. Llamando a_j a los coeficientes del desarrollo en potencias de $z-a$ de la función f y llamando b_j a los del desarrollo de la función g, tenemos:

$$f(z) = (z-a)^n f_1(z) = (z-a)^n \sum_{j=n}^{\infty} a_j (z-a)^{j-n}, \qquad f_1(a) = a_n \neq 0. \qquad (1)$$

$$g(z) = (z-a)^m g_1(z) = (z-a)^m \sum_{j=m}^{\infty} b_j (z-a)^{j-m}, \qquad g_1(a) = b_m \neq 0. \qquad (2)$$

$$f'(z) = \sum_{j=n}^{\infty} j a_j (z-a)^{j-1} = (z-a)^{n-1} \sum_{j=n}^{\infty} j a_j (z-a)^{j-n}. \qquad (3)$$

$$g'(z) = \sum_{j=m}^{\infty} jb_j(z-a)^{j-1} = (z-a)^{m-1} \sum_{j=m}^{\infty} jb_j(z-a)^{j-m}. \qquad (4)$$

Primer caso: $n = m$ Usando (1), (2), (3) y (4) se deduce:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^n f_1(z)}{(z-a)^n g_1(z)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} = \frac{a_n}{b_n} =$$

$$= \frac{na_n}{nb_n} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^{n-1}}{(z-a)^{n-1}} \cdot \frac{na_n}{nb_n} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Segundo caso: $n > m$ Usando (1), (2), (3) y (4) se deduce:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^n f_1(z)}{(z-a)^m g_1(z)} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^{n-m} f_1(z)}{g_1(z)} = 0 \cdot \frac{a_n}{b_m} = 0$$

$$0 = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^{n-1}}{(z-a)^{m-1}} \frac{na_n}{mb_m} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Tercer caso: $n < m$ Usando (1), (2), (3) y (4) se deduce:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^n f_1(z)}{(z-a)^m g_1(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f_1(z)}{(z-a)^{m-n} g_1(z)} = \infty \cdot \frac{a_n}{b_m} = \infty$$

$$\infty = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^{n-1}}{(z-a)^{m-1}} \frac{na_n}{mb_m} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} \qquad \square$$

12.3. *Clasificación de las singularidades aisladas.*

En lo que sigue dado $a \in \mathbb{C}$ denotamos para $R > 0$ con

$$D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$$

al disco abierto de centro a y radio $R > 0$, y denotamos con

$$D^*_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$$

al disco abierto pinchado de centro a y radio $R > 0$, es decir el conjunto que resulta del disco abierto $D_R(a)$ retirando su centro a. Denotamos con

$$D_{1/R}(\infty) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

al entorno abierto en $\overline{\mathbb{C}}$ de centro ∞ y radio $1/R$. Denotamos con

$$D^*_{1/R}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

al entorno abierto pinchado de ∞ con radio $1/R$, es decir al conjunto que resulta del entorno $D_{1/R}(\infty)$ en $\overline{\mathbb{C}}$ retirando su centro ∞.

Definición 12.3.1. Singularidad aislada. Un punto $a \in \mathbb{C}$ se dice que es *una singularidad de* f si f o bien no está definida en $z = a$, o bien está definida y no es analítica en ningún entorno de a (por ejemplo si es discontinua en a).

Se dice que una singularidad de f es *una singularidad aislada* si $f \in H(D^*_R(a))$ para algún entorno pinchado $D^*_R(a)$ de a con radio $R > 0$.

El punto ∞ del plano complejo compactificado se dice que es *una singularidad aislada de* f si $f \in H(D^*_{1/R}(\infty))$ para algún entorno pinchado $D^*_{1/R}(\infty)$ con radio $1/R > 0$.

12.3.2. Ejemplos.

1) La función $Log_{(-\pi,\pi]}z$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ no tiene singularidades aisladas.

2) Si $f(z)$ es holomorfa en Ω y $z_0 \in \Omega$, entonces la función $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$ y por lo tanto tiene en z_0 una singularidad aislada.

3) Los polos de las funciones racionales son singularidades aisladas.

4) La función e^z tiene en ∞ una singularidad aislada.

5) La función $e^{1/z}$ tiene en 0 una singularidad aislada.

6) Si f es holomorfa en la región Ω y no es idénticamente nula, entonces los ceros de f son aislados. (Ver corolario 11.1.8.) Luego la función $1/f$ es holomorfa en $\Omega \setminus Z$ donde Z es el conjunto de ceros de f, y tiene en cada punto de Z una singularidad aislada.

Definición 12.3.3. Clasificación de las singularidades aisladas.

Dada una singularidad aislada $a \in \mathbb{C}$ de f, se define:

- a es *singularidad evitable de* f si $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$.
- a es *un polo de* f si $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.
- a es *una singularidad esencial de* f si no existe $\lim_{z\to a} f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

Dado ∞ singularidad aislada de f se define:

- ∞ es *singularidad evitable de* f si $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$.
- ∞ es *un polo de* f si $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.
- ∞ es *una singularidad esencial de* f si no existe $\lim_{z\to\infty} f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

12.3.4. Ejemplos.

1) Los polos de una función racional son polos también según la definición anterior.

2) Si $f(z)$ es holomorfa en la región Ω y no es idénticamente nula, entonces $1/f(z)$ es holomorfa en $\Omega \setminus Z$ donde Z es el conjunto de ceros de f. Cada cero a de f es un polo de $1/f$. En efecto, si $k \geq 1$ es el orden del cero a de f, entonces $f(z) = (z - a)^k g(z)$ con g analítica y $g(a) \neq 0$. Luego $1/f = 1/((z - a)^k g(z)) \to \infty$ cuando $z \to a$.

3) Si f es holomorfa en Ω y $z_0 \in \Omega$ entonces $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ tiene en z_0 una singularidad evitable.

4) La función e^z tiene en ∞ una singularidad esencial.

5) La función $e^{1/z}$ tiene en 0 una singularidad esencial.

6) Los polinomios de grado $n \geq 1$ tienen en ∞ un polo.

El siguiente teorema identifica una singularidad evitable a como aquella que es singularidad sólo porque faltó definir en forma adecuada la función f en ese punto. Definiendo adecuadamente $f(a)$, entonces a deja de ser una singularidad de f.

Teorema 12.3.5. Caracterización de las singularidades evitables.

a) *Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *a es singularidad evitable de f.*

ii) *$f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$ para algún $R > 0$.*

iii) $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$.

iv) *f admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$ para algún $R > 0$*

b) *Sea ∞ una singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *∞ es singularidad evitable de f.*

ii) *$f(z)$ es acotada en $D^*_{1/R}(\infty)$ para algún $R > 0$.*

i) $\lim_{z\to\infty} f(z)/z = 0$.

Demostración.

Parte a) A lo largo de la prueba, aplicando la definición de singularidad aislada, sea $D^*_R(a)$ con $R > 0$ el disco pinchado donde f es holomorfa.

Probemos que *i)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* $\Rightarrow$ *iv)* $\Rightarrow$ *i)*

Prueba de que i) $\Rightarrow$ ii): Por hipótesis existe $\lim_{z\to a} f(z)$. Luego, por definición de límite, f es acotada en $D^*_R(a)$, como queríamos demostrar.

Prueba de que ii) $\Rightarrow$ iii): Por hipótesis f es acotada en $D^*_R(a)$. Luego, como $(z-a) \to 0$ cuando $z \to a$, se obtiene $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$, como queríamos demostrar.

Prueba de que iii) $\Rightarrow$ iv): Por hipótesis $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$. Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat extendido (ver teorema 11.3.3) se deduce que existe una extensión holomorfa de f a $D_R(a)$, como queríamos demostrar.

Prueba de que iv) $\Rightarrow$ i): Por hipótesis existe una extensión holomorfa g de f a $D_R(a)$. Entonces $g(z) = f(z)\ \ \forall\, z \in D^*_R(a)$ y además $g(z) \in \mathbb{C}$ está definida y es continua en $z = a$. Luego $\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} g(z) = g(a) \in \mathbb{C}$. Concluimos que existe en $\mathbb{C}$ el límite de $f(z)$ cuando $z \to a$, como queríamos demostrar.

Parte b) Aplicando la definición de singularidad aislada en ∞, sea $D^*_{1/R}(\infty)$ con $R > 0$ el entorno pinchado de ∞ donde f es holomorfa.

Consideremos la función auxiliar $g(w) = f(1/w)$ definida y holomorfa para todo $w \in D^*_{1/R}(0)$. En efecto:

$$z = 1/w \in D^*_{1/R}(\infty) \ \Leftrightarrow\ \left|\frac{1}{w}\right| = |z| > R \ \Leftrightarrow\ 0 < |w| < \frac{1}{R} \ \Leftrightarrow\ w \in D^*_{1/R}(0)$$

Entonces 0 es una singularidad aislada de g. Se observa que ∞ es singularidad evitable de f si y solo si 0 es singularidad evitable de g. Aplicando la parte a) ya demostrada, esto es equivalente a:

$$g(w) \text{ acotada } \forall w \in D^*_{1/R}(0) \ \Leftrightarrow f(z) = g(w) \text{ para } z = \frac{1}{w} \text{ es acotada } \forall z \in D^*_{1/R}(\infty)$$

Análogamente:

$$\lim_{w \to 0} wg(w) = 0 \;\Leftrightarrow f(z) = g(w) \text{ para } z = \frac{1}{w} \text{ cumple } \lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z} = 0 \quad \square$$

12.4. *Polos complejos y en ∞.*

Teorema 12.4.1. Caracterización de los polos complejos.
Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) *a es un polo de f.*

ii) *Para un primer natural $k \geq 1$ la función $(z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$ para algún $R > 0$. En consecuencia a es una singularidad evitable de $(z-a)^k f(z)$.*

iii) *Para un primer natural $k \geq 1$ la función $(z-a)^k f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$ para algún $R > 0$.*

iv) *Para un primer natural $k \geq 1$ existe*

$$\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) \notin \{0, \infty\}$$

En consecuencia

$$0 \leq n < k \;\Rightarrow\; \lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) = \infty$$

$$n > k \;\Rightarrow\; \lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) = 0$$

v) *La función $1/f(z)$ tiene una extensión analítica en un entorno de $z = a$, y $z = a$ es un cero de orden $k \geq 1$ de la extensión analítica de $1/f$.*

Demostración: A lo largo de la prueba, aplicando la definición de singularidad aislada, sea $D^*_R(a)$ con $R > 0$ el disco pinchado donde f es holomorfa.

Probaremos que $i) \Rightarrow v) \Rightarrow iv) \Rightarrow iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i)$.

i) $\Rightarrow$ v): Por hipótesis $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$. Entonces $f(z) \neq 0 \;\; \forall\, z \in D^*_r(a)$ para cierto $0 < r < R$. Definamos la función h:

$$h(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall z \in D^*_r(a)$$

h es holomorfa en $D^*_r(a)$ porque es el cociente de dos funciones holomorfas que no se anulan. Luego h también tiene en a una singularidad aislada.

Además $\lim_{z \to a} h(z) = \lim_{z \to a} 1/f(z) = 0$. Por lo tanto, a es una singularidad evitable de h. Definiendo $h(a) = 0$ se tiene $h \in H(D_r(a))$. Por construcción a es un cero aislado de h y por lo tanto tiene un orden $k \geq 1$.

v) $\Rightarrow$ iv):

Escribiendo el desarrollo en serie de potencias centrada en a de la función h, extensión analítica $1/f$, se obtiene:

$$h(z) = \sum_{n=k} a_n (z-a)^n = (z-a)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^{n-k} \quad \forall z \in D_r(a)$$

donde $k \geq 1$ es el primer tal que $a_k \neq 0$. Existe tal $k \geq 1$ porque, si bien $h(a) = a_0 = 0$, la función $h(z) = 1/f(z)$ no se anula en ningún otro punto de $D_r(a)$, luego su desarrollo en serie de potencias no puede ser idénticamente nulo.

Consideremos entonces:

$$\lim_{z \to a} \frac{1}{(z-a)^k f(z)} = \lim_{z \to a} \frac{h(z)}{(z-a)^k} = a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Luego

$$\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) = \frac{1}{a_k} \notin \{\infty, 0\} \qquad (1)$$

como queríamos demostrar. Las consecuencias enunciadas en la tesis (iv) son inmediatas a partir de (1), escribiendo:

$$(z-a)^n f(z) = (z-a)^{n-k}(z-a)^k f(z)$$

iv) $\Rightarrow$ iii): Por hipótesis

$$\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) = L \notin \{\infty, 0\}$$

Luego, por definición de límite $(z-a)^k f(z)$ es acotada en un disco $D_r^*(a)$.

iii) $\Rightarrow$ ii): Sea $g(z) = (z-a)^k f(z)$. Por hipótesis $g(z)$ es acotada en un disco $D_r^*(a)$. Luego

$$\lim_{z \to a} (z-a) g(z) = 0$$

Usando el teorema de caracterización de las singularidades evitables (ver teorema 12.3.5), el punto a es una singularidad evitable de $g(z)$, y por lo tanto $g(z) = (z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_r(a)$ como queríamos demostrar.

ii) $\Rightarrow$ i): Por hipótesis existe $k \geq 1$ que es el primer natural tal que $g(z) = (z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_r(a)$. Entonces $\lim_{z \to a} g(z) = g(a) = L \in \mathbb{C}$.

Afirmación: $L \neq 0$. En efecto, por absurdo si fuera $L = 0$, entonces

$$\lim_{z \to a} (z-a)(z-a)^{k-1} f(z) = 0$$

Como resultado de aplicar el teorema 12.3.5 a la función $(z-a)^{k-1} f(z)$, esta tendría en a una singularidad evitable, y por lo tanto una extensión holomorfa a $D_r(a)$. Entonces no sería k el primer natural tal que $(z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa al disco. Hemos probado la afirmación.

Luego, como existe $\lim_{z \to a} g(z) = L \neq 0$ se deduce:

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{g(z)}{(z-a)^k} = \infty$$

y por definición a es un polo de f como queríamos demostrar. $\square$

Teorema 12.4.2. Caracterización de polo en ∞.

Sea ∞ singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) ∞ *es un polo de f.*

ii) *Para un primer natural $k \geq 1$ la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D^*_{1/R}(\infty)$ para algún $R > 0$.*

iii) *Para un primer natural $k \geq 1$ existe*

$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^k} \notin \{0, \infty\}$$

En consecuencia

$$0 \leq n < k \ \Rightarrow \ \lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^n} = \infty$$

$$n > k \ \Rightarrow \ \lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$$

Demostración: Aplicando la definición de singularidad aislada en ∞, sea $D^*_{1/R}(\infty)$ con $R > 0$ el entorno pinchado de ∞ donde f es holomorfa.

Análogamente a la demostración de la parte b) del teorema 12.3.5 consideremos la función auxiliar $g(w) = f(1/w)$ definida y holomorfa para todo $w \in D^*_{1/R}(0)$.

Se observa que ∞ es un polo de f si y solo si 0 es un polo de g. Aplicando el teorema 12.4.1, esto es equivalente a:

$$w^k g(w) \text{ acotada } \forall w \in D^*_{1/R}(0) \ \Leftrightarrow \ \frac{f(z)}{z^k} = w^k g(w) \text{ para } z = \frac{1}{w} \text{ es acotada } \forall z \in D^*_{1/R}(\infty)$$

Análogamente:

$$\lim_{w \to 0} w^k g(w) = L \ \Leftrightarrow \ \frac{f(z)}{z^k} = w^k g(w) \text{ para } z = \frac{1}{w} \text{ cumple } \lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^k} = L \quad \square$$

Definición 12.4.3. Orden de un polo.

a) En virtud del teorema 12.4.1, el orden o multiplicidad $k \geq 1$ de un polo $a \in \mathbb{C}$ de f es:

- El primer natural $k \geq 1$ tal que la función $(z-a)^k f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$ para algún $R > 0$.
- El orden o multiplicidad de a como cero de la función analítica que extiende a $1/f$ a un entorno de a.
- El primer $k \geq 1$ tal que la función $(z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$.
- El único número entero k tal que $\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) \notin \{0, \infty\}$.

  En consecuencia: $0 \leq n < k \ \Rightarrow \ \lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) = \infty$;

  $n > k \ \Rightarrow \ \lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) = 0$.

b) En virtud del teorema 12.4.2, el orden o multiplicidad $k \geq 1$ del polo ∞ de f es

- El primer natural $k \geq 1$ tal que la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D^*_{1/R}(\infty)$ para algún $R > 0$ (por definición)
- El único entero k tal que $\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^k} \notin \{0, \infty\}$.

  En consecuencia $0 \leq n < k \ \Rightarrow \ \lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^n} = \infty$; $\qquad n > k \ \Rightarrow \ \lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$.

- El orden de $z = 0$ como polo de la función $f(1/z)$.

Definición 12.4.4. Polos simples y múltiples.
Un polo se llama simple si tiene orden 1, y se llama múltiple (doble, triple, etc) si tiene orden ≥ 2 (2, 3, etc. respectivamente).

12.4.5. Ejemplos:

1) Si $f \in H(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$ es tal que $f'(z_0) \neq 0$ entonces $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)^2$ tiene en z_0 un polo simple.

2) Un polo de multiplicidad k de una función racional es un polo de orden k también de acuerdo a la definición anterior.

3) Los polinomios de grado $n \geq 1$ tienen en ∞ un polo de orden n.

4) Si $f \in H(\Omega)$ donde Ω es una región, no es idénticamente nula, entonces un cero de orden k de f es un polo de orden k de la función $1/f(z)$ y recíprocamente.

5) Se define la función $\operatorname{sen} z$ para z complejo, como la función $(e^{iz} - e^{-iz})/2i$. Es una función entera.

Sea $f(z) = 1/\operatorname{sen}(z)$. Encontremos y clasifiquemos todas las singularidades de f. Tiene singularidades en ∞ y donde se anula el denominador $\operatorname{sen}(z)$. Estudiemos después la singularidad en ∞ y primero las singularidades complejas, donde se anula $\operatorname{sen}(z)$. Son aisladas y son polos, porque son los ceros de la función entera $\operatorname{sen}(z)$ no idénticamente nula. Hallemos todos esos polos y sus órdenes.

$\operatorname{sen}(z) = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz}$. Sustituyendo $z = x + iy$, con x e y reales, se obtiene:

$$e^{ix-y} = e^{-ix+y} \quad \Rightarrow e^{-y} = |e^{ix-y}| = |e^{-ix+y}| = e^{y}, \quad e^{ix} = e^{-ix}$$

Por un lado la igualdad $e^{-y} = e^y$ se cumple para todo y real tal que $e^y - e^{-y} = 0$. Recordando que el seno hiperbólico de y es $\operatorname{senh}(y) = (e^y - e^{-y})/2$ los valores de y buscados son los que anulan el $\operatorname{senh}(y)$ o sea $y = 0$. Por lo tanto los complejos z buscados tienen todos parte imaginaria nula.

Ahora encontremos los valores de la parte real x que cumplen $e^{ix} = e^{-ix}$. Esto es: $\cos x + i \operatorname{sen} x = \cos x - i \operatorname{sen} x$. Luego $\operatorname{sen} x = 0$. Esto se cumple si y solo si $x = k\pi$ con k entero cualquiera.

En definitiva los polos de $f(z)$, que son los ceros de $\operatorname{sen}(z)$, son los números reales $z = k\pi$ con k entero.

Para hallar el orden de $k\pi$ como polo de f recordemos que es el orden de $k\pi$ como cero de $\operatorname{sen} z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. La derivada es $\operatorname{sen}'(z) = (ie^{iz} + ie^{-iz})/2i = (e^{iz} + e^{-iz})/2$. (Esta última función se define como $\cos z$ con z complejo.)

En $z = k\pi$ la derivada es $\operatorname{sen}'(k\pi) = (e^{ik\pi} + e^{-ik\pi})/2 = \cos(k\pi) = \pm 1 \neq 0$. Luego el orden de todos los ceros de $\operatorname{sen}(z)$ es 1, y entonces el orden de todos los polos complejos de f es 1.

Ahora clasifiquemos la singularidad en ∞. No es una singularidad aislada porque entre los polos complejos $k\pi$ (con k entero cualquiera) que encontramos antes, hay infinitos de ellos que están en el entorno $D^*_{1/R}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. En efecto, todos los valores enteros de k tales que $|k\pi| > R$ dan puntos $k\pi$ en $D^*_{1/R}(\infty)$ donde la función f no es holomorfa. Entonces ∞ es singularidad no aislada de f.

12.5. *Singularidades esenciales.*

Proposición 12.5.1. Caracterización de las singularidades esenciales.

a) *Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f. Sea $D^*_R(a)$ el disco pinchado de radio $R > 0$ donde f es holomorfa. Entonces son equivalentes:*

i) *a es una singularidad esencial de f.*

ii) *Para ningún natural $k \geq 0$ la función $(z-a)^k f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$.*

iii) *Para ningún natural $k \geq 0$ la función $(z-a)^k f(z)$ admite extensión holomorfa a $D_R(a)$.*

iv) *Para ningún natural $k \geq 0$ existe $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.*

b) *Sea ∞ singularidad aislada de f. Sea $D^*_{1/R}(\infty)$ el entorno pinchado de ∞ donde f es holomorfa. Entonces son equivalentes:*

i) *∞ es una singularidad esencial de f.*

ii) *Para ningún natural $k \geq 0$ la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D^*_R(a)$.*

iii) *Para ningún natural $k \geq 0$ existe $\lim_{z\to\infty} f(z)/z^k$ en $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demostración: Basta recordar que por definición una singularidad aislada es esencial si no es evitable ni polo. Aplicando los teoremas de caracterización de singularidades evitables y de polos (teoremas 12.3.5, 12.4.1 y 12.4.2) es equivalente que la singularidad sea esencial a que no se cumpla alguna de las afirmaciones de esos teoremas. Por lo tanto, se cumple la contraria, que es la expuesta en cada una de las afirmaciones de este corolario. □

Teorema 12.5.2. Teorema de Weierstrass-Casorati.

Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ una singularidad esencial de f y sea $D^*(a)$ un disco pinchado de a donde f es holomorfa.

El conjunto imagen $f(D^*(a))$ es denso en $\mathbb{C}$, es decir todo punto $w \in \mathbb{C}$ es el límite de alguna sucesión de puntos $w_n \in f(D^*(a))$. Precisamente:

$$\forall\, w \in \mathbb{C} \ \text{ existe } z_n \in D^*(a) \quad \text{tal que} \quad \lim_{n\to+\infty} f(z_n) = w \quad (1)$$

Nota: Es válida una versión más fuerte del teorema anterior, llamado Teorema de Picard, cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 12.5.3. Teorema de Picard. *Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ una singularidad esencial de f y sea $D^*(a)$ un disco pinchado de a donde f es holomorfa. Entonces el conjunto imagen $f(D^*(a))$ es todo el conjunto $\mathbb{C}$ excepto a lo sumo un punto.*

Demostración del teorema 12.5.2:

Por hipótesis a es una singularidad esencial de f. Hay que probar que se cumple (1). Basta probar que

$$\forall\, w \in \mathbb{C} \ \inf_{z\in D^*(a)} |f(z) - w| = 0 \quad (2)$$

En efecto, si se cumple (2) entonces para todo $n \geq 1$ el ínfimo de (2) es menor $1/n$ y, por definición de ínfimo, existe algún $z_n \in D^*(a)$ tal que $|f(z_n) - w| < 1/n$. Entonces $f(z_n) \to w$ y se cumple (1) como queremos demostrar.

Demostración de (2): Supongamos por absurdo que para algún $w_0 \in \mathbb{C}$ se cumple $\inf_{z \in D^*(a)} |f(z) - w_0| = r > 0$. Entonces la función auxiliar

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \quad \forall z \in D^*(a)$$

sería holomorfa en $D^*(a)$ y acotada superiormente por $1/r$. Luego, a sería una singularidad aislada de g y por el teorema 12.3.5 sería una singularidad evitable. Luego existiría $\lim_{z \to a} g(z)$. Entonces también existiría

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \left(w_0 + \frac{1}{g(z)} \right)$$

(pudiendo ser este límite igual a ∞, si $g(z) \to 0$ cuando $z \to a$). Por definición a no sería singularidad esencial de f contradiciendo la hipótesis. $\square$

13. Series de Laurent.

13.1. *Definición de serie de Laurent y corona de convergencia.*

Definición 13.1.1. Serie de Laurent.

Se llama serie de Laurent centrada en $z = z_0$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (1)$$

donde a_n y a_{-n} son complejos constantes (independientes de z). Se dice que la serie de Laurent converge puntualmente para todo $z \in K$ (converge absolutamente para todo $z \in K$; converge uniformemente en K) cuando ambas series que la forman convergen puntualmente para todo $z \in K$ (resp. convergen absolutamente para todo $z \in K$; convergen uniformemente en K).

Cuando converge, se llama suma de la serie (1) a $A + B$ donde A y B son respectivamente las sumas de las dos series que forman (1).

La serie (1) se escribe como

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Definición 13.1.2. Corona de centro z_0.

Dado un complejo z_0 y dados $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, se llama corona abierta centrada en z_0 de radio interno R_1 y radio externo R_2, denotada como $D(z_0, R_1, R_2)$, al siguiente conjunto de complejos:

$$D(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$$

Se observa que el radio externo puede ser $R_2 = \infty$ con lo que la corona se transforma en al complemento del disco cerrado de centro z_0 y radio R_1.

Se observa que el radio interno puede ser $R_1 = 0$ con lo que la corona se transforma en el disco pinchado de centro z_0 y radio R_2 o, si $R_2 = \infty$ en el plano complejo excepto z_0.

Nota 13.1.3. Corona de convergencia de una serie de Laurent.

Dada una serie de Laurent como en la definición 13.1.1:

i) La mayor corona $D(z_0, R_1, R_2)$ posible donde converge puntualmente (corona de convergencia), que coincide con el mayor abierto posible donde converge puntualmente la serie, se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad R_1 = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \quad (2)$$

ii) Además para todo punto $z \in D(z_0, R_1, R_2)$ la convergencia de la serie de Laurent es absoluta, y es uniforme en cualquier compacto $K \subset D(z_0, R_1, R_2)$.

Advertencia: Dada una serie de Laurent cualquiera, (que no provenga del desarrollo de una función holomorfa como en el teorema 13.2.1), puede suceder que las fórmulas de (1) conduzcan a radios tales que $R_1 \geq R_2$. En ese caso la corona de convergencia es vacía.

Demostración de i) y ii): Por los resultados previos sobre serie de potencias (ver el parágrafo 11.1.2), el abierto más grande posible donde converge la serie de la derecha en la definición 13.1.1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es el disco de convergencia con radio R_2 calculado según la fórmula (2).

Por otro lado, el abierto más grande posible donde converge la serie de izquierda en la definición 13.1.1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \qquad \text{donde } w = \frac{1}{z - z_0}$$

es

$$\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{1}{z - z_0} \right| = |w| < \frac{1}{\operatorname{lím\,sup}_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}} \}$$

Luego, converge para todo z tal que $|z - z_0| > R_1$ donde R_1 es el radio calculado según la fórmula (2).

Por lo tanto el máximo conjunto abierto donde la serie de Laurent converge es la corona $D(z_0, R_1, R_2)$.

Además, por las propiedades de los discos de convergencia de series de potencias (ver parágrafo 11.1.2), para todo punto $z \in D(z_0, R_1, R_2)$ la convergencia de la serie de Laurent es absoluta, y es uniforme en cualquier compacto $K \subset D(z_0, R_1, R_2)$. $\square$

13.2. *Desarrollo en serie de Laurent.*

Teorema 13.2.1. Construcción del desarrollo en serie de Laurent de una función analítica en una corona.

Sea f una función analítica en la corona $D(z_0, R_1, R_2)$ (ver definición 13.1.2). *Entonces existe una serie de Laurent tal que*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in D(z_0, R_1, R_2) \quad (3)$$

(Esta notación indica que la serie de Laurent en (3) es convergente puntualmente para todo $z \in D(z_0, R_1, R_2)$ y su suma coincide con $f(z)$).

Además

a) *La serie de Laurent que cumple* (3) *es única y sus coeficientes son:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D(z_0, R_1, R_2)$ tal que $Ind_\gamma(z_0) = 1$.

b) *La serie de Laurent que cumple* (3) *converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto $K \subset D(z_0, R_1, R_2)$.*

Demostración del teorema 13.2.1.
Primero, admitiendo que se cumple la igualdad

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall\, z \in D(z_0, R_1, R_2) \quad (3)$$

probemos las afirmaciones b) y a) de la tesis del teorema. Finalmente demostraremos que existe una serie de Laurent que cumple la igualdad (3).

Prueba de b) Si la serie cumple (3), entonces converge puntualmente para todo $z \in D(z_0, R_1, R_2)$. Por lo demostrado en la parte ii) del parágrafo 13.1.3 la serie converge uniformemente en cualquier compacto contenido en $D(z_0, R_1, R_2)$ y absolutamente en cada punto de esa corona.

Prueba de a) Para probar la unicidad basta demostrar que si una serie de Laurent cumple (3) entonces sus coeficientes están determinados en forma única a partir de la función dada $f(z)$, por la siguiente fórmula de la tesis a):

Fórmula a probar: $$a_h = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{h+1}}\,dz \quad \forall h \in \mathbb{Z} \qquad (4)$$

Calculemos

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{h+1}} = I$$

con h entero fijo cualquiera, a lo largo de una curva cerrada γ cualquiera, contenida en $D(z_0, R_1, R_2)$ y que de una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de z_0.

Afirmación I): El valor de la integral I no depende de la curva γ elegida. En efecto, si γ_1 y γ_2 son dos de tales curvas, tomemos un segmento S contenido en $D(z_0, R_1, R_2)$ que vaya del punto $z_1 \in \gamma_1$ al punto $z_2 \in \gamma_2$. La curva cerrada $\Gamma = \gamma_1 + S - \gamma_2 - S$ es homotópica a un punto en $D(z_0, R_1, R_2)$. Entonces, siendo por hipótesis $f(z)/(z-z_0)^{h+1}$ holomorfa para todo $z \in D(z_0, R_1, R_2)$, se cumple que es nula su integral a lo largo de Γ. (Teorema de Cauchy global). Luego, la integral de $f(z)/(z-z_0)^{h+1}$ a lo largo de γ_1 es igual a su integral a lo largo de γ_2, como habíamos afirmado.

Ahora calculemos la integral I, usando la igualdad (3):

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{h+1}}\,dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-h-1} \right) dz \qquad (5)$$

La serie de Laurent dentro del integrando en (5) converge uniformemente en γ^*, porque γ^* es compacto y por lo demostrado en el punto ii) del parágrafo 13.1.3. Luego, se puede aplicar el teorema de convergencia uniforme e integración:

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-h-1} \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_\gamma a_n(z-z_0)^{n-h-1}\,dz \qquad (6)$$

Recodando que $\int_\gamma (z-z_0)^m\,dz = 0$ si $m \neq -1$ y que $\int_\gamma (z-z_0)^{-1}\,dz = 2\pi i$, se calculan las integrales en (6). Quedan todas nulas excepto una: la que tiene coeficiente a_n, con n entero tal que el exponente $n-h-1=-1$; es decir $n=h$.

Sustituyendo en (6) y en (5) se deduce:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{h+1}}\,dz = 2\pi i a_h, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{Z}$$

que es la fórmula (4) como queríamos demostrar.

Prueba de existencia de una serie de Laurent que cumple (3):

Fijemos $z_0 \in D(a, R_1, R_2)$ donde f es analítica por hipótesis. Fijemos dos números reales $r_1 < r_2$ tales que

$$0 \leq R_1 < r_1 < |z_0 - a| < r_2 < R_2 \leq +\infty$$

Denotamos C_1 y C_2 a las circunferencias con centro a y radios r_1 y r_2 respectivamente, recorridas una sola vez en sentido antihorario. Definimos para todo $w \notin C_1^* \cup C_2^*$ (en particular para $w = z_0$), la función:

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-w}\,dz \qquad (8)$$

Enunciamos las siguientes afirmaciones:

Afirmación II): La función $g(w)$ definida en (8) cumple:

$$g(w) = f(w) \quad \forall w \in D(a, r_1, r_2), \quad \text{en particular para } w = z_0$$

Afirmación III): La función $g(w)$ definida en (8) cumple:

$$\forall\, w \in D(a, r_1, r_2): \quad g(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,(w-a)^n, \quad \text{en particular para } w = z_0,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad \text{si } n \geq 0; \qquad \text{y} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad \text{si } n \leq -1$$

Observamos que estos coeficientes a_n son independientes de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias C_1 y C_2 elegidas, en virtud de lo demostrado en la afirmación I). Por lo tanto los coeficientes a_n son independientes del punto z_0 fijado a priori en $D(a, R_1, R_2)$. Entonces, una vez probadas las afirmaciones II) y III), deducimos de ellas que

$$\forall\, z_0 \in D(a, R_1, R_2): \quad f(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,(z_0-a)^n$$

Esta es la igualdad (3) que queríamos demostrar. Basta pues probar las afirmaciones (II) y (III).

Prueba de la afirmación II): En lo que sigue hágase un dibujo. Sea $w \in D(a, r_1, r_2)$. En particular w puede ser z_0. Consideremos un segmento $S = [z_1, z_2]$ que esté contenido en

$D(a, R_1, R_2)$, que no pase por w y que una un punto $z_1 \in C_1^*$ con un punto $z_2 \in C_2^*$. Sea $\Gamma = C_2 - S - C_1 + S$. Esta curva Γ es cerrada, homotópica a un punto en $D(a, R_1, R_2)$ donde f es analítica, y da una vuelta sola en sentido antihorario alrededor del punto w. Aplicando la fórmula integral de Cauchy se deduce:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)\, dz}{z - w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\, dz}{z - w} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)\, dz}{z - w}$$

Luego, usando (8) se deduce que $f(w) = g(w)$ para todo $w \in D(a, r_1, r_2)$. Hemos probado la afirmación II).

Prueba de la afirmación III): Re-escribiendo (8) se obtiene:

$$g(w) = h_2(w) - h_1(w), \quad \text{donde} \quad h_2(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\, dz}{z - w}, \quad h_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)\, dz}{z - w} \qquad (9)$$

Apliquemos el teorema de construcción de funciones analíticas mediante integración (ver teorema 11.1.10), a la función $h_2(w)$ de la igualdad (9). Se deduce que $h_2(w)$ es analítica para todo $w \notin C_2^*$, en particular para $w = a$ y además

$$h_2^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\, dz}{(z - a)^{n+1}}$$

Por lo tanto $h_2(w)$ tiene un desarrollo en serie de potencias centrado en a válido para todo w en el disco $D_{r_2}(a)$ (que tiene como borde la circunferencia C_2^*). Se deduce:

$$h_2(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (w - a)^n \quad \forall\, w \in D_{r_2}(a) \qquad (10)$$

donde

$$a_n = \frac{h_2^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\, dz}{(z - a)^{n+1}} \quad \forall n \geq 0 \qquad (11)$$

Ahora descompongamos la función $h_1(w)$ de la igualdad (9), considerando que $w \in D(a, r_1, r_2)$, y por lo tanto $|w - a| > r_1$. Para todo $z \in C_1^*$ se cumple

$$\left| \frac{z - a}{w - a} \right| = \frac{|z - a|}{|w - a|} = \frac{r_1}{|w - a|} < 1$$

Entonces la serie geométrica de razón $u = (z - a)/(w - a)$ converge a $1/(1 - u)$. Se deduce que

$$\frac{1}{1 - (z - a)/(w - a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^n \quad \forall z \in C_1^*$$

Entonces

$$\frac{f(z)}{z - w} = \left(\frac{f(z)}{w - a} \right) \left(\frac{-1}{1 - (z - a)/(w - a)} \right) = -\frac{f(z)}{w - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^n \quad \forall z \in C_1^*$$

Luego, sustituyendo en (9) se obtiene:

$$h_1(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(\frac{f(z)}{w-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\right)dz \qquad \forall w \in D(a,r_1,r_2) \qquad (12)$$

Veamos que la serie dentro del integrando converge uniformemente para $z \in C_1^*$. En efecto

$$\left|\frac{f(z)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\right| \leq \frac{M}{w-a}\left(\frac{r_1}{|w-a|}\right)^n = A_n, \quad \text{independiente de } z,\ \forall\, z \in C_1^*$$

donde M es el máximo de $|f(z)|$ cuando $z \in C_1^*$.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ es una serie geométrica de razón $0 < r_1/|w-a| < 1$. Por lo tanto es convergente. Aplicando el criterio de la mayorante de Weierstrass se deduce que la serie dentro del integrando en (12) converge uniformemente en $z \in C_1^*$. Luego podemos usar el teorema de convergencia uniforme e integración para deducir que:

$$\int_{C_1}\left(\frac{f(z)}{w-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\right)dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{C_1}\frac{f(z)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dz\right) \qquad \forall w \in D(a,r_1,r_2) \qquad (13)$$

Reuniendo las igualdades (12) y (13) se deduce:

$$\forall\, w \in D(a,r_1,r_2): \quad h_1(w) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dz\right)$$

$$h_1(w) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)(z-a)^n\, dz\right)(w-a)^{-n-1}$$

Luego:

$$\forall\, w \in D(a,r_1,r_2): \quad h_1(w) = -\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(w-a)^{-n-1}$$

donde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)(z-a)^n\, dz$$

Reindexando $m = -n-1$ cuando n varía de 0 a $+\infty$, el índice m varía decreciendo de -1 a $-\infty$. Y además $n = -m-1$. Se deduce que:

$$\forall\, w \in D(a,r_1,r_2): \quad h_1(w) = -\sum_{m=-1}^{-\infty} a_m(w-a)^m \qquad (14)$$

donde

$$a_m = b_{-m-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\, dz \qquad (15)$$

Reuniendo (9), (10), (11), (14) y (15) se deduce:

$$\forall w \in D(a,r_1,r_2): \ \ g(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(w-a)^n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad \text{si } n \geq 0$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad \text{si } n \leq -1$$

Esta es la afirmación (III) que queríamos demostrar. $\square$

13.3. *Caracterización de singularidades aisladas por su desarrollo de Laurent.*

Veamos primero un corolario del teorema 13.2.1, aplicado a las singularidades aisladas. Obsérvese que los entornos pinchados de las singularidades aisladas son coronas donde la función es holomorfa, por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema 13.2.1.

Corolario 13.3.1. Serie de Laurent en las singularidades aisladas.

a) *Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f y sea $D^*_R(a)$ un entorno pinchado de a donde f es holomorfa.*

Entonces existe una serie de Laurent tal que:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \forall\, z \in D^*_R(a) \quad (1)$$

Además la serie de Laurent que cumple (1) *es única, converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto $K \subset D^*_R(a)$; y sus coeficientes verifican:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D^*_R(a)$ tal que $Ind_\gamma(a) = 1$.

b) *Sea ∞ una singularidad aislada de f y sea $D^*_{1/R}(\infty)$ un entorno de ∞ donde f es holomorfa. Entonces existe una serie de Laurent tal que:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \forall\, z \in D^*_{1/R}(\infty) \quad (2)$$

Además la serie de Laurent que cumple (2) *es única, converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto $K \subset D^*_{1/R}(\infty)$; y sus coeficientes verifican*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z) z^{n-1}\,dz \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D^*_{1/R}(\infty)$ tal que $Ind_\gamma(0) = 1$.

Demostración: Para la parte a) basta aplicar el teorema 13.2.1 usando $z_0 = a$ y la corona $D(a, 0, R) = D^*_R(a)$).

Para la parte b) basta aplicar el teorema 13.2.1 usando $z_0 = 0$ y la corona $D(0, R, \infty) = D^*_{1/R}(\infty)$. Advertimos que en este caso hemos llamado a_n al coeficiente que en el teorema 13.2.1 llamábamos a_{-n}. $\square$

Teorema 13.3.2. -

Clasificación de singularidades aisladas según su desarrollo de Laurent.

Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ una singularidad aislada de f. Sean a_n los coeficientes de la serie de Laurent centrada en a, según el corolario 13.3.1.

Entonces:

i) *a es una singularidad evitable si y solo si $a_{-n} = 0 \ \forall n \geq 1$.*

ii) *a es un polo de orden $k \geq 1$ si y solo si $a_{-k} \neq 0$ y $a_{-n} = 0 \ \forall n \geq k$.*

iii) *a es una singularidad esencial si y solo si la sucesión a_{-n} para $n \geq 1$, tiene infinitos términos no nulos.*

Demostración:

Escribiremos la demostración del teorema para a singularidad aislada compleja. Si a fuera ∞ hay que sustituir en la demostración $(z-a)$ por $1/z$.

Parte i): Aplicando el teorema 12.3.5 a es singularidad evitable si y solo si la función f admite una extensión analítica a $D_R(a)$ para algún $R > 0$. Esto sucede si y solo si f tiene un desarrollo en serie de potencias de $(z-a)$, y por la unicidad del desarrollo de Laurent, este es su desarrollo de Laurent. Esto sucede si y solo si son todos nulos los coeficientes de las potencias de exponente negativo de $(z-a)$, que llamamos a_{-n} con índice $-n$ negativo.

Parte ii): Aplicando el teorema 12.4.1 a es un polo de orden $k \geq 1$ si y solo si k es el primer natural tal que $(z-a)^k f(z)$ tiene una extensión analítica a un disco con centro en $z = a$. Esto sucede si y solo si $(z-a)^k f(z)$ tiene un desarrollo en serie de potencias centrado en $z = a$ que empieza con coeficiente $b_0 \neq 0$:

$$(z-a)^k f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n$$

Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^{n-k} = \sum_{m=-k}^{+\infty} a_m (z-a)^m$$

donde, reindexando con $m = n - k$ se obtiene $a_m = b_{m+k}$. Luego $a_{-k} \neq 0$ y $a_{-m} = 0$ para todo $m \geq k$.

Parte iii): Las singularidades esenciales son por definición las que no son evitables ni polos. Entonces a es singularidad esencial si y solo si no se cumplen las condiciones de las partes i) y ii). Esto sucede cuando no existe un primer $k \geq 0$ tal que $a_{-n} = 0$ para todo $n > k$. Es decir, la sucesión a_{-n} para $n \geq 1$ tiene infinitos términos no nulos. $\square$

13.3.3. Cálculo de los coeficientes del desarrollo de Laurent mediante derivación.

Las fórmulas del corolario 13.3.1 dan fórmulas integrales para calcular los coeficientes del desarrollo de Laurent en cualquier singularidad aislada, en particular para las evitables y los polos.

Pero cuando la singularidad no es esencial, podemos dar también fórmulas con derivadas, para calcular los coeficientes del desarrollo de Laurent. Estas resultan de aplicar las fórmulas que relacionan los coeficientes de desarrollo de potencias con las derivadas n-ésimas de las funciones analíticas. (Ver parte c) del Teorema 11.1.6).

Si la singularidad a es evitable, y si seguimos llamando f a la extensión analítica de f al disco de centro a, entonces el desarrollo de Laurent de f centrado en $z = a$ es el desarrollo en serie de potencias de $z - a$. Luego:

$$a \in \mathbb{C} \text{ evitable } \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \ \forall n \geq 0$$

Si la singularidad a es un polo de orden k, podemos hacer lo mismo con la extensión analítica de $(z-a)^k f(z)$. Seguimos llamando con el mismo nombre $(z-a)^k f(z)$ a la función extendida. Como en la demostración de la parte ii) del teorema 13.3.2, el coeficiente a_n del desarrollo de Laurent de f es el coeficiente b_{n+k} del desarrollo de Taylor de $(z-a)^k f(z)$. Se deduce:

$$a \in \mathbb{C} \text{ polo de orden } k \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{d^{n+k}}{dz^{n+k}} \ (z-a)^k f(z) \right) \Bigg|_{z=a} \quad \forall n \geq -k$$

donde d^m/dz^m indica derivada $m-$ésima respecto de z.

Las fórmulas anteriores son aplicables cuando la singularidad a no es ∞. Si ∞ es una singularidad evitable o un polo, también pueden escribirse fórmulas parecidas, pero con respecto a la función

$$g(w) = f(1/w) \ \ \forall w \in D^*_{1/R}(0)$$

∞ es una singularidad evitable, o un polo de orden k de f, si y solo si 0 lo es de g; y los coeficientes a_n del desarrollo de Laurent de f en ∞ son los coeficientes del desarrollo de g en 0.

Luego se obtiene:

$$\infty \ \text{ es evitable para } f \Rightarrow a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \geq 0, \quad \text{donde } g(w) = f(1/w).$$

$$\infty \text{ es un polo de orden } k \text{ para } f \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{d^{n+k}}{dw^{n+k}} \ (w^k g(w)) \right) \Bigg|_{w=0} \quad \forall n \geq -k$$

donde $g(w) = f(1/w)$ y d^m/dw^m indica derivada $m-$ésima respecto de w.

13.4. *Ejemplos de desarrollo de Laurent.*

Ejercicio 13.4.1. a) Hallar el desarrollo de Laurent centrado en $z = 0$ e indicar el radio interno y el radio externo de la corona de convergencia que incluya al punto $z = 2$, para la función $f(z) = 1/[(z-1)^2(z-3)]$.

b) Hallar el desarrollo de Laurent centrado en $z = 1$ de la misma función que antes, e indicar los radios interno y externo de la corona de convergencia que contenga el punto $z = 2$.

c) Idem, centrado en $z = 3$.

Parte a): La corona de convergencia con centro en $z = 0$ tiene radio interno $r \geq 0$ lo más pequeño posible y radio externo $0 < R \leq +\infty$ lo más grande posible, tales que $f(z)$ es analítica en la corona $\{r < |z| < R\}$.

Como $f \in H(\Omega)$ donde $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$ la corona de convergencia de la serie centrada en $z = 0$ que contenga al punto $z = 2$, (hacer dibujo) tiene radio interno $r = 1$ (su frontera interna pasa por el punto $z = 1$ donde f no es holomorfa), y radio externo $R = 3$ (su frontera externa pasa por el punto $z = 3$).

Entonces hallemos el desarrollo de Laurent de f en $C = \{1 < |z| < 3\}$. Será de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall z \in C$$

Primero descompongamos f en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{-1/2}{(z-1)^2} + \frac{-1/4}{(z-1)} + \frac{1/4}{(z-3)} \qquad (1)$$

Desarrollemos cada una de esas fracciones en potencias de z o de z^{-1}. Para eso recordemos que la suma de una serie geométrica de razón u con $|u| < 1$, es

$$\frac{1}{(1-u)} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \quad \forall\, |u| < 1 \qquad (2)$$

y derivando término a término la serie geométrica se obtiene, para $|u| < 1$ la serie siguiente:

$$\frac{1}{(1-u)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, u^{n-1} \quad \forall\, |u| < 1 \qquad (3)$$

Tomemos la primera de las fracciones simples de (1) y usemos la fórmula (3) para u= 1/z (recordar que en la corona C es $|z| > 1$):

$$\frac{-1/2}{(z-1)^2} = \frac{-1/2}{z^2(1-(1/z))^2} = \frac{-1}{2z^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\, z^{-n-1} = \sum_{m=-2}^{-\infty} \frac{m+1}{2} z^m \quad (4)$$

En la última igualdad de (4) se hizo un cambio de índice de sumación: $m = -n-1$. La suma (4) puede empezarse en $m = -1$, ya que para ese valor el coeficiente queda $(m+1)/2 = 0$.

Tomemos ahora la segunda de las fracciones simples de (1) y usemos la fórmula (2) para u= 1/z (recordar que en la corona C es $|z| > 1$):

$$\frac{-1/4}{(z-1)} = \frac{-1/4}{z(1-(1/z))} = \frac{-1}{4z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\, z^{-n-1} = -\sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{1}{4} z^m \quad (5)$$

Tomemos finalmente la tercera de las fracciones simples de (1) y usemos la fórmula (2) para u= z/3 (recordar que en la corona C es $|z| < 3$):

$$\frac{-1/4}{(z-3)} = \frac{1/4}{3(1-(z/3))} = \frac{1}{4 \times 3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4 \times 3^{n+1}}\, z^n \quad (6)$$

Según la descomposición (1) ahora tenemos que sumar los desarrollos obtenidos en (4), (5) y (6):

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{n+1}{2} - \frac{1}{4}\right) z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4 \times 3^{n+1}}\, z^n$$

Luego:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{2n+1}{4}\right) z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4 \times 3^{n+1}} z^n$$

Por lo tanto tenemos

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall\, z \text{ tal que } 1 < |z| < 3$$

donde

$$a_n = \frac{2n+1}{4} \quad \text{si } n \leq -1; \quad a_n = \frac{1}{4 \times 3^{n+1}} \quad \text{si } n \geq 0. \quad \square$$

Parte b): La función $f(z) = 1/[(z-1)^2(z-3)]$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$. La máxima corona centrada en $z = 1$, que contiene al punto $z = 2$, y donde f es analítica, es entonces (hacer dibujo) la que tiene radio interno 0 y radio externo 2. Su frontera exterior pasa por el punto $z = 3$ donde f no es analítica, y su frontera interior es el punto $z = 1$ donde f no es analítica, y que es el centro de la corona. La corona es entonces el entorno pinchado $D_2^*(1)$ de centro $z = 1$ y radio 2.

Como $z = 1$ es un polo de orden 2 para f, usando la parte b) del teorema 13.3.2, el desarrollo en serie de Laurent de f en el entorno pinchado centrado en $z = 1$ será de la forma:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{n=-2}^{+\infty} a_n (z-1)^n, \quad \forall\, z \in D_2^*(1), \quad \text{con } a_{-2} \neq 0$$

Encontraremos el desarrollo en serie de potencias centrado en $z = 1$ de la función $1/(z-3)$ en el disco $D_2(1)$ donde $1/(z-3)$ es analítica. Al dividirlo después término a término entre $1/(z-1)^2$, quedará el desarrollo de Laurent centrado en $z = 1$ de la función f.

Recordando que la serie geométrica de razón u, con $|u| < 1$, converge a $1/(1-u)$, y observando que $|(z-1)/2| < 1$ cuando $z \in D_2(1)$, se deduce:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{-1}{2-(z-1)} = \frac{-1}{2(1-(z-1)/2)} = \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} (z-1)^n \quad \forall\, z \in D_2(1)$$

Dividiendo término a término entre $(z-1)^2$ se obtiene:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{-1}{2^{m+1}} (z-1)^{m-2} = \sum_{n=-2}^{+\infty} = \frac{-1}{2^{n+3}} (z-1)^n, \quad \forall\, z \in D_2^*(1)$$

que es el desarrollo buscado. Se observa que $a_{-2} = -1/2 \neq 0$. $\square$

Parte c): La función $f(z) = 1/[(z-1)^2(z-3)]$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$. La máxima corona centrada en $z = 3$, que contiene al punto $z = 2$, y donde f es analítica, es entonces (hacer dibujo) la que tiene radio interno 0 y radio externo 2. Su frontera exterior pasa por el punto $z = 1$ donde f no es analítica, y su frontera interior es el punto $z = 3$ donde f no es analítica, y que es el centro de la corona. La corona es entonces el entorno pinchado $D_2^*(3)$ de centro $z = 3$ y radio 2.

Como $z = 3$ es un polo de orden 1 para f, usando la parte b) del teorema 13.3.2, el desarrollo en serie de Laurent de f en el entorno pinchado centrado en $z = 3$ será de la forma:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n (z-3)^n, \quad \forall\, z \in D_2^*(3), \quad \text{con } a_{-1} \neq 0$$

Encontraremos el desarrollo en serie de potencias centrado en $z = 3$ de la función $1/(z-1)^2$ en el disco $D_2(3)$ donde $1/(z-1)^2$ es analítica. Al dividirlo después término a término entre $1/(z-3)$, quedará el desarrollo de Laurent centrado en $z = 3$ de la función f.

Recordando que la derivada término a término $\sum_{n=1}^{+\infty} nu^{n-1}$ de la serie geométrica de razón u, con $|u| < 1$, converge a $1/(1-u)^2$, y observando que $|(z-3)/2| < 1$ cuando $z \in D_2(3)$, se deduce:

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{[2+(z-3)]^2} = \frac{1}{2^2[1-(-(z-3)/2)]^2} = \frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{z-3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{2^{n+1}}\,(z-3)^{n-1} \quad \forall\, z \in D_2(3)$$

Dividiendo término a término entre $(z-3)$ se obtiene:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1} m}{2^m}\,(z-3)^{m-2} = \sum_{n=-1}^{+\infty} = \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{2^{n+2}}\,(z-3)^n, \quad \forall\, z \in D_2^*(1)$$

que es el desarrollo buscado. Se observa que $a_{-1} = 1/2 \neq 0$. $\square$

14. Funciones meromorfas y teoremas de aproximación.

14.1. *Funciones meromorfas.*

Definición 14.1.1. Funciones meromorfas. Una función f se dice que es *meromorfa en el abierto* Ω y se denota $f \in M(\Omega)$ si f es analítica en Ω excepto a lo sumo en una cantidad de puntos que sean todos singularidades aisladas evitables o polos.

(Por definición, no se admiten singularidades no aisladas, ni singularidades aisladas esenciales.)

Nota: Toda función analítica en Ω es meromorfa, porque por convención, para ser meromorfa en Ω se admite que no haya puntos excepcionales en Ω donde f no sea analítica.

14.1.2. Ejemplos de funciones meromorfas.

1. El cociente $f(z)/g(z)$ de dos funciones holomorfas no idénticamente nulas en Ω es una función meromorfa en Ω. En efecto, las singularidades son los ceros de g que son aislados y de orden $k \geq 1$. Entonces todas las singularidades del cociente o son evitables (si son también ceros de f del mismo o mayor orden) o son polos.

2. En particular una función racional es meromorfa en el plano complejo. Además para una función racional, ∞ es o bien una singularidad evitable, o bien un polo. Se dice entonces que la función racional es meromorfa en el plano complejo compactificado $\overline{\mathbb{C}}$. Veamos que esta propiedad caracteriza a las funciones racionales.

Teorema 14.1.3. Caracterización de polinomios y funciones racionales.

a) *Una función entera (analítica en el plano complejo) que tenga en infinito un polo o una singularidad evitable, es un polinomio y recíprocamente.*

b) *Una función meromorfa en el plano complejo que tenga en infinito un polo o una singularidad evitable, es una función racional y recíprocamente.*

Demostración:

Parte a): El recíproco es inmediato: basta verificar que todo polinomio de grado $k \geq 0$ es una función entera que tiene en ∞ una singularidad evitable (si $k = 0$) o un polo de orden k (si $k \geq 1$).

Ahora veamos el directo: Sea f una función entera que tiene en ∞ una singularidad evitable o un polo de orden k. Probemos que f es un polinomio.

Primer caso: Si ∞ es una singularidad evitable de f entonces, por definición, existe el número complejo $L = \lim_{z\to\infty} f(z)$. Luego f está acotada en un entorno de ∞, es decir para todo $|z| > R$. Por otra parte como f es analítica en el plano complejo, es continua, luego está acotada en el compacto $|z| \leq R$. Entonces f es entera y acotada en todo el plano complejo. Por el teorema de Liouville (ver teorema 11.4.6) f es constante, es decir, un polinomio de grado 0.

Segundo caso: Ahora veamos el caso en que ∞ sea un polo de orden $k \geq 1$. Por la parte b) del corolario 13.3.1 y por el teorema 13.3.2, el desarrollo de Laurent de f en ∞ es:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}; \quad a_{-k} \neq 0 \quad (1)$$

Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n; \quad \text{donde } a_{-k} \neq 0 \quad (2)$$

g es entera (analítica en todo el plano complejo) porque es diferencia de f, que es una función entera por hipótesis, menos un polinomio de grado k en z. Además, por (1), la función $g(z)$ es igual a la suma de la serie de la derecha en (1). Luego obtenemos:

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = \lim_{w\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = a_0 \qquad (3)$$

Hemos llamado $w = 1/z$. El último límite en (3) es a_0 porque la serie de potencias de w define una función analítica que es continua. Entonces su límite cuando $w \to 0$ es el valor de la suma de serie de potencias en $w = 0$.

De la igualdad (3) deducimos que g es una función entera que tiene en ∞ una singularidad evitable. Por lo demostrado en el primer caso g es constante. Luego es igual a su límite a_0.

Tenemos $g(z) = a_0 \ \forall z \in \mathbb{C}$. Sustituyendo en (2) se deduce:

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n; \quad \text{donde } a_{-k} \neq 0$$

Hemos demostrado que f es un polinomio de grado k como queríamos.

Parte b): El recíproco es inmediato: como vimos en la sección 12.1 toda función racional $f(z) = P(z)/Q(z)$ es analítica en todo el plano complejo, excepto en las raíces del denominador $Q(z)$, que son polos de orden igual a la multiplicidad de la raíz. Además ∞ es una singularidad evitable si $grado(P) \leq grado(Q)$, o en caso contrario es un polo de orden $grado(P) - grado(Q)$.

Antes de demostrar el directo, enunciamos y probamos la siguiente afirmación:

14.1.4. Afirmación: *Si f es una función meromorfa en el plano complejo que tiene en ∞ una singularidad aislada, entonces la cantidad de polos de f en el plano complejo es finita.*

Prueba de la afirmación: Como ∞ es una singularidad aislada de f, entonces f es analítica en el entorno pinchado de infinito $D^*_{1/R}(\infty)$, es decir, f es analítica para todo $|z| > R$. Luego, las otras singularidades de f están en el compacto $K = \{|z| \leq R\}$.

Además sabemos que f es meromorfa en el plano complejo. Luego, las otras singularidades son todas polos que están en el compacto $K = \{|z| \leq R\}$. Probemos que son a lo sumo una cantidad finita. En efecto, cada punto $z_0 \in K$ tiene un entorno $D_r(z_0)$ con $r > 0$ tal que la función f es analítica, o bien en todo el entorno $D_r(z_0)$ (si z_0 no es singularidad), o bien en el entorno pinchado $D^*_r(z_0)$ (si z_0 es un polo). Cubriendo el compacto K con una cantidad finita de estos entornos [7], se deduce que la cantidad de polos en K es finita. Hemos probado la afirmación 14.1.4.

Ahora demostremos el directo de la parte b) del teorema 14.1.3: Por hipótesis f es una función meromorfa en el plano complejo que tiene en ∞ o bien un polo, o bien una singularidad evitable. Probemos que f es una función racional.

[7] Estamos usando la siguiente propiedad de los conjuntos compactos K: si se define para cada punto $z_0 \in K$ un entorno abierto $D(z_0)$ que contiene a z_0 (no pedimos que $D(z_0)$ esté contenido en K), entonces existe una cantidad finita $D_1, D_2, \ldots, D_p$ de estos entornos que cubren todo K, es decir: $\cup_{i=0}^{p} D_i \supset K$.

Por la afirmación 14.1.4 los polos de f en el plano complejo son una cantidad finita. Sean entonces $a_1, a_2, \ldots, a_p$ los polos complejos de f cuyos órdenes llamamos $k_1, k_2, \ldots, k_p$ respectivamente.

Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \ldots (z - a_p)^{k_p} f(z) \quad (4)$$

Esta función auxiliar tiene singularidades aisladas en $a_1, a_2, \ldots, a_p$ e ∞. Por un lado ∞ es un polo o una singularidad evitable de g porque es un polo o una singularidad evitable de f.

Por otro lado, sabemos que a_i es un polo de orden k_i de f. Usando la definición del orden de un polo en 12.4.3, se deduce que existe

$$\lim_{z \to a_i} (z - a_i)^{k_i} f(z)$$

Luego, usando (4), existe el complejo

$$L_i = \lim_{z \to a_i} g(z)$$

Aplicando el teorema de caracterización de singularidades evitables (teorema 12.3.5), se deduce que g tiene en $a_1, a_2, \ldots, a_p$ singularidades evitables, y por lo tanto existe una extensión analítica de g a todo el plano complejo. Seguimos llamando g a esta extensión analítica. Deducimos que g es entera y tiene en ∞ o bien un polo o bien una singularidad evitable. Por lo demostrado en la parte a) de este teorema, se deduce que $g(z)$ es un polinomio $P(z)$.

$$g(z) = P(z) \ \ \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Sustituyendo en (4), se tiene

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \ldots (z - a_p)^{k_p}}$$

Hemos demostrado que f es una función racional como queríamos. $\square$

Teorema 14.1.5. Teorema pequeño de Picard.

Toda función entera (analítica en todo el plano complejo) *no constante tiene como recorrido todo el plano complejo excepto a lo sumo un punto.*

14.1.6. Ejemplos.

La función e^z recorre todo el plano complejo excepto el 0.

La función z^2 recorre todo el plano complejo sin excepciones.

Los polinomios $P(z)$ de grado $k \geq 1$ recorren todo el plano complejo, por el teorema fundamental del álgebra aplicado a $P(z) - a$ (donde a es un complejo fijo cualquiera). En efecto, se deduce que existe para todo $a \in \mathbb{C}$ alguna raíz de $P(z) - a$, y por lo tanto alguna preimagen por P del complejo a. Entonces el recorrido de $P(z)$ incluye a a y como a es cualquiera, el recorrido de $P(z)$ es todo el plano complejo.

Probaremos el teorema pequeño de Picard a partir del teorema (grande) de Picard, enunciado en 12.5.3. Advertimos que esto no es una demostración porque el teorema grande de Picard no ha sido probado aquí. De todas formas no usaremos el teorema pequeño ni el grande de Picard en el futuro desarrollo de la teoría. Por una prueba de este teorema puede verse el libro de Rudin, W. Análisis Real y Complejo.

Prueba del teorema pequeño de Picard admitiendo el teorema 12.5.3:
Si f es entera, entonces ∞ es una singularidad aislada.

Primer caso: Si ∞ es evitable o un polo entonces, por lo demostrado en 14.1.3, f es un polinomio. Si no es constante, tiene grado $k \geq 1$. En ese caso, repitiendo lo visto en 14.1.6, el recorrido de f es todo el plano complejo sin puntos excepcionales; lo que prueba la tesis.

Segundo caso: Si ∞ es una singularidad esencial entonces, admitiendo el teorema 12.5.3, la imagen de cualquier entorno $D^*_{1/R}(\infty)$ de ∞ es todo el plano complejo excepto a lo sumo un punto, que es lo queríamos probar. $\square$

14.2. *Aproximación por funciones racionales.*

Definición 14.2.1. Convergencia uniforme en compactos.

Decimos que una sucesión f_n de funciones complejas definidas en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ *se aproxima en compactos (o converge uniformemente en compactos de Ω) a una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$*, si para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un N (que puede depender del compacto K y del número ϵ dados, pero que no depende de z) tal que

$$n \geq N \ \Rightarrow \ |f(z) - f_n(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K$$

Definición 14.2.2. Aproximación por funciones racionales.

Decimos que una función compleja f definida en el abierto Ω *se aproxima en compactos de Ω por funciones racionales* cuando existe una sucesión de funciones racionales f_n definidas en Ω (por lo tanto sus polos no están en Ω) que se aproxima en compactos (o converge uniformemente en compactos de Ω) a f.

Veamos que toda función meromorfa en el plano complejo que tenga en infinito una singularidad aislada, puede aproximarse en compactos por funciones racionales, y que, en particular, si la función es entera (analítica en todo el plano complejo), entonces puede aproximarse por polinomios.

Teorema 14.2.3. Aproximación de funciones meromorfas por funciones racionales.

a) Si f es entera entonces f se aproxima en compactos de $\mathbb{C}$ por polinomios.

b) Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$. Sea Ω el abierto que se obtiene de $\mathbb{C}$ retirando todos los polos de f.

Si f tiene en ∞ una singularidad aislada entonces f se aproxima en compactos de Ω por funciones racionales.

Demostración:

Parte a) Si f es entera, entonces tiene un desarrollo en serie de potencias centrado, por ejemplo, en $z = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (2)$$

Esta serie de potencias tiene disco de convergencia todo el plano complejo y converge uniformemente en compactos (ver nota al final del parágrafo 11.1.2). Esto significa que si llamamos P_N a la reducida N-ésima de la serie de potencias (2), se cumple

$$P_N \to f \text{ uniformemente en compactos}$$

en particular en compactos contenidos en Ω. Observemos que P_N es un polinomio de grado a lo sumo N. Hemos probado la parte a).

Parte b) Como f tiene en ∞ una singularidad aislada, la cantidad de polos de f es finita. (ver la Afirmación 14.1.4).

Denotemos como $a_1, a_2, \dots, a_p$ a los polos de f y con $k_1, k_2, \dots, k_m$ a sus órdenes respectivos. Llamemos

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_p$$

Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_p)^{k_p} f(z) \quad (1)$$

Esta función auxiliar tiene singularidades aisladas en $a_1, a_2, \dots, a_p$ e ∞.

Por otro lado, sabemos que a_i es un polo de orden k_i de f. Usando la definición del orden de un polo en 12.4.3, se deduce que existe

$$\lim_{z \to a_i} (z - a_i)^{k_i} f(z)$$

Luego, usando (1), existe el complejo

$$L_i = \lim_{z \to a_i} g(z)$$

Aplicando el teorema de caracterización de singularidades evitables (teorema 12.3.5), se deduce que g tiene en $a_1, a_2, \dots, a_p$ singularidades evitables, y por lo tanto existe una extensión analítica de g a todo el plano complejo. Seguimos llamando g a esta extensión analítica. Deducimos que g es entera. Por lo demostrado en la parte a) la función entera g se aproxima por una sucesión de polinomios P_N:

$$P_N \to g \text{ uniformemente en compactos de } \mathbb{C}$$

en particular en compactos contenidos en Ω.

Llamemos $Q(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_p)^{k_p}$, es un polinomio definido y que no se anula en Ω.

Por (1) se cumple

$$f(z) = \frac{g(z)}{Q(z)} = \lim_{N \to +\infty} \frac{P_N(z)}{Q(z)} \quad \forall z \in \Omega$$

El cociente P_N/Q es una función racional en Ω. Basta ver que la convergencia es uniforme en compactos contenidos en Ω. En efecto, dado un compacto $K \subset \Omega$, sea

$$M = \max_{z \in K} \left| \frac{1}{Q(z)} \right|$$

Este máximo $M > 0$ existe porque la función $1/Q(z)$ es analítica en Ω ya que el denominador no se anula en Ω. Luego su módulo, que no se anula, tiene un máximo positivo en el compacto $K \subset \Omega$. Dado $\epsilon > 0$ como por construcción $P_N \to g$ uniformemente en compactos, existe N_0 (independiente de z) tal que

$$N > N_0 \;\Rightarrow\; |g(z) - P_N(z)| < \frac{\epsilon}{M} \quad \forall z \in K$$

Luego:

$$N > N_0 \;\Rightarrow\; \left| f(z) - \frac{P_N(z)}{Q(z)} \right| = \frac{|g(z) - P_N(z)|}{|Q(z)|} < \frac{\epsilon\, M}{M} = \epsilon \quad \forall z \in K$$

Entonces se cumple, usando la definición 14.2.1, que la sucesión de funciones racionales P_N/Q aproxima en compactos a f como queríamos demostrar. $\square$

14.3. *Convergencia uniforme en compactos de funciones analíticas.*

En el espacio funcional denotado como $C_\omega(\Omega)$, formado por todas las funciones analíticas en el abierto Ω, se define como topología, es decir la forma de aproximar funciones, de acuerdo a la definición 14.2.1 de convergencia uniforme en compactos de Ω.

La parte a) del siguiente teorema dice que con esta topología el espacio $C_\omega(\Omega)$ es cerrado: o sea el límite (con la convergencia uniforme en compactos) de una sucesión de funciones analíticas en Ω es también una función de analítica en Ω.

Además, en sus partes b) y c), el siguiente teorema dice que las derivadas de cualquier orden de las funciones $f_n \to f$ en $C_\omega(\Omega)$ también se aproximan uniformemente en compactos a la derivada del límite f. Esto significa que la convergencia en el espacio funcional $C_\omega(\Omega)$ implica la convergencia C^∞ en compactos (es decir la aproximación uniforme en compactos de las funciones y la de todas sus derivadas), que a su vez implica la convergencia C^k (es decir la aproximación uniforme en compactos de las funciones y la de todas sus derivadas hasta orden k inclusive.)

Teorema 14.3.1. Topología C_ω en el espacio de las funciones analíticas.
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y sea una sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$ que converge uniformemente en compactos de Ω a una función f. (Ver la definición de convergencia uniforme en compactos en 14.2.1.)

Entonces:

a) $f \in H(\Omega)$

b) *La sucesión de derivadas f'_n converge uniformemente en compactos de Ω a la derivada f'.*

c) *La sucesión de derivadas k-ésimas $f_n^{(k)}$ converge uniformemente en compactos de Ω a la derivada $k-$ésima $f^{(k)}$.*

Demostración: En lo que sigue denotamos

$$f_n \to f \text{ en } C_\omega(\Omega)$$

si f_n converge a f uniformemente en compactos de Ω de acuerdo a la definición 14.2.1.

Parte a): Dividiremos la prueba en tres pasos:

1. Probar que f es continua en Ω.

   Sea $z_0 \in \Omega$ y sea $\overline{D}$ un disco cerrado (compacto) contenido en Ω y centrado en z_0. Para todo $\epsilon > 0$, como por hipótesis $f_n \to f$ en $C_\omega(\Omega)$, podemos aplicar la definición 14.2.1, al compacto $\overline{D}$. Deducimos que existe N (independiente de z) tal que

   $$n \geq N \;\Rightarrow\; |f(z) - f_n(z)| < \epsilon \quad \forall z \in \overline{D}$$

   Fijo $n = N$, y se cumple:

   $$|f(z) - f_N(z)| < \epsilon \quad \forall z \in \overline{D}, \quad ; \text{ en particular para } z = z_0. \qquad (1)$$

   Por otra parte como la función $f_N(z)$ es por hipótesis analítica en Ω, es continua. Aplicando la definición de continuidad de una función en el punto $z_0 \in \Omega$, se obtiene, para todo $\epsilon > 0$, la existencia de $\delta > 0$ tal que:

   $$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f_N(z) - f_N(z_0)| < \epsilon \quad (2)$$

   El número $\delta > 0$ puede suponerse menor que el radio del disco $\overline{D}$. (Pues si no lo fuera, cambio δ por otro $\delta' > 0$ menor que δ y que sí sea δ' menor que el radio del disco $\overline{D}$. Si el δ viejo implica (2) entonces δ', que es menor que δ, también implica (2).) Entonces $|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow z \in \overline{D}$ y podemos aplicar las desigualdades (1) y (2).

   Reuniendo (1) y (2) se deduce:

   $$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow$$

   $$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < 3\epsilon = \epsilon^*$$

   donde, dado $\epsilon^* > 0$ se elige $\epsilon = \epsilon^*/3$.

   Concluimos que dado $\epsilon^* > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

   $$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon^*$$

   Esto por definición es la continuidad de f en z_0. Como z_0 es cualquiera en Ω se deduce que f es continua en Ω.

2. Probar que para toda curva $\gamma \subset \Omega$

   $$\lim_{n \to +\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$$

   El soporte γ^* de la curva γ es un conjunto compacto en Ω. Aplicando la definición 14.2.1 de convergencia uniforme en compactos se obtiene que para todo $\epsilon > 0$ existe N independiente de z, tal que

   $$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \;\; \forall z \in \gamma^*$$

   Acotemos la diferencia de las integrales de f_n y de f, en módulo:

   $$n \geq N \;\Rightarrow\; \left| \int_\gamma (f_n(z) - f(z))\, dz \right| \leq \int |f_n(z) - f(z)|\, |dz| \leq \epsilon L < \epsilon *$$

donde L es la longitud de la curva γ y, dado $\epsilon^* > 0$ se elige $\epsilon < \epsilon^*/L$. Lo probado se resume en la afirmación siguiente:

Dado $\epsilon^* > 0$ existe N tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; \left| \int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| < \epsilon*$$

Esto por definición de límite, prueba lo que queríamos en el paso 2.

3. Probar que $f \in H(\Omega)$.

   Basta probar que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en Ω y homotópica un punto en Ω. En efecto, aplicando luego el teorema de Morera (ver teorema 11.3.6) se deduce que $f \in H(\Omega)$ que es lo que queremos probar.

   Tomemos una curva cerrada $\gamma \subset \Omega$, homotópica a un punto en Ω. Por hipótesis $f_n \in H(\Omega)$ para todo $n \geq 1$. Aplicando el teorema de Cauchy global a f_n (ver teorema 11.3.1) se deduce que:

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz = 0 \quad \forall\, n \geq 1$$

   Tomando límite cuando $n \to +\infty$ y usando lo probado en el paso 2, se deduce

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

   terminando la prueba del paso 3.

Parte b): Probar que $f'_n \to f'$ en $C_\omega(\Omega)$.

Dado un compacto $K \subset \Omega$ consideremos $R = \operatorname{dist}(K, \Omega^c) = \min\{|z - z_0| : z_0 \in K, z \notin \Omega\} > 0$ y construyamos el compacto

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq R/2\}$$

donde la distancia $\operatorname{dist}(z, K) = \min\{|z - z_0| : z_0 \in K\}$. Por construcción ningún punto del compacto K_1 puede estar en el complemento de Ω. Entonces $K_1 \subset \Omega$.

Para cada $z_0 \in K$ fijo, aplicamos la desigualdad de Cauchy (ver teorema 11.4.4) a la derivada primera de la función $f_n - f$ en el disco compacto $\overline{D_{R/2}(z_0)}$. Obtenemos:

$$|f'_n(z_0) - f'(z_0)| \leq \frac{2M(R/2)}{R} \leq \frac{2M_n}{R} \quad (3)$$

donde $M(R/2) = \max\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \overline{D_{R/2}(z_0)}\} \leq M_n$ siendo

$$M_n = \max\{|f_n(z) - f(z)| : z \in K_1\}$$

Para obtener la desigualdad (3) se usó que $M(R/2) \leq M_n$ porque $\overline{D_{R/2}(z_0)} \subset K_1$.

Por hipótesis $f_n \to f$ en $C_\omega(\Omega)$. Luego, aplicando la definición de convergencia uniforme en compactos (definición 14.2.1) al compacto K_1, se deduce que para todo $\epsilon > 0$ existe N (independiente de z) tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K_1 \;\;\Rightarrow\; M_n < \epsilon$$

Sustituyendo en (3) se concluye que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n'(z_0) - f'(z_0)| < \frac{2\epsilon}{R} = \epsilon^* \qquad (4)$$

donde, dado $\epsilon^* > 0$ se eligió $\epsilon = R\epsilon^*/2$.

Resumiendo, hemos probado que para cualquier compacto $K \subset \Omega$ dado, y para cualquier $\epsilon^* > 0$ existe N (independiente de z) tal que se cumple (4). Por definición de convergencia uniforme en compactos (ver definición 14.2.1), esto significa que

$$f_n' \to f' \text{ en } C_\omega(\Omega)$$

que es lo que queríamos demostrar en la parte b) de la tesis.

Parte c): Deducir que para todo natural $k \geq 0$ se cumple: $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ en $C_\omega(\Omega)$.

Por inducción completa en k. Por hipótesis vale para $k = 0$. En la parte b) hemos probado que vale para $k = 1$. En realidad, aplicando la parte b) a la sucesión de funciones $f_n^{(h)}$ en lugar de f_n, hemos probado que si

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \text{ en } C_\omega(\Omega) \qquad (5)$$

es válida para algún $k = h$, entonces también vale (5) para $k = h+1$. Por el principio de inducción completa (5) es válida para todo k natural. □

Proposición 14.3.2. Suma y producto de límites uniformes de funciones analíticas.

Sean $f_n, g_n \in H(\Omega)$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ uniformemente en compactos de Ω. (Ver definición 14.2.1 de convergencia uniforme en compactos).

Entonces

$$f_n + g_n \to f + g \textit{ uniformemente en compactos.}$$

$$f_n g_n \to fg \textit{ uniformemente en compactos.}$$

Demostración: Dado un compacto $K \subset \Omega$ y dado $\epsilon > 0$, aplicando la definición 14.2.1, a las sucesiones f_n y g_n respectivamente, existen N_1 y N_2 (independientes de z) tales que

$$n \geq N_1 \;\Rightarrow\; |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall\, z \in K$$

$$n \geq N_2 \;\Rightarrow\; |g_n(z) - g(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K$$

Tomando N igual al mayor de N_1 y de N_2 se deduce que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z) - f(z)| < \epsilon,\; |g_n(z) - g(z)| < \epsilon \quad \forall\, z \in K \qquad (1)$$

Luego, de la propiedad triangular del módulo y de (1) se deduce:

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z) + g_n(z) - (f(z) + g(z))| \leq |f_n(z) - f(z)| + |g_n(z) - g(z)| < 2\epsilon = \epsilon^* \quad \forall\, z \in K$$

donde, dado $\epsilon^* > 0$ se elige $\epsilon = \epsilon^*/2$. Esto prueba que la suma de las funciones converge uniformemente en compactos a la suma de los límites.

Ahora probemos lo mismo para el producto. De la propiedad triangular del módulo y de (1) se deduce:

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z) g_n(z) - f(z) g(z))| \leq$$

$$\leq |f_n g_n - f g_n| + |f g_n - f g| = |g_n||f_n - f| + |f||g_n - g| \leq$$
$$\leq (|g_n - g| + |g|)\,|f_n - f| + |f|\,|g_n - g| \leq (M_g + \epsilon)\epsilon + M_f \epsilon < \epsilon^* \quad \forall\, z \in K$$

donde M_g y M_f son los máximos de $|g|$ y $|f|$ respectivamente en K y , dado $\epsilon^* > 0$ se elige $\epsilon > 0$ de modo que sea $\epsilon < 1$ y $\epsilon < \epsilon^*/(M_g + 1 - M_f)$. En resumen, hemos probado que dado un compacto $K \subset \Omega$ y dado $\epsilon > 0$ existe N independiente de z tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z))| < \epsilon^* \quad \forall\, z \in K$$

Por la definición 14.2.1, esto significa que $f_n g_n \to fg$ uniformemente en compactos de Ω, como queríamos demostrar. $\square$

14.4. *Familias normales.*

Definición 14.4.1. Familia normal.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y sea una sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$, $n \geq 1$. La sucesión f_n se llama *familia normal* si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $M \geq 0$ (que puede depender del compacto K pero que es independiente de n y de z), tal que:

$$|f_n(z)| \leq M \quad \forall\, n \geq 1, \;\; \forall\, z \in K$$

Esta propiedad se llama *equi-acotación en compactos.*

Dicho de otra manera: una familia es normal si es equi-acotada en compactos.

Más adelante, en la demostración del teorema de Montel (teorema 14.4.2) se prueba, no solo la tesis de ese teorema, sino estas otras propiedades que cumplen las familias normales:

Propiedades de las familias normales:
Si $f_n \in H(\Omega)$ es una familia normal, entonces:

- f'_n *también es una familia normal.* (Ver punto 1 de la demostración del teorema 14.4.2.)
- f_n *es una familia equicontinua en compactos.* (Ver punto 2 de la demostración del teorema 14.4.2.)
- Dada una cantidad numerable $\{z_i : i \geq 1\}$ de puntos en Ω, *existe una subsucesión* f_{j_n} *construida por el procedimiento diagonal, tal que* $f_{j_n}(z_i)$ *converge cuando* $n \to +\infty$ *para todo* z_i *fijo.* (Ver punto 3 de la demostración del teorema 14.4.2.)
- f_n *tiene alguna subsucesión de Cauchy uniforme en compactos.* (Ver punto 4 de la demostración del teorema 14.4.2.)
- *Toda sucesión de Cauchy uniforme en compactos es convergente uniformemente en compactos.* (Ver punto 5 de la demostración del teorema 14.4.2.)
- De las dos afirmaciones anteriores se deduce que f_n *tiene una subsucesión uniformemente convergente en compactos.* (Esto es la tesis del teorema de Montel en 14.4.2.)

Nota: En el ejemplo 14.4.3, se muestra que una sucesión f_n que sea una familia normal, aunque tiene subsucesiones convergentes, no tiene necesariamente que ser convergente ella misma.

Teorema 14.4.2. Teorema de Montel.
Si la sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$ es una familia normal, entonces tiene alguna subsucesión que es uniformemente convergente en compactos de Ω.

Demostración: Desarrollaremos la demostración en varios pasos:

1. **Probar que f'_n es también una familia normal.**

   Dado un compacto $K \subset \Omega$ definamos el número positivo R igual a la distancia de K al complemento de Ω:
   $$R = \text{mín}\{|z_0 - z| : z_0 \in K,\ z \notin \Omega\} > 0$$
   Definimos el compacto
   $$K_1 = \{z : |z - z_0| \leq R/2, \ \text{ para algún } z_0 \in K\} \quad (1)$$
   Obsérvese que $K_1 \subset \Omega$.

   Por hipótesis la sucesión f_n es normal, es decir equiacotada en compactos. Entonces en particular para el compacto K_1 existe $M > 0$ tal que
   $$|f_n(z)| \leq M \ \ \forall\, n \geq 1, \ \ \forall\, z \in K_1 \quad (2)$$
   Para todo $z_0 \in K$, aplicando la desigualdad de Cauchy en el disco $\overline{D_{R/2}(z_0)} \subset K_1$ se obtiene
   $$\left|f'_n(z_0)\right| \leq \frac{M_n}{R/2} \leq \frac{2M}{R} \quad (3)$$
   donde $M_n = \text{máx}_{z \in \overline{D_{R/2}(z_0)}} |f_n(z)| \leq M$, debido a la desigualdad (2) y a que $\overline{D_{R/2}(z_0)} \subset K_1$.

   La afirmación (3) prueba que existe el número $2M/R$ (independiente de z_0 y de n por construcción), que es cota superior de $|f'_n(z_0)|$ para todo $z_0 \in K$ y para todo $n \geq 1$. Esto termina de probar que f'_n es una familia normal como queríamos en el paso 1.

2. **Probar que f_n es equicontinua en todo compacto $K \subset \Omega$.** Esto significa probar que para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (independiente de z y de n) tal que
   $$z_0 \in K,\ |z - z_0| < \delta \ \ \Rightarrow |f_n(z) - f_n(z_0)| < \epsilon \quad \forall n \geq 1 \quad \text{(a probar) (4)}$$
   Sea K_1 el conjunto compacto definido en (1). Como ya probamos en el paso 1 que f'_n es una familia normal existe, en particular para el compacto K_1 una cota $k > 0$ que cumple:
   $$|f'_n(z)| \leq k \ \ \forall z \in K_1, \ \ \forall\, n \geq 1 \quad (5)$$
   Elijamos $0 < \delta < \epsilon/k, \ \ \delta < R/2$. Obsérvese que si $z_0 \in K$ entonces $D_\delta(z_0) \subset D_{R/2}(z_0) \subset K_1$. Tomando $z_1 \in D_\delta(z_0)$, aplicando la regla de Barrow al integrar en el segmento $[z_0, z_1]$ (contenido en $D_\delta(z_0) \subset K_1$), y usando (5), se deduce que:
   $$|z_1 - z_0| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f_n(z_1) - f_n(z_0)| = \left| \int_{[z_0,z_1]} f'(z)\, dz \right| \leq k|z_1 - z_0| < k\delta < \epsilon$$
   Esta es la afirmación (4) que queríamos demostrar en el paso 2.

3. Sea $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_i, \ldots$ una sucesión densa en Ω, por ejemplo el conjunto numerado de todos los complejos en Ω con partes real e imaginaria racionales. El objetivo de este paso no requiere que la sucesión de puntos sea densa, pero vamos a necesitar la densidad para el paso 4. Probaremos la siguiente afirmación para cualquier sucesión dada de puntos en Ω:

   Probar que existe $j_n \to +\infty$ tal que para todo z_i fijo la subsucesión $f_{j_n}(z_i)$ es convergente. Es decir:

$$\lim_{n\to+\infty} f_{j_n}(z_i) = L_i \in \mathbb{C} \quad \forall i \geq 1. \quad \text{(a probar)} \quad (6)$$

   Consideremos la sucesión dada f_n, que llamamos $f_{n,0}$ para indicar que es la primera subsucesión (la sucesión dada es subsucesión de sí misma).

   Al evaluar $f_{n,0}(z)$ en $z = z_1$ se tiene una sucesión de complejos acotada (porque, por definición de familia normal, está acotada en el compacto $\{z_1\}$). Luego, existe una subsucesión convergente cuando se la evalúa en $z = z_1$ [8] Llamemos $f_{n,1}$ a esta subsucesión de $f_{n,0}$, que cumple:

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,1}(z_1) = L_1 \in \mathbb{C}$$

   Ahora repitamos el procedimiento usando la sucesión $f_{n,1}$ y el punto z_2, en vez de la sucesión $f_{n,0}$ y el punto z_1. Existe $f_{n,2}$ que es subsucesión de $f_{n,1}$, que cumple

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,2}(z_2) = L_2 \in \mathbb{C}$$

   Además como $f_{n,2}$ es una subsucesión de $f_{n,1}$, la cual evaluada en z_1 tenía límite L_1, se deduce[9] que

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,2}(z_1) = L_1 \in \mathbb{C}$$

   Aplicando el mismo procedimiento a la subsucesión $f_{n,2}$ en el punto z_3 se deduce que existe $f_{n,3}$, subsucesión de $f_{n,2}$ tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,3}(z_3) = L_3 \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,3}(z_2) = L_2 \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,3}(z_1) = L_1 \in \mathbb{C}$$

   Por inducción completa, existe para cada natural $i \geq 1$ una sucesión $f_{n,i}$, que es subsucesión de $f_{n,i-1}$ y tal que

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,i}(z_i) = L_i \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,i}(z_{i-1}) = L_{i-1} \in \mathbb{C}$$

[8] Toda sucesión de complejos acotada tiene una subsucesión convergente, porque sus partes real e imaginaria son sucesiones acotadas de reales, y esta propiedad es válida en la recta real.

[9] Si una sucesión de complejos es convergente a un límite L entonces toda subsucesión de ella también es convergente al mismo límite L. Esta propiedad se deduce de la misma propiedad para las sucesiones de reales, la cual se demuestra directamente a partir de la definición de límite.

$$\lim_{n \to +\infty} f_{n,i}(z_{i-2}) = L_{i-2} \in \mathbb{C}$$
$$\dots$$
$$\lim_{n \to +\infty} f_{n,i}(z_2) = L_2 \in \mathbb{C}$$
$$\lim_{n \to +\infty} f_{n,i}(z_1) = L_1 \in \mathbb{C}$$

Esto a priori, sólo asegura que si queremos que sea convergente una subsucesión de f_n evaluada en $z = z_1, z_2, \dots, z_i$, conseguimos una, para tantos puntos z_i como se quiera, pero para una cantidad *finita.*

Lo que queremos demostrar es que existe una misma subsucesión que es convergente cuando se evalúa en cualquiera de todos los z_i, (que son una cantidad numerable pero infinita de puntos).

La subsucesión buscada, si encontramos alguna, podría ser subsucesión al mismo tiempo de todas las subsucesiones ya construidas. Se obtiene por el llamado método diagonal que desarrollamos a continuación:

Escribamos las sucesivas subsucesiones obtenidas por el procedimiento anterior:

$f_{1,1}$,	$f_{2,1}$,	$f_{3,1}$,	$\dots$,	$f_{n-1,1}$,	$f_{n,1}$,	$\dots$	$\to L_1$ para $z = z_1$.
$f_{1,2}$,	$f_{2,2}$,	$f_{3,2}$,	$\dots$,	$f_{n-1,2}$,	$f_{n,2}$,	$\dots$	$\to L_1, L_2$ para $z = z_1, z_2$.
$f_{1,3}$,	$f_{2,3}$,	$f_{3,3}$,	$\dots$,	$f_{n-1,3}$,	$f_{n,3}$,	$\dots$	$\to L_1, L_2, L_3$ para $z = z_1, z_2, z_3$.
$\dots$	$\dots$	$\dots$					
$f_{1,n-1}$,	$f_{2,n-1}$,	$f_{3,n-1}$,	$\dots$,	$f_{n-1,n-1}$,	$f_{n,n-1}$,	$\dots$	$\to L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ para $z = z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$.
$f_{1,n}$,	$f_{2,n}$,	$f_{3,n}$,	$\dots$,	$f_{n-1,n}$,	$f_{n,n}$,	$\dots$	$\to L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n$ para $z = z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$.
$\dots$	$\dots$	$\dots$					

En cada fila de la tabla anterior hay una de las subsucesiones construidas por el procedimiento anterior. Cada fila es una subsucesión de la fila anterior.

Definamos la subsucesión
$$f_{j_n} = f_{n,n}$$
Es la sucesión que se forma tomando los elementos de la diagonal en la tabla anterior. Es al mismo tiempo subsucesión de todas las subsucesiones construidas. Entonces para cada uno y todos los puntos z_i dados:
$$\lim_{n \to +\infty} f_{j_n}(z_i) = L_i \in \mathbb{C}$$
lo que prueba la afirmación (6) como queríamos demostrar en este paso 3.

4. **Probar que la subsucesión f_{j_n} construida en el paso 3 es uniformemente de Cauchy en compactos de Ω.** Lo que hay que probar es que para todo compacto $K \subset \Omega$, y para todo $\epsilon > 0$ existe N (independiente de z) tal que
$$n \geq m \geq N \ \Rightarrow \ |f_{j_m}(z) - f_{j_m}(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K \quad \text{(a probar)} \quad (7)$$

Dado K y dado $\epsilon > 0$, elijamos $\delta > 0$ como en el paso 2. Cubramos el compacto K con una cantidad finita de discos abiertos $D_1, D_2, \dots, D_p$ todos de radio $\delta/2$. Elijamos dentro de cada uno de estos discos D_i un punto z_i de la sucesión dada en el paso 3. (Existe alguno de los puntos z_n dentro de cada disco D_i porque el conjunto de los puntos z_n es denso en Ω y el disco D_i por construcción está contenido en Ω.)

Por la parte 3, existe para cada z_i el límite $\lim_{n\to+\infty} f_{j_n}(z_i) = L_i$. Luego, por la definición de límite, para cada $z_i,\ i = 1, 2, \dots, p$, existe un N_i tal que:

$$n \geq N_i \ \Rightarrow\ |f_{j_n}(z_i) - L_i| < \epsilon$$

Entonces, llamando N al mayor de los números $N_1, N_2, \dots, N_p$ (son una cantidad finita) y tomando $n \geq m \geq N$ se obtiene:

$$n \geq m \geq N \ \Rightarrow\ |f_{j_n}(z_i) - f_{j_m}(z_i)| \leq |f_{j_n}(z_i) - L_i| + |L_i - f_{j_m}(z_i)| < 2\epsilon \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, p \qquad (8)$$

Fijemos un punto $z_0 \in K$. Este punto está dentro de alguno de los discos D_i. Entonces, junto con algún z_i está dentro del mismo disco D_i de radio $\delta/2$. Se deduce que existe alguno de los z_i (con $i = 1, 2, \dots, p$) tal que

$$|z_0 - z_i| < \delta$$

ya que δ es el diámetro del disco D_i donde están ambos puntos z_0 y z_i.

Aplicando lo demostrado en el paso 2, en particular tomando no toda la sucesión f_n sino solo la subsucesión f_{j_n}, se obtiene

$$|f_{j_n}(z_0) - f_{j_n}(z_i)| < \epsilon \quad \forall\, n \geq 1 \qquad (9)$$

Reuniendo (8) con (9), se deduce que

$$n \geq m \geq N \ \Rightarrow\ |f_{j_n}(z_0) - f_{j_m}(z_0)| \leq$$

$$\leq |f_{j_n}(z_0) - f_{j_n}(z_i)| + |f_{j_n}(z_i) - f_{j_m}(z_i)| \leq |f_{j_m}(z_i) - f_{j_m}(z_0)| < 4\epsilon \qquad (10)$$

La construcción anterior la podemos efectuar para cualquier $z_0 \in K$. Lo único que cambia al cambiar el punto z_0, es el punto intermediario z_i que usamos para obtener la desigualdad (10), pero el principio y el final de la desigualdad (10) es el mismo.

Entonces, hemos probado que dado un compacto $K \subset \Omega$ y dado $\epsilon^* > 0$, existe N independiente de z_0 tal que

$$n \geq m \geq N \ \Rightarrow\ |f_{j_m}(z_0) - f_{j_m}(z_0)| < 4\epsilon = \epsilon^* \quad \forall z_0 \in K$$

donde $\epsilon > 0$ se elige igual a $\epsilon^*/4$. Esto prueba la afirmación (7) como queríamos.

5. **Probar que toda subsucesión f_{j_n} que sea uniformemente de Cauchy en compactos de Ω es convergente uniformemente en compactos de Ω.** Un vez probado esto, se deduce que la subsucesión construida en el paso 3 es uniformemente convergente en compactos de Ω y se termina la demostración del teorema de Montel.

Esperando que no sea motivo de confusión, vamos a llamar f_n a la subsucesión f_{j_n}, aunque ésta sea diferente de la sucesión dada; ya que no vamos a utilizar más en la demostración a la sucesión dada que se llamaba también f_n. (Esta notación es equivalente a sustituir la sucesión dada por su subsucesión f_{j_n}, construida en el paso 3.)

Por lo demostrado en el paso 4, la sucesión f_n es de Cauchy uniforme en compactos. Probemos que converge a una cierta f uniformemente en compactos de Ω.

Primero probemos que para todo $z \in \Omega$ la sucesión de complejos $f_n(z)$ converge; es decir la convergencia puntual de f_n. Considerando, para cada $z_0 \in \Omega$ fijo, el conjunto compacto $\{z_0\}$, por lo demostrado en el paso 4, para todo $\epsilon > 0$ existe un N (que ahora depende del z_0 fijado) tal que:

$$n \geq m \geq N \ \Rightarrow \ |f_n(z_0) - f_m(z_0)| < \epsilon$$

Entonces la sucesión de complejos $u_n = f_n(z_0)$ (no de funciones, sino de números complejos que resultan de evaluar las funciones en $z = z_0$) es una sucesión de Cauchy. Entonces sus partes real e imaginaria forman sendas sucesiones de Cauchy en la recta real (pues para todo complejo u se cumple $|Re(u)| \leq |u|$ y $|Im(u)| \leq |u|$). Por la completitud de la recta real las partes real e imaginaria de $u_n = f_n(z_0)$ convergen a ciertos números reales. Luego, la sucesión de complejos $f_n(z_0)$ converge a cierto número complejo, que llamaremos $f(z_0)$ (ya que depende del número complejo z_0 que habíamos fijado de antemano).

En resumen, tenemos una función compleja $f(z)$ de variable compleja $z \in \Omega$ que cumple, para cada z fijo en Ω lo siguiente:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(z) = f(z) \ \text{ para cada } z \text{ fijo en } \Omega \qquad (11)$$

Esto es la convergencia puntual de la sucesión de funciones f_n a una función f.

Ahora probemos que la convergencia de f_n a f es también uniforme en compactos de Ω.

Sea dado un compacto $K \subset \Omega$ y un número real $\epsilon > 0$. Tomemos N (independiente de z) según el paso 4, que cumple:

$$n \geq m \geq N \ \Rightarrow \ |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \ \ \forall z \in K \qquad (12)$$

En la última desigualdad de (12) dejamos fijo un $z \in K$, dejamos fijo también un natural $m \geq N$ y hacemos $n \to +\infty$. Se obtiene:

$$m \geq N \ \Rightarrow \ \lim_{n \to +\infty} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \epsilon \ \ \forall z \in K$$

Usando (11) se deduce:

$$m \geq N \ \Rightarrow \ |f(z) - f_m(z)| \leq \epsilon < \epsilon^* \ \ \forall z \in K \qquad (13)$$

donde, dado $\epsilon^* > 0$ se eligió $\epsilon > 0$ menor que ϵ^*.

En resumen, hemos probado que dado un compacto $K \subset \Omega$ y dado $\epsilon^* > 0$, existe N (independiente de z) tal que se cumple (13). Esto es por definición, la convergencia uniforme en compactos de Ω de la sucesión de funciones f_n a la función f, como queríamos demostrar.
□

Ejemplo 14.4.3. Se define en $D_1(0)$, para cada $N \geq 1$, la función $f_N \in H(D_1(0))$ siguiente:

$$\text{Si } N \text{ es par, } f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n, \quad \forall\, z \in D_1(0)$$

$$\text{Si } N \text{ es impar, } f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} (n+1) z^n, \quad \forall z \in D_1(0)$$

1. Probar que la familia f_N es normal.

   Si N es par entonces $f_N(z)$ es la reducida N-ésima de la serie geométrica de razón z, que por lo probado en el ejemplo 3.2.6 converge uniformemente en compactos $K \subset D_1(0)$ a la función $1/(1-z)$. Entonces dado un compacto $K \subset D_1(0)$ y dado $\epsilon = 1$, existe N_0 (independiente de z) tal que

   $$N \geq N_0, \; N \text{ par} \quad \Rightarrow \left| f_N(z) - \frac{1}{1-z} \right| < 1 \;\; \forall\, z \in K \quad (1)$$

   Sea $M_0 = \text{máx}_{z \in K} |1/(1-z)|$. M_0 es un número real que depende del conjunto compacto K pero no depende del punto z que se elija en K. Existe M_0 porque $1/(1-z)$ es continua en el compacto K contenido en el disco abierto $D_1(0)$. Aplicando la propiedad triangular y la desigualdad (1) se deduce:

   $$|f_N(z)| \leq \left| f_N(z) - \frac{1}{1-z} \right| + \left| \frac{1}{1-z} \right| \leq 1 + M_0, \;\; \forall\, z \in K, \; \forall\, N \text{ par }, N \geq N_0 \quad (2)$$

   Si N es impar, entonces, usando el teorema 11.1.6, la función $f_N(z)$ es la reducida N-ésima de la serie de potencias de la función $(1/(1-z))' = 1/(1-z)^2$, que tiene disco de convergencia $D_1(0)$. Por lo visto al pie de la nota 11.1.2, esta serie de potencias converge uniformemente en compactos $K \subset D_1(0)$ a la función $1/(1-z)^2$.

   Entonces, dado un compacto $K \subset D_1(0)$ y dado $\epsilon = 1$ existe N_1 (independiente de z) tal que:

   $$N \geq N_1, \; N \text{ impar} \quad \Rightarrow \left| f_N(z) - \frac{1}{(1-z)^2} \right| < 1 \;\; \forall\, z \in K \quad (3)$$

   Sea $M_1 = \text{máx}_{z \in K} |1/(1-z)^2|$. Existe M_1 porque $1/(1-z)^2$ es continua en el compacto K contenido en el disco abierto $D_1(0)$. Aplicando la propiedad triangular y la desigualdad (3) se deduce:

   $$|f_N(z)| \leq \left| f_N(z) - \frac{1}{(1-z)^2} \right| + \left| \frac{1}{(1-z)^2} \right| \leq 1 + M_1, \;\; \forall\, z \in K, \; \forall\, N \text{ impar }, N \geq N_1 \quad (4)$$

   Sea N_2 el mayor entre N_0 y N_1.

   Sea $k_i = \text{máx}_{z \in K} |f_i(z)|$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, N_2$. Existe este máximo k_i porque $f_i(z)$ es continua en el compacto K.

   Sea M el mayor entre la siguiente cantidad finita de números reales:

   $$M = \text{máx}\{1 + M_0, 1 + M_1, k_1, k_2, \ldots, k_{N_2}\}$$

Reuniendo (2) y (4), junto a la definición de los números M y k_i, se obtiene:

$$\forall N \geq 1 \quad |f_N(z)| \leq M \quad \forall z \in K$$

Esto es por definición la equiacotación de la familia f_N, luego esta familia es normal como queríamos probar. □

2. Encontrar dos subsucesiones de f_N que sean convergentes uniformemente en compactos de $D_1(0)$ a funciones límites diferentes.

   Por cómo está dada la familia, la subsucesión f_{2N}, $N \geq 1$ (la subsucesión que corresponde a índices pares) es la sucesión de reducidas $2N$-ésimas de la serie geométrica, que converge uniformemente en compactos de su disco de convergencia $D_1(0)$ a la función $1/(1-z)$.

   Análogamente, la subsucesión f_{2N+1}, $N \geq 1$ (la subsucesión que corresponde a índices impares a partir del 3) es la sucesión de reducidas $2N+1$-ésimas del desarrollo en serie de potencias de z de la función analítica $1/(1-z)^2$. Por lo tanto converge uniformemente en compactos de su disco de convergencia $D_1(0)$ a la función $1/(1-z)^2$. □

3. Concluir que la sucesión f_N no es convergente uniformemente en compactos de $D_1(0)$.

   Por absurdo, si $f_N(z)$ fuera convergente a alguna función $f(z)$, entonces cualquier subsucesión de ella sería convergente a la misma función $f(z)$. Luego las dos subsucesiones de la parte anterior serían convergentes al mismo límite $f(z)$ para todo $z \in D_1(0)$. Sin embargo las dos subsucesiones de la parte anterior convergen a funciones que no son iguales para todo $z \in D_1(0)$. □

15. Teoría de los residuos.

15.1. *Residuos.*

Definición 15.1.1. Residuo de una función en una singularidad aislada.
Dada una función f que tiene en $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada, se llama residuo de f en a, y se denota como $Res_f(a)$ al siguiente número complejo:

$$Res_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz$$

donde γ es cualquier curva cerrada contenida en el entorno pinchado $D_R^*(a)$ donde f es holomorfa, y tal que da una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de a. Por ejemplo suele tomarse $\gamma = \partial D_r(a)$, donde $0 < r < R$.

Nota 15.1.2. Se observa que el residuo, definido arriba, no depende de la elección de la curva γ. En efecto, si γ_1 y γ_2 fueran dos de tales curvas, llamemos S a un segmento contenido en $D_R^*(a)$ que vaya de un punto $z_1 \in \gamma_1$ a un punto $z_2 \in \gamma_2$. La curva $\Gamma = \gamma_1 + S - \gamma_2 - S$ es cerrada y homotópica a un punto en $D_R^*(a)$. Por el teorema de Cauchy global $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$. Luego la integral de f a lo largo de γ_1 es igual a la integral de f a lo largo de γ_2.

El residuo de una función en una singularidad aislada se puede calcular de tres formas diferentes:

- Con la fórmula integral de la definición 15.1.1.
- Como el coeficiente a_{-1} del desarrollo en serie de Laurent de la función f centrado en $z = a$ (o en ∞). (Esto lo probaremos en la proposición 15.1.3.)
- Con la fórmula de derivación, cuando la singularidad aislada en un polo, tal como veremos en la proposición 15.1.4.

La definición 15.1.1 se puede interpretar como sigue: la función tiene una singularidad aislada en $z = a$. El rastro que deja (residuo) la singularidad al ser integrada la función f en una curva alrededor de a es el número a_{-1} de su desarrollo en serie de Laurent. Los demás coeficientes del desarrollo en serie de Laurent de f no participan en el momento de calcular la integral de f en curvas cerradas.

En el teorema de los residuos (teorema 15.1.5), veremos que al conocer los residuos en todas las singularidades aisladas, se puede calcular la integral de f a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en el conjunto abierto donde f es analítica.

Proposición 15.1.3. Fórmula del residuo:
Si f en la singularidad aislada $a \in \mathbb{C}$ tiene desarrollo de Laurent con coeficientes a_n, $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad \forall z \in D_R^*(a)$$

entonces el residuo de f en a es:

$$Res_f(a) = a_{-1}$$

Nota: El residuo de un polo que no es simple, o de una singularidad esencial, puede ser cero. Pero la de un polo simple es siempre diferente de cero, porque en ese caso el coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent es necesariamente no nulo. (Ver teorema 13.3.2.)

Demostración:

En el corolario 13.3.1, sobre la existencia de la serie de Laurent en un entorno pinchado de la singularidad aislada a se demuestra que el coeficiente a_n del desarrollo cumple:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D_R^*(a)$ tal que $Ind_\gamma(a) = 1$.

Luego, en particular para $n = -1$ se cumple:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$$

que es por definición el residuo de f en a. $\square$

Proposición 15.1.4. Fórmula del residuo para un polo:

Si f tiene un polo $a \in \mathbb{C}$ de orden $k \geq 1$ y g es la extensión analítica de $(z-a)^k f(z)$ en un entorno $D_R(a)$, entonces el residuo de f en a es:

$$Res_f(a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

En particular si a es un polo simple, $k = 1$ y la fórmula anterior se transforma en:

$$Res_f(a) = g(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) \neq 0.$$

$$Res_f(a) = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)}{1/f(z)} = \frac{1}{(1/f(z))'|_{z=a}} \neq 0$$

Demostración: Siendo g analítica en $D_R(a)$ se tiene:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \ \ \forall\, z \in D_R(a), \ \ \text{donde} \ \ b_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} \quad \forall\, n \geq 0$$

Como $f(z) = g(z)/(z-a)^k$ para todo $z \in D_R^*(a)$ entonces:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z-a)^{m-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k}(z-a)^n \quad \forall\, z \in D_R^*(a).$$

Este último es el desarrollo en serie de Laurent de f, luego el coeficiente a_n del desarrollo en serie de Laurent de f cumple: $a_n = b_{n+k}$. En particular:

$$a_{-1} = b_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

Por la proposición 15.1.3, a_{-1} es el residuo de f en a. Luego se deduce que

$$Res_f(a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

Hemos probado la primera parte de la proposición. Ahora veamos el caso en que a sea un polo simple.

Si a es un polo simple, entonces su orden $k = 1$. Por lo tanto $Res_f(a) = g(a)$. Pero g es continua en a (porque es analítica), luego

$$Res_f(a) = g(a) = \lim_{z\to a} g(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

Por otro lado, sabemos del teorema 13.3.2, que si un polo tiene orden $k = 1$ entonces $a_{-1} \neq 0$. Por lo tanto, en el caso de un polo simple, el residuo calculado anteriormente es diferente de cero.

Además, si a es un polo simple, entonces:

$$Res_f(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)}{1/f(z)} = \lim_{z\to a}\frac{1}{(1/f(z))/(z-a)} = \frac{1}{(1/f(z))'|_{z=a}} \qquad \square$$

Teorema 15.1.5. Teorema de los residuos.

Si f es analítica en un abierto Ω excepto a lo sumo en una cantidad finita de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ (estos puntos son singularidades aisladas de f) *entonces para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$ que no pase por los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, y que sea homotópica a un punto en Ω, se cumple:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m} Res_f(z_j)\, Ind_\gamma(z_j).$$

(Por convención la suma de la derecha es nula si $m = 0$.)

Nota: El teorema también es válido para una cantidad infinita de singularidades aisladas. En efecto, dada una curva $\gamma \subset \Omega$, podemos considerar $\gamma \subset \Omega^* \subset \Omega$ tal que las únicas singularidades de f en Ω^* son las que están en las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Por un lado las singularidades z_j que están en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$, cumplen $Ind_\gamma(z_j) = 0$; luego no influyen en el resultado. Por otra parte es finita la cantidad de singularidades aisladas que están en las componentes conexas acotadas $\cup R_i$ de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. (En efecto $K = \overline{\cup R_i}$ es compacto, y las singularidades son aisladas. Entonces se puede cubrir K con una cantidad finita de entornos, cada uno de los cuales contiene a lo sumo una singularidad.)

En la subsección 15.4 se dará un ejemplo de aplicación del teorema de los residuos y de las fórmulas para calcular residuos.

Demostración del teorema 15.1.5: Será por inducción completa en la cantidad $m \geq 0$ de singularidades de f en el conjunto Ω.

Paso inicial.

Para $m = 0$, la función f es analítica en Ω. Luego $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ debido al teorema de Cauchy global. (Ver teorema 11.3.1.)

Si suponemos por hipótesis que el teorema es cierto para algún $m = h-1$, con $h \geq 1$, habrá que probar que es válido para $m = h$.

Dejemos fija la curva γ cerrada y homotópica a un punto en Ω.

Hipótesis de inducción: Para toda función g analítica en Ω excepto a lo sumo en $h-1$ puntos $z_1, \ldots, z_{h-1}$ pertenecientes a $\Omega \setminus \gamma^*$, se cumple

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,dz = \sum_{j=1}^{h-1} Res_f(z_j)\,Ind_\gamma(z_j).$$

Tesis de inducción a probar: Para toda función f analítica en Ω excepto a lo sumo en h puntos $z_1, \ldots, z_{h-1}, z_h$ pertenecientes a $\Omega \setminus \gamma^*$, se cumple

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{h} Res_f(z_j)\,Ind_\gamma(z_j).$$

Demostración del paso de inducción:

Consideremos de las h singularidades $z_1, \ldots, z_h$ de f en Ω, una de ellas, la que llamamos z_h.

Sea R el radio del entorno pinchado $D_R^*(z_h)$ de z_h donde f es analítica.

Aplicando el teorema del desarrollo en serie de Laurent de f centrado en z_h (ver corolario 13.3.1), se tiene:

$$g(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_h)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_h)^n \quad \forall\, z \in D_R^*(z_h) \quad (1)$$

donde, usando la proposición 15.1.3, se cumple:

$$a_{-1} = Res_f(z_h). \quad (2)$$

Observación A): La función $g(z)$, definida en (1) para todo $z \in D_R^*(z_h)$, se extiende analíticamente a $D_R(z_h)$, definiéndola igual al desarrollo en serie de potencias $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_h)^n$.

Por (1):

$$g(z) = f(z) - S(z) \quad \forall\, z \in D_R^*(z_h), \text{ donde } S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_h)^{-n} \quad (3)$$

Afirmación B) La serie $S(z)$ de la igualdad (3), converge para todo $z \neq z_h$; converge uniformemente para todo z tal que $|z-z_h| \geq r$ (donde r es cualquier un número fijo tal que $0 < r < R$). Además la suma de la serie $S(z)$ es analítica para todo z tal que $z \neq z_h$.

Prueba de la afirmación B): Por el teorema de desarrollo en serie de Laurent (ver corolario 13.3.1), la serie (3) converge en la corona $D_R^*(z_h)$ de radio interno 0 y radio externo R. Entonces en particular, converge para $|z - z_h| = r$.

Escribiendo $w = 1/(z-z_h)$, la serie de potencias siguiente : $P(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$, converge para $|w| = 1/r$, para todo r tal que $0 < r < R$. Por lo tanto el radio de convergencia de $P(w)$ es mayor o igual que $1/r$, para todo r tal que $0 < r < R$. Haciendo $r \to 0^+$ se obtiene que el radio de convergencia de la serie de potencias $P(w)$ es infinito. Luego $P(w)$ converge para todo w. Luego su disco de convergencia es todo el plano complejo.

Además $P(w)$, como toda serie de potencias, converge uniformemente en cualquier compacto dentro de su disco de convergencia; en particular para todo w tal que $|w| \leq 1/r$.

Por ser una serie de potencias de w, la suma $P(w)$ es una función analítica de w.

Siendo $S(z) = P(1/(z - z_h))$, composición de $P(w)$ con $w = 1/(z - z_0)$, se deduce que $S(z)$ converge uniformemente para todo z tal que $|w| = |1/(z - z_h)| \leq 1/r$; es decir para todo z tal que $|z - z_h| \geq r$.

Además. como $P(w)$ converge para todo w, y $w = 1/(z - z_h)$, entonces $S(z)$ converge para todo $z \neq z_h$ como queríamos demostrar en la primera parte de la afirmación B).

Por otra parte $S(z)$ es la composición de las funciones analíticas $P(w)$ con $w = 1/(z - z_h)$ cuando $z \neq z_h$. Entonces $S(z)$ es analítica para todo $z \neq z_h$. Hemos terminado de probar la afirmación B).

Afirmación C) La función g definida en (1) tiene una extensión analítica a $\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_{h-1}\}$ que cumple

$$g(z) = f(z) - S(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_{h-1}, z_h\}$$

donde

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_h)^{-n} \quad \forall z \neq z_h$$

Prueba de la afirmación C): En (1) se define la función g para todo $z \in D^*_R(z_h)$. Ya vimos, en la observación A), que g se extiende analíticamente a $D_R(z_h)$. Sea $0 < r < R$. Basta probar que $g(z)$ se extiende analíticamente a todo $z \in \Omega$ tal que $z \neq z_1, z_2, \ldots, z_{h-1}$ y tal que $|z - z_h| > r$. Por (3):

$$g(z) = f(z) - S(z) \quad \forall\, z \in D^*_R(z_h)$$

La función f, por hipótesis, es analítica para todo $z \in \Omega$ tal que $z \neq z_1, z_2, \ldots, z_{h-1}$ y tal que $|z - z_h| > r$. Y por la afirmación B) la función $S(z)$ está definida y es analítica para todo z tal que $|z - z_h| > r$. Esto termina de probar la afirmación C).

Afirmación D)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, dz = -a_1\, Ind_\gamma(z_h) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

Prueba de la afirmación D):

Usando la afirmación C) e integrando a lo largo de γ, se obtiene:

$$\int_\gamma g(z)\, dz = \int_\gamma (-S(z) + f(z))\, dz = -\int_\gamma \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_h)^{-n}\, dz + \int_\gamma f(z)\, dz \qquad (4)$$

Sea $r > 0$ menor que R y menor o igual que la distancia (positiva) de la curva γ^* al punto $z_h \notin \gamma^*$. Por construcción, para todo $z \in \gamma^*$ se cumple $|z - z_h| \geq r$. Por la afirmación B) la serie $S(z)$ converge uniformemente en $|z - z_h| \geq r$. Aplicando el teorema de convergencia uniforme e integración, se obtiene:

$$\int_\gamma \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_h)^{-n}\, dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma a_{-n}(z - z_h)^{-n}\, dz \qquad (5)$$

Recordando que, para todo entero $m \neq -1$, la función $(z - z_h)^m$ tiene primitiva, que es $(z - z_h)^{m+1}/(m+1)$, su integral a lo largo de la curva cerrada γ es nula.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma a_{-n}(z - z_h)^{-n}\, dz = a_{-1} \int_\gamma (z - z_h)^{-1}\, dz = 2\pi i a_{-1} Ind_\gamma(z_h) \quad (6)$$

En la última igualdad se usó el teorema del índice.

Reuniendo (4), (5) y (6) se deduce la afirmación D) como queríamos demostrar.

Fin de la prueba del teorema 15.1.5.

Usando la afirmación C), y la hipótesis de inducción aplicada a la función g, se deduce:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, dz = \sum_{j=1}^{h-1} Res_f(z_j)\, Ind_\gamma(z_j) \quad (7)$$

Finalmente, reuniendo la afirmación D) con las igualdades (2) y (7) se deduce:

$$\sum_{j=1}^{h-1} Res_f(z_j)\, Ind_\gamma(z_j) = -Res_f(z_h)\, Ind_\gamma(z_h) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

Despejando la integral de f en la última igualdad se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{h} Res_f(z_j)\, Ind_\gamma(z_j),$$

que es la tesis de inducción que queríamos demostrar. $\square$

15.2. *Principio del argumento.*

El siguiente teorema, que es consecuencia del teorema del residuos, se aplica a la identificación de cuántos ceros y polos existen para una función meromorfa, en la región encerrada por una curva cerrada γ.

Teorema 15.2.1. Principio del argumento. *Sea f meromorfa en el abierto Ω. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva homotópica a un punto en Ω que no pasa por los ceros ni por los polos de f.*

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_m$ los ceros de f contenidos en Ω y tales que $Ind_\gamma(z_j) \neq 0$. Sean $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sus respectivas multiplicidades. Sean $w_1, w_2, \ldots, w_n$ los polos de f contenidos en Ω y tales que $Ind_\gamma(p_j) \neq 0$. Sean $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sus respectivas multiplicidades.

Sea $f \circ \gamma$ la curva que tiene parametrización $z = f(\gamma(t)),\ t \in [a, b]$ donde $z = \gamma(t),\ t \in [a, b]$ es una parametrización de γ.

Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{m} k_j Ind_\gamma(z_j) - \sum_{j=1}^{n} h_j Ind_\gamma(w_j) = Ind_{f\circ\gamma}(0)$$

Nota 15.2.2. El principal uso del Principio del Argumento se da cuando γ es una curva de Jordan (curva cerrada simple, es decir sin más autointersecciones que los extremos final e inicial). Los puntos tales que el índice de γ no es nulo, son los puntos del interior a γ (de la región acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$). El principio del argumento dice, en ese caso, lo siguiente:

Principio del argumento. *La cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f, en el interior a la curva de Jordan γ, contado cada uno tantas veces como su multiplicidad, es igual a $(1/2\pi i)\int_\gamma f'(z)/f(z)\,dz$ y es igual a la cantidad de vueltas que da la curva $f \circ \gamma$ alrededor del origen.*

En particular, si f es analítica en Ω, no tiene polos y entonces el resultado anterior es la cantidad de ceros de f en el interior de γ, contado cada uno tantas veces como su multiplicidad.

El nombre "Principio del Argumento" se justifica porque el último miembro de la igualdad en el teorema 15.2.1, el índice de la curva $f \circ \gamma$ en en punto $z = 0$, es la cantidad de vueltas que da esa curva cerrada alrededor del origen, es decir la variación total continua del argumento de $f(\gamma(t))$ al variar t en el intervalo $[a, b]$.

Demostración del teorema 15.2.1: Aplicaremos el teorema de los residuos (teorema 15.1.5) a la función $f'(z)/f(z)$. Las singularidades aisladas de esta función para las que el índice de γ es cero, no influyen en el cálculo de la integral. Aquellas para las el índice de γ es distinto de cero, son los ceros $z_1, z_2 \dots, z_m$ de f y los polos $w_1, w_2, \dots, w_n$ de f (que son los mismos polos que los de f' ya que f' es analítica donde es f).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{m} Res_{f'/f}(z_j) Ind_\gamma(z_j) + \sum_{j=1}^{n} Res_{f'/f}(w_j) Ind_\gamma(w_j) \quad (1)$$

Ahora calculemos el residuo de cada una de esas singularidades para la función $f'(z)/f(z)$.

Si z_j es un cero de orden k_j para f, entonces por lo observado en la definición 12.2.2, existe una función analítica $g(z)$ en un entorno $D_R(z_j)$ tal que:

$$f(z) = (z - z_j)^{k_j} g(z) \quad \forall\, z \in D_R(z_j), \;\; g(z_j) \neq 0$$

Derivando respecto de z:

$$f'(z) = k_j (z - z_j)^{k_j - 1} g(z) + (z - z_j)^{k_j} g'(z)$$

Luego, tomando el cociente:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_j}{z - z_j} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (2)$$

Como la función g es analítica en $D_R(z_j)$ y no se anula en $z = z_j$, no se anula en un entorno de $z = z_j$ y el cociente $g'(z)/g(z)$ resulta ser una función analítica en un entorno de z_j. Por lo tanto la igualdad (2) dice que el desarrollo de Laurent de f'/f en un entorno pinchado de z_j tiene coeficiente $a_{-1} = k_j$. Por la proposición 15.1.3, se cumple:

$$Res_{f'/f}(z_j) = k_j \quad (3)$$

Si w_j es un polo de orden h_j para f, entonces por lo observado en la definición 12.4.3, existe una función analítica $g(z)$ en un entorno $D_R(w_j)$ tal que:

$$g(z) = (z - w_j)^{h_j} f(z) \quad \forall\, z \in D_R(w_j), \;\; g(w_j) \neq 0$$

Derivando respecto de z:

$$g'(z) = h_j (z - w_j)^{h_j - 1} f(z) + (z - w_j)^{h_j} f'(z)$$

Luego, tomando el cociente:

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{h_j}{z - w_j} + \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (4)$$

Como la función g es analítica en $D_R(z_j)$ y no se anula en $z = w_j$, no se anula en un entorno de $z = w_j$ y el cociente $g'(z)/g(z)$ resulta ser una función analítica en un entorno de z_j. Por lo tanto la igualdad (4) dice que el desarrollo de Laurent de f'/f en un entorno pinchado de w_j es:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{h_j}{z - w_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Entonces ese desarrollo de Laurent tiene coeficiente $a_{-1} = -h_j$. Por la proposición 15.1.3, se cumple:

$$Res_{f'/f}(w_j) = -h_j \quad (5)$$

Sustituyendo (3) y (5) en (1) se deduce:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{m} k_j Ind_\gamma(z_j) - \sum_{j=1}^{n} h_j Ind_\gamma(w_j)$$

Esta es la primera igualdad de la tesis que queríamos demostrar.

Ahora probemos la segunda igualdad de la tesis:

$$\text{A probar:} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = Ind_{f\circ\gamma}(0)$$

Sea $\gamma = \gamma(t),\ t \in [a, b]$ una parametrización de la curva γ. Consideremos $u(t) = f(\gamma(t)),\ \ t \in [a, b]$ como parametrización de la curva $f \circ \gamma$.

Por definición de integral, se tiene:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)}{f(\gamma(t))}\, dt \quad (6)$$

Por la regla de la cadena, si $u(t) = f(\gamma(t))$, entonces $\dot u(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)$. Sustituyendo en (6) se obtiene:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_a^b \frac{\dot u(t)}{u(t)}\, dt \quad (7)$$

Por otra parte, por el teorema del índice, y por la definición de integral a lo largo de una curva $u = u(t)$, se tiene:

$$Ind_{f\circ\gamma}(0) \cdot 2\pi i = \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{u}\, du = \int_a^b \frac{\dot u(t)}{u(t)}\, dt \quad (8)$$

Reuniendo (7) y (8) se obtiene la igualdad

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = Ind_{f\circ\gamma}(0)$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

15.3. *Teorema de Rouché.*

El siguiente teorema de Rouché permite conocer el número de ceros y polos (contados con su multiplicidad) de una función f dentro de una región acotada, sabiendo cuál es el número de ceros y polos en esa región, de otra función conocida g. Por ejemplo $g(z) = 10z^4$ tiene en el disco abierto $D = \{|z| < 1\}$ exactamente cuatro ceros y ningún polo (contado cada uno con su multiplicidad). En efecto, no tiene ningún polo porque $10z^4$ es analítica. Tiene 4 ceros contados con su multiplicidad, porque tiene el cero $z = 0 \in D$ con multiplicidad 4.

El teorema de Rouché afirma que cualquier otra función $f = f(z)$ meromorfa y que cumpla las hipótesis en relación a $g(z) = 10z^4$, en el borde de D (o sea en la circunferencia $\partial D = \{|z| = 1\}$), tendrá también exactamente 4 ceros y ningún polo en D. Por ejemplo, el polinomio $f(z) = (1+i)z^9 + z^7 + 10z^4 + 3iz^2 + 2z + 1$ como se verá más adelante en el ejemplo 15.3.3.

Teorema 15.3.1. Teorema de Rouché. *Sean f y g dos funciones meromorfas en Ω. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva de Jordan (cerrada simple) homotópica a un punto en Ω y que no pasa por los ceros ni por los polos de f ni de g. Sea R la región acotada encerrada por γ.*

Si

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in \gamma^*$$

entonces la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f en R (contados con su multiplicidad) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de g en R (contados con su multiplicidad).

Nota 15.3.2. Otro enunciado del teorema de Rouché. La desigualdad en la hipótesis del teorema de Rouché puede sustituirse por la siguiente:

Si se cumple

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall\, z \in \gamma^*$$

entonces, vale la tesis del teorema de Rouché.

En efecto, si vale $|f(z)-g(z)| < |g(z)| \quad \forall\, z \in \gamma^*$, entonces $|f(z)+-(g(z)| < |-g(z)|+|f(z)|$ y se verifica la hipótesis del teorema de Rouché para f y $-g$. Por lo tanto se verifica la tesis del teorema de Rouché, ya que los ceros y polos de $-g$ y g son los mismos con las mismas multiplicidades.

Demostración del teorema 15.3.1:

Dividiendo la desigualdad de la hipótesis entre $|g(z)| \neq 0$, para $z \in \gamma^*$, se obtiene:

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} + 1\right| < \frac{|f(z)|}{|g(z)|} + 1$$

Entonces, el cociente $f(z)/g(z)$ no es un número real ≥ 0, para ningún $z \in \gamma^*$, ya que para todo número real $\lambda \geq 0$ se cumple $|\lambda + 1| = \lambda + 1 = |\lambda| + 1$ y no la desigualdad de la hipótesis.

Entonces la función
$$h(z) = Log_{[0,2\pi)} \frac{f(z)}{g(z)}$$
está bien definida y es continua y derivable para todo $z \in \gamma^*$, ya que el número complejo dentro del logaritmo nunca es un real $\lambda \geq 0$. Derivando $h(z)$ se obtiene:

$$h'(z) = \frac{g(z)}{f(z)} \cdot \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Por la regla de Barrow $\int_\gamma h'(z)\, dz = 0$, ya que la curva γ es cerrada. Luego, deducimos que

$$0 = \int_\gamma h'(z)\, dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 0$$

de donde
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz \quad (1)$$
Aplicando el principio del argumento (ver teorema 15.2.1 y la nota 15.2.2), el primer miembro de la igualdad (1) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f en la región R (contados con su multiplicidad). Análogamente, el segundo miembro de la igualdad (1) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de g en la región R (contados con su multiplicidad). Por lo tanto, queda demostrada la tesis. □

Ejemplo 15.3.3. Ejercicio sobre el teorema de Rouché.
Mostrar que el polinomio $f(z) = (1+i)z^9 + z^7 + 10z^4 + 3iz^2 + 2z + 1$ tiene exactamente 4 raíces (contadas con su multiplicidad) en el interior del círculo $D = \{|z| < 1\}$.

Sea $g(z) = 10z^4$. Tiene en el disco abierto $D = \{|z| < 1\}$ exactamente cuatro ceros y ningún polo (contado cada uno con su multiplicidad).

Comparando f y g, para verificar que cumplen las hipótesis del teorema de Rouché (ver teorema 15.3.1) y nota 15.3.2, en la circunferencia $\partial D = \{|z| = 1\}$, se obtiene:

$$|f(z) - g(z)| = |(1+i)z^9 + z^7 + 3iz^2 + 2z + 1| \leq 2|z|^9 + |z|^7 + 3|z|^2 + 2|z| + 1 \leq 9 \quad \forall\, z \in \partial D$$

$$\forall\, z \in \partial D : 9 = 9|z|^4 < 10|z|^4 = |g(z)|$$

Luego:
$$\forall\, z \in \partial D : |f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad (1)$$

Estas son las hipótesis del teorema de Rouché, según lo observado en la nota 15.3.2. Aplicando ese teorema se deduce que el polinomio $f(z)$ tiene, de sus 9 raíces (contadas con multiplicidad) exactamente 4 en el interior del círculo D.

Se observa que la hipótesis de la curva ∂D no pasa por los ceros ni por los polos de f ni de g se verifica inmediatamente. Por un lado f y g no tienen polos porque son polinomios. Por otro lado el único cero de g es $z = 0$ (con orden 4) que no está en ∂D. Además, por (1), $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \partial D$, pues de lo contrario quedaría $|g(z)| < |g(z)|$ lo que es absurdo. □

15.4. *Ejemplos.*

Además de los ejemplos en esta subsección, se dan ejemplos en la sección 16.

15.4.1. Ejemplo del teorema de los residuos. Calcular

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz$$

a lo largo de la curva $\gamma_R = [-R, R] + S_R$ donde $S_R : z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi,\ R$ constante real mayor que 1.

Los polos de la función $f(z)$ en el integrando son $z = i$ doble, y $z = -i$ doble. La curva γ_R da una vuelta en sentido antihorario alrededor del polo $z = i$ y ninguna vuelta alrededor de $z = -i$. Por lo tanto

$$Ind_{\gamma_R}(i) = 1, \quad Ind_{\gamma_R}(-i) = 0$$

Aplicando el teorema de los residuos (ver teorema 15.1.5), resulta:

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz = 2\pi i\, Res_f(i)$$

Calculemos el residuo $Res_f(i)$ aplicando la proposición 15.1.4:

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}, \quad g(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+i)^2}, \quad Res_f(i) = g'(i)$$

$$Res_f(i) = \left(\frac{ze^{iz}}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i} = \frac{e^{iz}(z+i)^2 + ize^{iz}(z+i)^2 - 2(z+i)ze^{iz}}{(z+i)^4}\Bigg|_{z=i}$$

$$Res_f(i) = \frac{e^{iz}((1+iz)(z+i) - 2z)}{(z+i)^3}\Bigg|_{z=i}$$

$$Res_f(i) = \frac{e^{-1}(-2i)}{(2i)^3} = \frac{e^{-1}}{4}$$

Luego el valor de la integral es:

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz = \frac{i\pi e^{-1}}{2} \qquad \square$$

15.4.2. Ejemplo de aplicación de la teoría de los residuos al cálculo de una integral impropia: Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{x \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Hay que calcular el límite cuando $R \to +\infty$ de la integral

$$I_R = \int_0^R \frac{x \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad (1)$$

Consideremos la función meromorfa en el plano complejo:

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}$$

y la integral

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \int_{[-R,0]} \frac{ue^{iu}}{(1+u^2)^2}\,du + \int_{[0,+R]} \frac{xe^{ix}}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad (2)$$

Haciendo el cambio de variable $u = -x$ se obtiene:

$$\int_{-R}^{0} \frac{ue^{iu}}{(1+u^2)^2}\,du = \int_{R}^{0} \frac{-xe^{-ix}}{(1+x^2)^2}\,(-dx) = -\int_{0}^{R} \frac{xe^{-ix}}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Luego, sustituyendo en (2) se deduce:

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = -\int_0^R \frac{xe^{-ix}}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_0^R \frac{xe^{ix}}{(1+x^2)^2}\,dx = 2i\int_0^R \frac{x\operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Concluimos, de la última igualdad y de (1), que

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = 2i\,I_R \qquad (3)$$

Si cerramos el segmento $[-R,R]$ con un arco de circunferencia $S_R : z = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi$, llamando $\gamma_R = [-R,R] + S_R$ se obtiene:

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{S_R} f(z),dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \qquad (4)$$

Usando la teoría de los residuos hemos calculado en el ejemplo 15.4.1 la siguiente integral, para $R > 1$:

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz = \frac{i\pi e^{-1}}{2} \qquad (5)$$

Reuniendo (3), (4) y (5) se obtiene:

$$I_R = \frac{\pi e^{-1}}{4} - \frac{1}{2i}\int_{S_R} f(z)\,dz \quad \forall R > 1 \qquad (6)$$

Aplicando ahora el lema de Jordan (ver última parte del lema 11.5.3), a la función $g(z) = z/(1+z^2)^2$, se cumple:

$$f(z) = \frac{z}{(1+z^2)^2} \cdot e^{iz}, \quad \text{donde } \lim_{z\to\infty} \frac{z}{(1+z^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \frac{z\,e^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz = 0$$

Luego, de (6) se deduce:

$$\lim_{R\to+\infty} I_R = \frac{\pi e^{-1}}{4}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi e^{-1}}{4} \qquad \square$$

16. Ejercicios resueltos sobre cálculo de residuos.

En esta sección se dan ejemplos de cálculo de integrales de funciones reales, propias e impropias, usando la Teoría de los Residuos. Complementa los ejemplos dados en la sección 9 y los dados en la subsección 15.4.

16.1. *Integrales de funciones racionales en la circunferencia.*

Ejercicio 16.1.1. Sea $R(x, y)$ una función racional de dos variables tal que no se anula el denominador en la circunferencia unitaria $\partial D : z = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Probar que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt = -i \int_{\partial D} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z}$$

b) Calcular

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{5 - 3\cos t}\, dt$$

Parte a) Aplicando la definición de integral de una función continua a lo largo de la circunferencia $\partial D : z(t) = e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$ resulta:

$$I = -i \int_{\partial D} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z} =$$

$$I = -i \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right), \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right) ie^{it}\, \frac{dt}{e^{it}}$$

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt \quad \Box$$

Parte b) Primero veamos que la integral que se pide calcular es la mitad de la integral de la misma función en el intervalo $[-\pi, \pi]$. En efecto, la función en el integrando es $\cos 2t \,/\, (5 - 3\cos t)$; es una función par. Por lo tanto su integral en el intervalo $[-\pi, 0]$ es igual a su integral en el intervalo $[0, \pi]$. Luego, su integral en el intervalo $[-\pi, \pi]$, que es la suma de ambas, es el doble de cada una de ellas.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{5 - 3\cos t}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2t}{5 - 3\cos t}\, dt$$

Con la misma demostración de la parte a), pero parametrizando la circunferencia ∂D con $z = e^{it}, \ -\pi \leq t \leq \pi$; usando que $e^{2it} = z^2$ para $z = e^{it}$, y que $\cos 2t = (1/2)(e^{2it} + e^{-2it})$, se obtiene:

$$I = \frac{-i}{2} \int_{\partial D} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{5 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z} = \frac{i}{2} \int_{\partial D} \frac{z^4 + 1}{z^2(3z^2 - 10z + 3)}\, dz = \frac{i}{2} \int_{\partial D} \frac{z^4 + 1}{z^2(z - 3)(3z - 1)}\, dz$$

Los polos de la función $f = (z^4 + 1)/(z^2(z - 3)(3z - 1))$ en el integrando son las raíces del denominador. De las raíces del denominador solo $z = 0$ doble y $z = 1/3$ están en el disco D encerrado por la circunferencia ∂D. El índice de ∂D en ellas es 1, y en la otra raíz $z = 3$ del denominador el índice es 0. Luego, aplicando el teorema del índice:

$$I = \frac{i}{2}\, 2\pi i \left(Res_f(0) + Res_f(1/3)\right) \quad (1)$$

Calculemos ambos residuos, usando la proposición 15.1.4:

$$Res_f(0) = [z^2 f(z)]'|_{z=0} = \left(\frac{z^4+1}{(z-3)(3z-1)} \right)' \Bigg|_{z=0} = \frac{10}{9}$$

$$Res_f(1/3) = [(z-1/3)f(z)]'|_{z=1/3} = \left(\frac{z^4+1}{3z^2(z-3)} \right)' \Bigg|_{z=1/3} = \frac{-41}{36}$$

Sustituyendo en (1) resulta:

$$I = \frac{i}{2}\, 2\pi i \left(\frac{10}{9} - \frac{41}{36} \right) = \frac{\pi}{36}. \quad \square$$

16.2. *Integrales impropias mediante el cálculo de residuo en alguna raíz $n-$ésima.*

Ejercicio 16.2.1. -
Calcular para $n \geq 2$ natural fijo la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

(Sugerencia: integrar en el ángulo comprendido entre las semirrectas $arg(z) = 0$ y $arg(z) = 2\pi/n$.)

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n}$$

Tiene polos en las n raíces $n-$ésimas de -1, es decir en los puntos z_k tales que $z_k^n = -1$. Escribiendo $-1 = e^{i\pi + 2k\pi}$ $k = 0, 1, 2 \ldots, n-1$, se obtiene $z_k = e^{i\pi/n} e^{i2k\pi/n}$.

Consideremos para $R > 1$ el arco S_R de circunferencia de centro en el origen y radio R siguiente: $S_R : z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi/n$; (hacer dibujo) y la curva cerrada:

$$\gamma_R = [0, R] + S_R + [Re^{2i\pi/k}, 0]$$

La curva γ_R da un vuelta sola en sentido antihorario alrededor del polo $z_0 = e^{\pi i/n}$ de la función f, y no da ninguna vuelta alrededor de los demás polos de f. Por lo tanto, aplicando el teorema de los residuos, se tiene:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/n}) \quad (1)$$

Por otro lado:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{[0,R]+S_R-[0,Re^{2i\pi/k}]} f(z)\, dz$$

de donde, usando (1) se obtiene:

$$\int_{-[0,Re^{2i\pi/k}]+[0,R]} f(z)\, dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/n}) - \int_{S_R} f(z)\, dz \qquad (2)$$

Parametrizando el segmento $[0,R]$ con $z = x,\ 0 \leq x \leq R$ y el segmento $[0, Re^{2i\pi/k}]$ con $z = x\, e^{2\pi i/n}\ 0 \leq x \leq R$, se obtiene:

$$\int_{-[0,Re^{2i\pi/k}]+[0,R]} f(z)\, dz = e^{2\pi i/n} \int_R^0 \frac{1}{1+x^n}\, dx + \int_0^R \frac{1}{1+x^n}\, dx = (1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^R \frac{1}{1+x^n}\, dx$$

Sustituyendo en (2) resulta:

$$(1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^R \frac{1}{1+x^n}\, dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/n}) - \int_{S_R} f(z)\, dz \quad (3)$$

Ahora tomaremos el límite cuando $R \to +\infty$, aplicando el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1) a la integral de f a lo largo del arco de circunferencia S_R.

En efecto

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^n} = 0$$

Luego, por el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1), se deduce que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = 0$$

Sustituyendo en (3) cuando $R \to +\infty$ resulta:

$$(1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/n}) \quad (4)$$

Ahora solo resta calcular el residuo de f en el polo $e^{\pi i/n}$ que es un polo simple. Aplicando la última afirmación de la proposición 15.1.4, se obtiene:

$$Res_f(e^{\pi i/n}) = \frac{1}{A} \quad \text{donde} \quad A = (1+z^n)'|_{z=e^{\pi i/n}}$$

$$Res_f(e^{\pi i/n}) = \frac{1}{nz^{n-1}|_{z=e^{\pi i/n}}} = \left.\frac{z}{nz^n}\right|_{z=e^{\pi i/n}} = \frac{1}{-n} \cdot e^{\pi i/n}$$

Sustituyendo en (4) se obtiene:

$$(1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx = \frac{-2\pi i}{n} \cdot e^{\pi i/n}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx = \frac{-2\pi i}{n} \cdot \frac{e^{\pi i/n}}{1 - e^{2\pi i/n}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{2i}{e^{\pi i/n} - e^{-\pi i/n}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/n)} \qquad \square$$

Ejercicio 16.2.2. Calcular

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx$$

Primero hacemos el cambio de variable $x = u^2$. La integral impropia dada queda

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}\, du$$

Procedemos de igual forma que para la integral del ejemplo anterior, integrando en el ángulo formado por las semirrectas $arg(z) = 0$ y $arg(z) = \pi/2$.

Sea

$$f(z) = \frac{2z^2}{1+z^4}$$

Tiene polos en las raíces cuartas de -1, es decir en los puntos $z_k = e^{i\pi/4}\, e^{ik\pi/2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$.

Consideremos para $R > 1$ el arco S_R de circunferencia de centro en el origen y radio R siguiente: $S_R : z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi/2$; (hacer dibujo) y la curva cerrada:

$$\gamma_R = [0, R] + S_R + [Ri, 0]$$

La curva γ_R da un vuelta sola en sentido antihorario alrededor del polo $z_0 = e^{\pi i/4}$ de la función f, y no da ninguna vuelta alrededor de los demás polos de f. Por lo tanto, aplicando el teorema de los residuos (teorema 15.1.5), se tiene:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/4}) \qquad (1)$$

Por otro lado:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{[0,R]+S_R-[0,Ri]} f(z)\, dz$$

de donde, usando (1) se obtiene:

$$\int_{-[0,Ri]+[0,R]} f(z)\, dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/4}) - \int_{S_R} f(z)\, dz \qquad (2)$$

Parametrizando el segmento $[0, R]$ con $z = x,\ 0 \leq x \leq R$ y el segmento $[0, Ri]$ con $z = x\, i,\ \ 0 \leq x \leq R$, se obtiene:

$$\int_{-[0,Ri]+[0,R]} f(z)\, dz = -(i)^3 \int_0^R \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx + \int_0^R \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx = (1+i) \int_0^R \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx$$

Sustituyendo en (2) resulta:

$$(1+i) \int_0^R \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/4}) - \int_{S_R} f(z)\, dz \qquad (3)$$

Ahora tomaremos el límite cuando $R \to +\infty$, aplicando el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1) a la integral de f a lo largo del arco de circunferencia S_R.

En efecto

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z^3}{1+z^4} = 0$$

Luego, por el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1), se deduce que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = 0$$

Sustituyendo en (3) cuando $R \to +\infty$ resulta:

$$(1+i) \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/4}) \quad (4)$$

Ahora solo resta calcular el residuo de f en el polo $e^{\pi i/4}$ que es un polo simple. Aplicando la última afirmación de la proposición 15.1.4, se obtiene:

$$Res_f(e^{\pi i/4}) = \frac{1}{A} \quad \text{donde } A = \left(\frac{1+z^4}{2z^2} \right)' \Bigg|_{z=e^{\pi i/4}} \qquad (5)$$

$$\left(\frac{1+z^4}{2z^2} \right)' = \frac{8z^5 - 4z - 4z^5}{4z^4} = \frac{z(z^4-1)}{z^4}$$

$$A = \frac{z(z^4-1)}{z^4} \Bigg|_{z=e^{\pi i/4}} = 2e^{\pi i/4}$$

Sustituyendo en (5) se obtiene:

$$Res_f(e^{\pi i/4}) = \frac{e^{-\pi i/4}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$$

Sustituyendo en (4) resulta:

$$(1+i) \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx = 2\pi i\, \frac{\sqrt{2}}{4}(1-i) = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}(1+i)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

Luego, como demostramos al principio, la integral dada I es igual a la integral que calculamos. Se concluye:

$$I = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \qquad \square$$

16.3. *Integrales impropias de potencias reales de* z.

Ejercicio 16.3.1. Sea p un número real fijo tal que $0 < p < 1$. Calcular

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-p}}{1+x}\, dx$$

Hacemos el cambio de variable $x^p = u$, o lo que es lo mismo $x = u^q$, donde $q = 1/p > 1$. Usando que $dx = qu^{q-1}du$, $x^{-p} = u^{-1}$ la integral I se transforma en

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{qu^{q-2}}{1+u^q}\, du \qquad \text{donde } q = \frac{1}{p}$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{qz^{q-2}}{1+z^q} \qquad (1)$$

Aquí la potencia q-ésima, con q real , debe definirse, para z complejo como

$$z^q = e^{q\,Log(z)} \quad \text{donde } Log(z) = Log_{(-\pi,\pi]}(z) \quad \forall\, z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \qquad (2)$$

Esta función z^q en el abierto Ω extiende la función x^q definida para x real positivo.

Usando la derivada de función compuesta en la primera igualdad de (2) se deduce que z^q es analítica en Ω y que su derivada para todo $z \in \Omega$ es $(z^q)' = qz^{q-1}$. Además, tomando el argumento de la primera igualdad en (2) se deduce que el argumento de z^q es $qArg_{(-\pi,\pi]}z$. Además, tomando módulo, se deduce que $|z^q| = e^{qL|z|} = |z|^q$

Luego, la igualdad $z^q = -1$ (que anula el denominador de la función $f(z)$ en la igualdad (1)) se verifica para todo z tal que $|z| = 1$ y $qArg_{(-\pi,\pi]}(z) = -\pi + 2k\pi$ con k entero. Es decir las raíces del denominador son los complejos z con módulo 1 y tales que $Arg_{(-\pi,\pi]}(z) = (\pi/q) + 2k\pi/q$ con k entero. (Obsérvese que esa igualdad solo la tiene que verificar el argumento de z comprendido en $(-\pi, \pi]$). Hay una cantidad finita de tales complejos. Son entonces polos simples de la función f dada en la igualdad (1). Entre estos polos $z_0 = e^{i\pi/q}$ es el único comprendido en el ángulo formado por las semirrectas $arg(z) = 0$ y $arg(z) = 2\pi/q$.

Entonces podemos proceder en forma similar a lo realizado en los dos ejercicios anteriores.

Consideremos para $r < 1$ y para $R > 1$ los arcos S_r y S_R de circunferencias de centro en el origen y radios r y R respectivamente, como sigue: $S_R : z = re^{it}$, $\quad S_R : z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi/q$; (hacer dibujo) y la curva cerrada:

$$\gamma_{r,R} = [r, R] + S_R + [Re^{2i\pi/q}, re^{2i\pi/q}] - S_r$$

La curva γ_R está contenida en el abierto Ω donde f es meromorfa; da un vuelta sola en sentido antihorario alrededor del polo $z_0 = e^{\pi i/q}$ de la función f; y no da ninguna vuelta alrededor de los demás polos de f. Por lo tanto, aplicando el teorema de los residuos (ver teorema 15.1.5), se tiene:

$$\int_{\gamma_{r,R}} f(z)\, dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/q}) \qquad (3)$$

Por otro lado:

$$\int_{\gamma_{r,R}} f(z)\, dz = \int_{[r,R]+S_R-[re^{2i\pi/q},Re^{2i\pi/q}]-S_r} f(z)\, dz$$

de donde, usando (3) se obtiene:

$$\int_{[r,R]} f(z)\, dz - \int_{[re^{2i\pi/q},Re^{2i\pi/q}]} f(z)\, dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/n}) - \int_{S_R} f(z)\, dz + \int_{S_r} f(z)\, dz \qquad (4)$$

Parametrizando el segmento $[r,R]$ con $z=x,\ r\leq x\leq R$ y el segmento $[re^{2i\pi/q}, Re^{2i\pi/q}]$ con $z=x\,e^{2\pi i/q},\quad r\leq x\leq R$, se obtiene:

$$\int_{[r,R]} f(z)\,dz = \int_r^R \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\,dx$$

$$\int_{[re^{2i\pi/q},Re^{2i\pi/q}]} f(z)\,dz = e^{-2\pi i/q}\int_r^R \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\,dx$$

(Hemos usado que $z^q = x^q e^{(2\pi i/q)q} = x^q,\ dz = e^{2\pi i/q}dx,\quad z^{q-2} = x^{q-2}e^{-4\pi i/q}$.)

Luego, sustituyendo en (4) resulta:

$$(1-e^{-2\pi i/n})\int_r^R \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\,dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/q}) - \int_{S_R} f(z)\,dz + \int_{S_r} f(z)\,dz \qquad (5)$$

Ahora tomaremos el límite cuando $R\to+\infty$, aplicando el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1) a la integral de f a lo largo del arco de circunferencia S_R.

En efecto

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{qz^{q-1}}{1+z^q} = 0$$

Luego, por el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1), se deduce que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

Ahora tomaremos el límite cuando $r\to 0^+$, aplicando el lema de deformación de curvas (lema 11.5.2) a la integral de f a lo largo del arco de circunferencia S_r.

En efecto

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{qz^{q-1}}{1+z^q} = 0$$

(Hemos usado que $|z^{q-1}| = |z|^{q-1}$ y que $q>1$). Luego, por el lema de deformación de curvas (lema 11.5.2), se deduce que

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{S_r} f(z)\,dz = 0$$

Sustituyendo en (5) cuando $R\to+\infty$ y $r\to 0^+$ resulta:

$$(1-e^{2\pi i/q})\int_0^{+\infty}\frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\,dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/q}) \qquad (6)$$

Ahora solo resta calcular el residuo de f en el polo $z_0 = e^{\pi i/q}$, que es un polo simple de f.

Primero veamos que z_0 es un polo simple de f. Para eso basta probar que $z_0 = e^{\pi i/q}$ es un cero simple de $1+z^q$. Existe un desarrollo en serie de potencias centrado en z_0 de $g(z) = 1+z^q$ porque esta función es analítica en Ω. Llamemos $a_n, n\geq 0$ a los coeficientes de ese desarrollo. El orden del cero z_0 es el primer $k\geq 1$ tal que $a_k\neq 0$. Para probar que el orden de z_0 es 1, basta ver que $a_1\neq 0$. Pero $a_1 = g'(z_0) = qz_0^{q-1}$. Como $|z_0| = 1$ se tiene $|a_1| = q|z_0|^{q-1} = q > 1 > 0$. Hemos terminado de probar que el polo $z_0 = e^{\pi i/q}$ de f es simple.

Aplicando la última afirmación de la proposición 15.1.4, se obtiene:

$$Res_f(e^{\pi i/q}) = \frac{1}{A} \quad \text{donde} \quad A = \left(\frac{1+z^q}{qz^{q-2}}\right)'\Bigg|_{z=e^{\pi i/q}}$$

$$A = \frac{1}{q} \;\; (z^{2-q} + z^2)'|_{z=e^{\pi i/q}} = (1/q)(2z + (2-q)z^{1-q})|_{z=e^{\pi i/q}} = e^{\pi i/q}$$

$$Res_f(e^{\pi i/q}) = e^{-\pi i/q}$$

Sustituyendo en (6) se obtiene:

$$(1 - e^{-2\pi i/q}) \int_0^{+\infty} \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\, dx = 2\pi i \cdot e^{-\pi i/q}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\, dx = \frac{2\pi i \;\; e^{-\pi i/q}}{1 - e^{-2\pi i/q}} = \pi \cdot \frac{2i}{e^{\pi i/q} - e^{-\pi i/q}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/q)} \qquad \square$$

Finalmente recordando que $q = 1/p$ se concluye:

$$I = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(p\pi)} \qquad \square$$

16.4. *Otros ejemplos.*

Ejercicio 16.4.1. a) Calcular

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}\, dz$$

siendo $\gamma_R = [0, R] + S_R - [0, Ri]$, donde $S_R : z = Re^{it}, \;\; t \in [0, \pi/2]$, con $R > 1$.

b) Probar que $|e^{iz^2}| \leq 1$ para todo z en el primer cuadrante.

c) Deducir que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}\, dz = 0$$

d) Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2 - \operatorname{sen} x^2}{1+x^4}\, dx$$

Parte a) La función

$$f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}$$

es meromorfa en el plano complejo con polos simples que son las raíces cuartas de -1, es decir los cuatro puntos $z_k = e^{\pi i/4}e^{k\pi i/2}, \;\; k = 0, 1, 2, 3$.

En la región encerrada por la curva γ_R (hacer dibujo) hay uno solo de estos polos, que es $z_0 = e^{\pi i/4}$. La curva γ_R da una vuelta sola en sentido antihorario alrededor de este polo.

Por lo tanto aplicando el teorema de los residuos (ver teorema 15.1.5), se obtiene:

$$I = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \; Res_f(e^{i\pi/4}) \quad (1)$$

Para calcular este residuo aplicamos la última parte de la proposición 15.1.4, observando que el polo es simple:

$$Res_f(e^{\pi i/4}) = \frac{1}{A} \quad \text{donde} \quad A = \left(\frac{1+z^4}{e^{iz^2}}\right)'\Bigg|_{z=e^{\pi i/4}} \tag{2}$$

$$\left(\frac{1+z^4}{e^{iz^2}}\right)' = \frac{e^{iz^2}(4z^3 - 2iz(1+z^4))}{e^{2iz^2}}$$

$$A = \frac{4z^3 - 2iz(1+z^4)}{e^{iz^2}}\Bigg|_{z=e^{\pi i/4}} = -4e \cdot \, e^{-i\pi/4}$$

(Hemos usado que $(e^{i\pi/4})^2 = i, \quad (e^{i\pi/4})^3 = (e^{i\pi/4})^4 e^{-i\pi/4} = -e^{-i\pi/4}$.)
Sustituyendo en (2) se obtiene:

$$Res_f(e^{\pi i/4}) = \frac{-e^{-1}}{4} e^{i\pi/4} = \frac{-\sqrt{2}e^{-1}}{8}(1+i)$$

(Hemos usado que $e^{i\pi/4} = (\sqrt{2}/2)(1+i)$.)
Sustituyendo en (1) resulta:

$$I = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \;\cdot\; \frac{-\sqrt{2}e^{-1}}{8}(1+i) = \frac{\sqrt{2}e^{-1}\pi}{4}(1-i). \quad \square$$

Parte b) Tomando $z = x + iy$ con x e y reales:

$$|e^{iz^2}| = |e^{i(x^2-y^2+2ixy)}| = |e^{-2xy}e^{i(x^2-y^2)}| = e^{-2xy} \leq e^0 = 1$$

porque $xy \geq 0$ al estar z en el primer cuadrante.

Parte c) Hay que probar que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}\,dz = 0$$

No podemos aplicar el lema de deformación de curvas, con el enunciado tal como lo hemos dado en el lema 11.5.1), a la función

$$f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}$$

porque cuando $z \to \infty$ no existe el límite de $zf(z)$. (Ya que no existe el límite de e^{iz^2}.) Pero tomando z solamente en el primer cuadrante Q, obtenemos:

$$\lim_{z\to\infty,\quad z\in Q} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{ze^{iz^2}}{1+z^4} = 0 \quad (3)$$

porque por un lado e^{iz^2} está acotada en módulo, ya que $|e^{iz^2}| \leq 1$ para todo $z \in Q$ (por lo probado en la parte b)); y por otro lado

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^4} = 0$$

Como el arco de circunferencia S_R está comprendido en el primer cuadrante Q y se cumple (3) , se deduce que para todo $\epsilon > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$R > R_0 \;\; z \in S_R \;\; \Rightarrow \;\; |z| > R_0 \;\; z \in Q \;\; \Rightarrow |zf(z)| < \epsilon$$

Luego, integrando sobre S_R se obtiene:

$$R > R_0 \;\Rightarrow\; |\int_{S_r} f(z)\,dz| \leq \int_{S_R} |f(z)|\,|dz| =$$

$$= \int_{S_r} \frac{|zf(z)|}{|z|}\,|dz| = \int_{S_r} \frac{|zf(z)|}{R}\,|dz| < \epsilon \frac{\pi R}{R} = \epsilon \cdot \pi = \epsilon^* \quad (4)$$

donde, dado $\epsilon^* > 0$ se eligió $\epsilon = \epsilon^*/\pi$. Luego, (4) muestra que dado $\epsilon^* > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$R > R_0 \;\;\Rightarrow\;\; |\int_{S_R} f(z)\,dz| < \epsilon^*$$

Esto, por definición de límite, significa:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = 0 \quad \square$$

Parte d)

Consideremos la curva $\gamma_R = [0,R] + S_R + [Ri, 0]$ dada en la parte a). Sea

$$f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}$$

Por el resultado obtenido en la parte a) tenemos:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\sqrt{2}e^{-1}\,\pi}{4}\,(1-i) \quad (5)$$

Además, por construcción de la curva γ_R se cumple:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[Ri,0]+[0,R]+S_R} f(z)\,dz$$

Luego, usando (5) se deduce que:

$$\int_{-[0,Ri]+[0,R]} f(z)\,dz = \frac{\sqrt{2}e^{-1}\,\pi}{4}\,(1-i) - \int_{S_R} f(z)\,dz \quad (6)$$

Parametrizando el intervalo $[0,R]$ con $z = x, \;\; 0 \leq x \leq R$ y el intervalo $[0, Ri]$ con $z = ix, \;\; 0 \leq x \leq R$ se obtiene:

$$\int_{-[0,Ri]+[0,R]} f(z)\,dz = -i\int_0^R \frac{e^{-ix^2}}{1+x^4}\,dx + \int_0^R \frac{e^{ix^2}}{1+x^4}\,dx \quad (7)$$

Sustituyendo $e^{-ix^2} = \cos(x^2) - i\,\mathrm{sen}(x^2)$, $\quad e^{ix^2} = \cos(x^2) + i\,\mathrm{sen}(x^2)$, y tomando parte real en (7), resulta :

$$Re\left(\int_{-[0,Ri]+[0,R]} f(z)\,dz\right) = \int_0^R \frac{\cos(x^2) - \mathrm{sen}(x^2)}{1+x^4}\,dx \quad (8)$$

Reuniendo (6) con (8) resulta:

$$\int_0^R \frac{\cos(x^2) - \mathrm{sen}(x^2)}{1+x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}e^{-1}\,\pi}{4} - Re\left(\int_{S_R} f(z)\,dz\right) \qquad (9)$$

Usando la parte c)

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

Entonces, tomando límite en (9) cuando $R \to +\infty$ resulta:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2) - \mathrm{sen}(x^2)}{1+x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}e^{-1}\,\pi}{4} \qquad \square$$

17. Síntesis de la tercera parte.

17.1. *Ceros y singularidades aisladas.*

Los detalles y demostraciones de esta parte se encuentran en la sección 12.

Definición 17.1.1. Ceros de una función analítica.
Un cero de la función analítica $f \in H(\Omega)$ es un punto $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$.

Por el teorema de prolongación analítica, si f no es idénticamente nula en la componente conexa de Ω que contiene a a, entonces el cero a es aislado. (Ver corolario 5.2.2.)

Definición 17.1.2. Orden o multiplicidad de un cero.
Sea a un cero de la función analítica f no idénticamente nula en la región Ω. Se llama *multiplicidad u orden de a* al único entero $k \geq 1$ tal que:

$$f(z) = (z-a)^k g(z)$$

donde $g(z)$ es una función analítica en un disco $D_R(a)$ con $R > 0$, tal que

$$g(a) \neq 0$$

En resumen, el orden $k \geq 1$, o multiplicidad del cero a, es igual a:

- El único entero $k \geq 1$ tal que: $f(z) = (z-a)^k g(z)$, donde $g(z)$ es una función analítica en un disco $D_R(a)$ con $R > 0$, tal que $g(a) \neq 0$. (Por definición.)
- El lugar del primer coeficiente $a_k \neq 0$ del desarrollo en potencias de f centrado en a. (Por (1).)
- El único entero k tal que

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{(z-a)^k} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad \text{(Por (2).)}$$

- El primer natural para el cual la derivada $k-$ésima de $f(z)$ en $z = a$ no es cero. (Por (3).)

En particular, si a es un cero de f entonces $f'(a) \neq 0$ si y solo si el orden o multiplicidad de a es $k = 1$.

Definición 17.1.3. Ceros simples y múltiples.
Un cero aislado se llama simple si tiene orden o multiplicidad igual a 1, y se llama múltiple (doble, triple, etc) si tiene orden o multiplicidad ≥ 2 (2, 3, etc. respectivamente).

Definición 17.1.4. Singularidad aislada. Un punto $a \in \mathbb{C}$ se dice que es *una singularidad aislada de* f si $f \in H(D^*_R(a))$ para algún entorno pinchado $D^*_R(a)$ de a con radio $R > 0$.
El punto ∞ del plano complejo compactificado se dice que es *una singularidad aislada de* f si $f \in H(D^*_{1/R}(\infty))$ para algún entorno pinchado $D^*_{1/R}(\infty)$ con radio $1/R > 0$.

Definición 17.1.5. Clasificación de las singularidades aisladas.
Dada una singularidad aislada $a \in \mathbb{C}$ de f, se define:

- a es *singularidad evitable de* f si $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$.
- a es *un polo de* f si $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.
- a es *una singularidad esencial de* f si no existe $\lim_{z\to a} f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

Dado ∞ singularidad aislada de f se define:

- ∞ es *singularidad evitable de* f si $\lim_{z\to \infty} f(z) \in \mathbb{C}$.
- ∞ es *un polo de* f si $\lim_{z\to \infty} f(z) = \infty$.
- ∞ es *una singularidad esencial de* f si no existe $\lim_{z\to \infty} f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

Teorema 17.1.6. Caracterización de las singularidades evitables.
a) *Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *a es singularidad evitable de f.*

ii) *$f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$ para algún $R > 0$.*

iii) $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$.

iv) *f admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$ para algún $R > 0$*

b) *Sea ∞ una singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *∞ es singularidad evitable de f.*

ii) *$f(z)$ es acotada en $D^*_{1/R}(\infty)$ para algún $R > 0$.*

i) $\lim_{z\to\infty} f(z)/z = 0$.

Teorema 17.1.7. Caracterización de los polos complejos.
Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) *a es un polo de f.*

ii) *Para un primer natural $k \geq 1$ la función $(z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$ para algún $R > 0$. En consecuencia a es una singularidad evitable de $(z-a)^k f(z)$.*

iii) *Para un primer natural $k \geq 1$ la función $(z-a)^k f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$ para algún $R > 0$.*

iv) *Para un primer natural $k \geq 1$ existe*

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) \notin \{0, \infty\}$$

En consecuencia

$$0 \leq n < k \Rightarrow \lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = \infty$$

$$n > k \Rightarrow \lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = 0$$

v) *La función $1/f(z)$ tiene una extensión analítica en un entorno de $z = a$, y $z = a$ es un cero de orden $k \geq 1$ de la extensión analítica de $1/f$.*

Teorema 17.1.8. Caracterización de polo en ∞.
Sea ∞ singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) *∞ es un polo de f.*

ii) *Para un primer natural $k \geq 1$ la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D^*_{1/R}(\infty)$ para algún $R > 0$.*

iii) *Para un primer natural $k \geq 1$ existe*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^k} \notin \{0, \infty\}$$

En consecuencia

$$0 \leq n < k \ \Rightarrow \ \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = \infty$$

$$n > k \ \Rightarrow \ \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$$

Definición 17.1.9. Orden de un polo.
a) En virtud del teorema 12.4.1, el orden o multiplicidad $k \geq 1$ de un polo $a \in \mathbb{C}$ de f es:

- El primer natural $k \geq 1$ tal que la función $(z-a)^k f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$ para algún $R > 0$.
- El orden o multiplicidad de a como cero de la función analítica que extiende a $1/f$ a un entorno de a.
- El primer $k \geq 1$ tal que la función $(z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$.
- El único número entero k tal que $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) \notin \{0, \infty\}$.

  En consecuencia: $0 \leq n < k \ \Rightarrow \ \lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = \infty$;

  $n > k \ \Rightarrow \ \lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = 0$.

b) En virtud del teorema 12.4.2, el orden o multiplicidad $k \geq 1$ del polo ∞ de f es

- El primer natural $k \geq 1$ tal que la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D^*_{1/R}(\infty)$ para algún $R > 0$ (por definición)
- El único entero k tal que $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^k} \notin \{0, \infty\}$.

  En consecuencia $0 \leq n < k \ \Rightarrow \ \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = \infty$; $\quad n > k \ \Rightarrow \ \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$.
- El orden de $z = 0$ como polo de la función $f(1/z)$.

Definición 17.1.10. Polos simples y múltiples.
Un polo se llama simple si tiene orden 1, y se llama múltiple (doble, triple, etc) si tiene orden ≥ 2 (2, 3, etc. respectivamente).

Observación: Si $f \in H(\Omega)$ donde Ω es una región, no es idénticamente nula, entonces un cero de orden k de f es un polo de orden k de la función $1/f(z)$ y recíprocamente.

Proposición 17.1.11. Caracterización de las singularidades esenciales.
a) *Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f. Sea $D^*_R(a)$ el disco pinchado de radio $R > 0$ donde f es holomorfa. Entonces son equivalentes:*

i) *a es una singularidad esencial de f.*

ii) *Para ningún natural $k \geq 0$ la función $(z-a)^k f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$.*

iii) *Para ningún natural $k \geq 0$ la función $(z-a)^k f(z)$ admite extensión holomorfa a $D_R(a)$.*

iv) *Para ningún natural $k \geq 0$ existe $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.*

b) *Sea ∞ singularidad aislada de f. Sea $D^*_{1/R}(\infty)$ el entorno pinchado de ∞ donde f es holomorfa. Entonces son equivalentes:*

i) *∞ es una singularidad esencial de f.*

ii) *Para ningún natural $k \geq 0$ la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D^*_R(a)$.*

iii) *Para ningún natural $k \geq 0$ existe $\lim_{z\to\infty} f(z)/z^k$ en $\overline{\mathbb{C}}$.*

Teorema 17.1.12. Teorema de Weierstrass-Casorati.
Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ una singularidad esencial de f y sea $D^*(a)$ un disco pinchado de a donde f es holomorfa.
El conjunto imagen $f(D^*(a))$ es denso en $\mathbb{C}$, es decir todo punto $w \in \mathbb{C}$ es el límite de alguna sucesión de puntos $w_n \in f(D^*(a))$. Precisamente:

$$\forall\, w \in \mathbb{C} \;\text{ existe } z_n \in D^*(a) \quad \text{tal que} \quad \lim_{n\to+\infty} f(z_n) = w \quad (1)$$

Nota: Es válida una versión más fuerte del teorema anterior, llamado Teorema de Picard, cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 17.1.13. Teorema de Picard. *Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ una singularidad esencial de f y sea $D^*(a)$ un disco pinchado de a donde f es holomorfa. Entonces el conjunto imagen $f(D^*(a))$ es todo el conjunto $\mathbb{C}$ excepto a lo sumo un punto.*

17.2. *Series de Laurent.*

Los detalles y demotraciones de esta parte se encuentran en la sección 13.

Teorema 17.2.1. Construcción del desarrollo en serie de Laurent de una función analítica en una corona.
Sea f una función analítica en la corona

$$D(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

Entonces existe una serie (llamada serie de Laurent) tal que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall\, z \in D(z_0, R_1, R_2) \quad (1)$$

(Esta notación indica que la serie de Laurent en (1) es convergente puntualmente para todo $z \in D(z_0, R_1, R_2)$ y su suma coincide con $f(z)$).

Además

a) *La serie de Laurent que cumple* (1) *es única y sus coeficientes son:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D(z_0, R_1, R_2)$ *tal que* $Ind_\gamma(z_0) = 1$.

b) *La serie de Laurent que cumple* (1) *converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto* $K \subset D(z_0, R_1, R_2)$.

Nota 17.2.2. Corona de convergencia de una serie de Laurent.

Dada una serie de Laurent, la mayor corona

$$D(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$$

posible donde converge puntualmente (corona de convergencia), que coincide con el mayor abierto posible donde converge puntualmente la serie, se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$R_2 = \frac{1}{\text{lím sup}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad R_1 = \text{lím} \sup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \qquad (2)$$

Obsérvese que los entornos pinchados de las singularidades aisladas son coronas donde la función es holomorfa, por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema anterior.

Corolario 17.2.3. Serie de Laurent en las singularidades aisladas.

a) *Sea* $a \in \mathbb{C}$ *una singularidad aislada de* f *y sea* $D^*_R(a)$ *un entorno pinchado de* a *donde* f *es holomorfa.*

Entonces existe una serie de Laurent tal que:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n \quad \forall\, z \in D^*_R(a) \quad (1)$$

Además la serie de Laurent que cumple (1) *es única, converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto* $K \subset D^*_R(a)$*; y sus coeficientes verifican:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\, dz \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D^*_R(a)$ *tal que* $Ind_\gamma(a) = 1$.

b) *Sea* ∞ *una singularidad aislada de* f *y sea* $D^*_{1/R}(\infty)$ *un entorno de* ∞ *donde* f *es holomorfa.*

Entonces existe una serie de Laurent tal que:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \forall\, z \in D^*_{1/R}(\infty) \quad (2)$$

Además la serie de Laurent que cumple (2) *es única, converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto* $K \subset D^*_{1/R}(\infty)$*; y sus coeficientes verifican*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) z^{n-1}\, dz \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D^*_{1/R}(\infty)$ *tal que* $Ind_\gamma(0) = 1$.

Teorema 17.2.4. -

Clasificación de singularidades aisladas según su desarrollo de Laurent.

Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ *una singularidad aislada de* f*. Sean* a_n, $n \in \mathbb{Z}$ *los coeficientes de la serie de Laurent centrada en* a.

Entonces:

i) a es una singularidad evitable si y solo si $a_{-n} = 0 \ \forall\, n \geq 1$.

ii) a es un polo de orden $k \geq 1$ si y solo si $a_{-k} \neq 0$ y $a_{-n} = 0 \ \forall\, n \geq k$.

iii) a es una singularidad esencial si y solo si la sucesión a_{-n} para $n \geq 1$, tiene infinitos términos no nulos.

17.2.5. Cálculo de los coeficientes del desarrollo de Laurent mediante derivación.

Las fórmulas del corolario anterior dan fórmulas integrales para calcular los coeficientes del desarrollo de Laurent en cualquier singularidad aislada, en particular para las evitables y los polos.

Pero cuando la singularidad no es esencial, podemos dar también fórmulas con derivadas, para calcular los coeficientes del desarrollo de Laurent.

Si la singularidad a es evitable, y si seguimos llamando f a la extensión analítica de f al disco de centro a, entonces el desarrollo de Laurent de f centrado en $z = a$ es el desarrollo en serie de potencias de $z - a$. Luego:

$$a \in \mathbb{C} \text{ evitable } \ \Rightarrow \ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \ \ \forall\, n \geq 0$$

Si la singularidad a es un polo de orden k, podemos hacer lo mismo con la extensión analítica de $(z-a)^k f(z)$. Seguimos llamando con el mismo nombre $(z-a)^k f(z)$ a la función extendida. El coeficiente a_n del desarrollo de Laurent de f es el coeficiente b_{n+k} del desarrollo de Taylor de $(z-a)^k f(z)$. Se deduce:

$$a \in \mathbb{C} \text{ polo de orden } k \ \Rightarrow \ a_n = \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{d^{n+k}}{dz^{n+k}} \ \ (z-a)^k f(z) \right) \Bigg|_{z=a} \quad \forall\, n \geq -k$$

donde d^m/dz^m indica derivada $m-$ésima respecto de z.

17.3. *Teoremas de aproximación en compactos.*

Los detalles y demostraciones de esta parte se encuentran en la sección 14.

Definición 17.3.1. Funciones meromorfas. Una función f se dice que es *meromorfa en el abierto* Ω y se denota $f \in M(\Omega)$ si f es analítica en Ω excepto a lo sumo en una cantidad de puntos que sean todos singularidades aisladas evitables o polos.

Teorema 17.3.2. Caracterización de polinomios y funciones racionales.
a) *Una función entera (analítica en el plano complejo) que tenga en infinito un polo o una singularidad evitable, es un polinomio y recíprocamente.*
b) *Una función meromorfa en el plano complejo que tenga en infinito un polo o una singularidad evitable, es una función racional y recíprocamente.*

Teorema 17.3.3. Teorema pequeño de Picard.
Toda función entera (analítica en todo el plano complejo) *no constante tiene como recorrido todo el plano complejo excepto a lo sumo un punto.*

17.3.4. Ejemplos.
La función e^z recorre todo el plano complejo excepto el 0.
Los polinomios $P(z)$ de grado $k \geq 1$ recorren todo el plano complejo-

Definición 17.3.5. Convergencia uniforme en compactos.
Decimos que una sucesión f_n de funciones complejas definidas en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ *se aproxima en compactos (o converge uniformemente en compactos de* Ω*) a una función* $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, si para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un N (que puede depender del compacto K y del número ϵ dados, pero que no depende de z) tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f(z) - f_n(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K$$

Definición 17.3.6. Aproximación por funciones racionales.
Decimos que una función compleja f definida en el abierto Ω *se aproxima en compactos de* Ω *por funciones racionales* cuando existe una sucesión de funciones racionales f_n definidas en Ω (por lo tanto sus polos no están en Ω) que se aproxima en compactos (o converge uniformemente en compactos de Ω) a f.

Teorema 17.3.7. Aproximación de funciones meromorfas por funciones racionales.
a) Si f es entera entonces f se aproxima en compactos de $\mathbb{C}$ por polinomios.
b) Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$. Sea Ω el abierto que se obtiene de $\mathbb{C}$ retirando todos los polos de f.
Si f tiene en ∞ una singularidad aislada entonces f se aproxima en compactos de Ω por funciones racionales.

En el espacio funcional denotado como $C_\omega(\Omega)$, formado por todas las funciones analíticas en el abierto Ω, se define como topología, es decir la forma de aproximar funciones, aquella dada por la convergencia uniforme en compactos de Ω.

Teorema 17.3.8. Topología C_ω en el espacio de las funciones analíticas.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y sea una sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$ que converge uniformemente en compactos de Ω a una función f.

Entonces:

a) $f \in H(\Omega)$

b) *La sucesión de derivadas f'_n converge uniformemente en compactos de Ω a la derivada f'.*

c) *La sucesión de derivadas k-ésimas $f_n^{(k)}$ converge uniformemente en compactos de Ω a la derivada $k-$ésima $f^{(k)}$.*

Definición 17.3.9. Familia normal.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y sea una sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$, $n \geq 1$. La sucesión f_n se llama *familia normal* si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $M \geq 0$ (que puede depender del compacto K pero que es independiente de n y de z), tal que:

$$|f_n(z)| \leq M \quad \forall\, n \geq 1, \;\; \forall\, z \in K$$

Esta propiedad se llama *equi-acotación en compactos.*

Dicho de otra manera: una familia es normal si es equi-acotada en compactos.

Propiedades de las familias normales:

Si $f_n \in H(\Omega)$ es una familia normal en *Omega*, entonces:

- *f'_n también es una familia normal en Omega.*
- *f_n es una familia equicontinua en compactos de Omega.*

  Se dice que f_n es equicontinua en compactos, si para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$, existe δ (independiente de n y de z_0) tal que

  $$z_0 \in K, \; |z - z_0| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f_n(z) - f_n(z_0)| < \epsilon \;\; \forall\, n \geq 1$$

Teorema 17.3.10. Teorema de Montel.

Si la sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$ es una familia normal, entonces tiene alguna subsucesión que es uniformemente convergente en compactos de Ω.

17.4. *Teoría de los residuos.*

Los detalles y demostraciones de esta parte se encuentran en la sección 15.

Definición 17.4.1. Residuo de una función en una singularidad aislada.

Dada una función f que tiene en $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada, se llama residuo de f en a, y se denota como $Res_f(a)$ al siguiente número complejo:

$$Res_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

donde γ es cualquier curva cerrada contenida en el entorno pinchado $D^*_R(a)$ donde f es holomorfa, y tal que da una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de a. Por ejemplo suele tomarse $\gamma = \partial D_r(a)$, donde $0 < r < R$.

Nota: Se observa que el residuo, definido arriba, no depende de la elección de la curva γ.

El residuo de una función en una singularidad aislada se puede calcular de tres formas diferentes:

- Con la fórmula integral de la definición anterior.
- Como el coeficiente a_{-1} del desarrollo en serie de Laurent de la función f centrado en $z = a$ (o en ∞).
- Con la fórmula de derivación de la siguiente proposición 17.4.2, cuando la singularidad aislada en un polo.

Nota: El residuo de un polo que no es simple, o de una singularidad esencial, puede ser cero. Pero la de un polo simple es siempre diferente de cero, porque en ese caso el coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent es necesariamente no nulo.

Proposición 17.4.2. Fórmula del residuo para un polo usando la derivada:
Si f tiene un polo $a \in \mathbb{C}$ de orden $k \geq 1$ y g es la extensión analítica de $(z-a)^k f(z)$ en un entorno $D_R(a)$, entonces el residuo de f en a es:

$$Res_f(a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

En particular si a es un polo simple, $k = 1$ y la fórmula anterior se transforma en:

$$Res_f(a) = g(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) \neq 0.$$

$$Res_f(a) = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)}{1/f(z)} = \frac{1}{(1/f(z))'|_{z=a}} \neq 0$$

Teorema 17.4.3. Teorema de los residuos.
Si f es analítica en un abierto Ω excepto a lo sumo en una cantidad finita de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ (estos puntos son singularidades aisladas de f) *entonces para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$ que no pase por los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, y que sea homotópica a un punto en Ω, se cumple:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} Res_f(z_j)\, Ind_\gamma(z_j).$$

(Por convención la suma de la derecha es nula si $m = 0$.)

Nota: El teorema también es válido para una cantidad infinita de singularidades aisladas de f en Ω.

Teorema 17.4.4. Principio del argumento. *Sea f meromorfa no idénticamente nula en el abierto Ω. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva homotópica a un punto en Ω que no pasa por los ceros ni por los polos de f.*

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_m$ los ceros de f contenidos en Ω y tales que $Ind_\gamma(z_j) \neq 0$. Sean $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sus respectivas multiplicidades. Sean $w_1, w_2, \ldots, w_n$ los polos de f contenidos en Ω y tales que $Ind_\gamma(p_j) \neq 0$. Sean $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sus respectivas multiplicidades.

Sea $f \circ \gamma$ la curva que tiene parametrización $z = f(\gamma(t)),\ t \in [a,b]$ donde $z = \gamma(t),\ t \in [a,b]$ es una parametrización de γ.

Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{m} k_j Ind_\gamma(z_j) - \sum_{j=1}^{n} h_j Ind_\gamma(w_j) = Ind_{f\circ\gamma}(0)$$

Nota 17.4.5. El principal uso del Principio del Argumento se da cuando γ es una curva de Jordan (curva cerrada simple, es decir sin más autointersecciones que los extremos final e inicial). Los puntos tales que el índice de γ no es nulo, son los puntos del interior a γ (de la región acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$). El principio del argumento dice, en ese caso, lo siguiente:

Principio del argumento. *La cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f, en el interior a la curva de Jordan γ, contado cada uno tantas veces como su multiplicidad, es igual a $(1/2\pi i)\int_\gamma f'(z)/f(z)\,dz$ y es igual a la cantidad de vueltas que da la curva $f \circ \gamma$ alrededor del origen.*

En particular, si f es analítica en Ω, no tiene polos y entonces el resultado anterior es la cantidad de ceros de f en el interior de γ, contado cada uno tantas veces como su multiplicidad.

Teorema 17.4.6. Teorema de Rouché. *Sean f y g dos funciones meromorfas en Ω. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva de Jordan (cerrada simple) homotópica a un punto en Ω y que no pasa por los ceros ni por los polos de f ni de g. Sea R la región acotada encerrada por γ.*

Si

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in \gamma^*$$

entonces la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f en R (contados con su multiplicidad) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de g en R (contados con su multiplicidad).

Nota 17.4.7. Otro enunciado del teorema de Rouché. La desigualdad en la hipótesis del teorema de Rouché puede sustituirse por la siguiente:

Si se cumple

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall\, z \in \gamma^*$$

entonces, vale la tesis del teorema de Rouché.