Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 1 (Conceptos básicos)

1. Un conjunto está descripto por extensión cuando se da la lista de todos sus elementos. Ejemplo:

$$H = \{7, 9, 13\}.$$

Un conjunto está descripto por comprensión cuando se dan las reglas que determinan exactamente todos y cada uno de sus elementos, sin necesidad de darlos explícitamente en una lista. Ejemplo: El conjunto H dado anteriormente por extensión, se puede describir por comprensión de la siguiente forma:

$$H = \{x \in \mathbb{N}\colon \ \ x \text{ es impar}, \ 5 < x \leq 13, x \neq 11\},$$

donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de naturales (en este caso el universo); los dos puntos : indican que a continuación se da(n) la(s) regla(s) que determinan el conjunto H, y las comas separan las condiciones que DEBEN cumplirse (todas simultáneamente) por un elemento genérico del universo para que esté en el conjunto H.

Describir por extensión y por comprensión los siguientes conjuntos de naturales (ver notas más abajo)

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ b)$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ c) $C = A \bigcup B$ d) $D = \{3, 6, 9\}$

e) $E = A \bigcap D$ f) $C \setminus D$

g) B^c en el universo $\mathbb{N}$ h) B^c en el universo de los naturales impares.

Notas: $A \bigcap D$ se lee "A intersección D" y por definición es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a D a la vez.

$A \bigcup B$ se lee "A unión B", y por definición es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A ó a B. La conjunción "ó" en matemática no implica exclusividad, es decir, un elemento pertenece a A ó a B si pertenece a A pero no a B, ó si pertenece a B pero no a A, ó si pertenece a A y a B a la vez.

$C \setminus D$ se lee "C sacando D", y por definición es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a C y que no pertenecen a D.

B^c en el universo U se lee "B complemento en el universo U" y por definición es el conjunto formado por todos los elementos del universo que NO pertenecen a B. Dicho de otra forma B^c en el universo U es el conjunto $U \setminus B$.

2. Sea $U = \{n \in \mathbb{N}\colon n \leq 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Describir por extensión y por comprensión los siguientes conjuntos (ver nota abajo):

a) $A \cup \emptyset$ b) $A \cap \emptyset$ c) $A \cap (B \cup C)$ d) $B^c \bigcap (C \setminus A)$ e) $(A \cup B)^c \cup C$ f) $(A \cup B) \setminus (C \setminus B)$.

Nota: $\emptyset$ denota el conjunto vacío, es decir el conjunto que no tiene ningún elemento. Dicho intuitivamente, un conjunto es como una "bolsa "que adentro tiene a sus elementos. El conjunto vacío, es la bolsa vacía. El conjunto vacío también se denota como $\emptyset = \{\}$.

Ejemplo: Sea el universo U de los naturales: $U = \mathbb{N}$. Sea $A = \{0\}$. Entonces $A \neq \emptyset$ pues el número natural 0 pertenece a A, es decir $0 \in A$. El conjunto A tiene un elemento solo que es el 0.

3. La notación $a \in A$, se lee "a pertenece a A" es una relación entre un elemento y un conjunto, y nunca debe usarse entre dos elementos o entre dos conjuntos. $a \in A$ significa que a ES UN ELEMENTO, que A ES UN CONJUNTO, y que a es uno de los elementos que componen al conjunto A. La notación $a \notin A$, se lee "a no pertenece a A", denota que a ES UN ELEMENTO, que A ES UN CONJUNTO, y que a no es ninguno de los elementos que componen al conjunto A. Por definición $x \notin \emptyset$ para todo x en el universo U.

La notación $A \subset B$ se lee "A contenido en B", SE REFIERE A UNA RELACIÓN ENTRE CONJUNTOS (del mismo universo), y nunca debe usarse entre elementos, o entre un elemento y un conjunto. Indica que A es un subconjunto de B, es decir, o bien A es vacío, o bien todo elemento de A es un elemento de B.

Por convención, la afirmación $A \subset B$ incluye, como caso particular, el caso en que A es el mismo conjunto B (esto se denota $A = B$). Es decir, por convención, todo conjunto está contenido en sí mismo. Dicho de otra forma, si $A = B$ entonces es cierto que $A \subset B$. Cuando $A = B$ todo elemento de A pertenece a B ($A \subset B$), y además todo elemento de B pertenece a A ($B \subset A$).

Si $A \subset B$, entonces, o bien $A = B$, o bien $A \subset\neq B$. En este último caso todo elemento de A pertenece a B, pero no todo elemento de B pertenece a A.

Por convención $\emptyset \subset A$ para todo conjunto A.

Se denota $A \not\subset B$ cuando el conjunto A no está contenido en B. Por ejemplo el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros está contenido en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales (fracciones): $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, pero $\mathbb{Z} \not\subset \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$, pues no todo número entero es negativo (aunque todo número entero es racional).

Encontrar la relación (de pertenencia o de no pertenencia, o de contenido o no contenido) entre las siguiente parejas de objetos

a) $A = \{1, 2, 3, 0\}$ y 0 b) $A = \{1, 2, 3, 0\}$ y $\emptyset$ c) $A = \{1, 2, 3, 0\}$ y 5 d) $A = \{1, 2, 3, 0\}$ y $\{5\}$,

e) $A = \{1, 2, 3, 0\}$ y $\{5, 0\}$ f) $B = \{(1, 1), (2, 3), (1, 5), (0, 0), (5, 0)\}$ y $(5, 0)$

g)$B = \{(1, 1), (2, 3), (1, 5), (0, 0), (5, 0)\}$ y $\{(5, 0)\}$.

4. Exprese las zonas sombreadas en los diagramas de Venn de la Figura 1, mediante operaciones de $\bigcup$, $\bigcap$, complemento y $\setminus$ entre los conjuntos A, B y C (El universo está representado por el conjunto de todos los puntos del rectángulo donde se dibujan los diagramas de Venn de los conjuntos A, B y C).

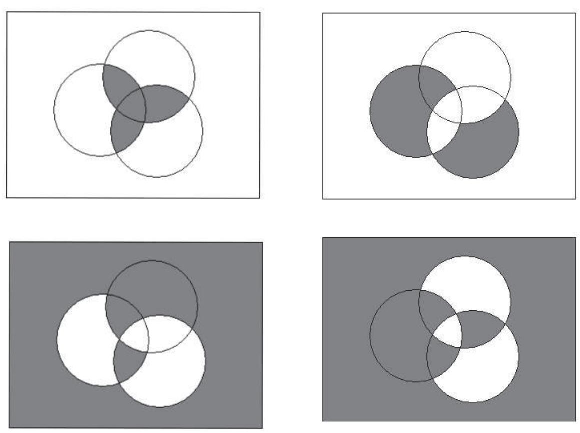

Figura 1: Diagramas de Venn del ejercicio 4

5. Una afirmación matemática es siempre verdadera o falsa (principio del tercero excluido de la lógica clásica). Para justificar que es verdadera (cuando lo es) debe demostrarse: esto es deducirla a partir de las definiciones, hipótesis, axiomas u otras afirmaciones demostradas antes, por medio de un proceso exacto lógico-deductivo (según las reglas de la lógica clásica).

   Cuando no se especifica otra cosa, la veracidad de una afirmación matemática significa que debe ser cierta PARA TODOS los objetos matemáticos involucrados en forma genérica (Ej. $\forall\ x$). Si queremos que sea cierta solo para algunos, entonces debe incluir explícitamente "para algún x", o "para algún A", ó "existe x ($\exists\ x$) tal que ...", etc. Esa parte de la afirmación ($\forall\ x$ ó $\exists\ x$) se llama "cuantificador". Cuando no hay cuantificador explícito en una afirmación matemática, se entiende (por convención, muy importante) que se está afirmando $\forall$, es decir "para todo x", o "para todo A", o "para todos A y B", ...

Ejemplo: Vamos a probar la siguiente afirmación

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

donde A y B son conjuntos. Es decir, vamos a demostrar que es verdadera para TODOS los conjuntos A y B, ya que la afirmación no especifica cuantificador.

Demostración: Por definición de complemento $x \in (A \cup B)^c$ si y solo si x es un elemento del universo considerado que NO pertenece a $A \cup B$. Por definición de unión, x NO pertenece a $A \cup B$ si y solo si NO se cumple que x pertenece a A ó a B. Esto es x no puede pertenecer ni a A ni a B. Esto se cumple cuando $x \in A^c$ y $x \in B^c$ (por definición de complemento). Finalmente por definición de intersección, $x \in A^c$ y $x \in B^c$ si y solo si $x \in A^c \cap B^c$. Hemos probado, a partir de las definiciones, que un elemento x pertenece a $(A \cup B)^c$ si y solo si $x \in A^c \cap B^c$. Entonces $(A \cup B)^c$ es el mismo conjunto que $A^c \cap B^c$, terminando la demostración. $\square$

La demostración debe iniciarse después de un título que diga "Demostración", o "Prueba", y debe terminarse con un símbolo $\square$, o QED (queda demostrado) o $LQQD$ (lo que queríamos demostrar). En la escritura matemática internacional hoy en día ya no se usa más QED ni $LQQD$. Se usa $\square$, al final de la prueba, y sobre el margen derecho.

Una vez que está demostrada una afirmación, puede usarse, sin volver a demostrarla, para probar nuevas afirmaciones o teoremas.

Demostrar los siguientes teoremas, llamados LEYES DE MORGAN, y representar sus enunciados mediante diagramas de VENN:

a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

6. Una afirmación matemática es siempre verdadera o falsa (principio del tercero excluido de la lógica clásica). Para justificar que es falsa (cuando lo es) debe refutarse: esto es encontrar y exhibir (dar explícitamente) un ejemplo para el cual se cumpla la hipótesis (cuando hay alguna hipótesis) pero la tesis no se cumpla. Es decir la afirmación es falsa porque hay algún ejemplo para la cual no se cumple. Un tal ejemplo, que muestra que una afirmación es falsa, se llama CONTRAEJEMPLO.

   Ejemplo: La afirmación "los caballos son negros"como no tiene cuantificador, se refiere a todos los caballos. Es falsa porque existen caballos blancos, por ejemplo. Para justificar que es falsa (refutar), basta encontrar y exhibir un caballo blanco (contraejemplo) o un caballo marrón, o un caballo verde, o un caballo que no sea negro. Este caballo no negro es un contraejemplo de la afirmación (falsa) "los caballos son negros".

   Ejemplo matemático con conjuntos:

   Refutar la siguiente afirmación $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

   Contraejemplo: Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ es impar}\}$, $B = \mathbb{N}$ en el universo de los naturales $\mathbb{N}$. Entonces, en este ejemplo $A \cup B = A \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$. Luego, en este ejemplo $(A \cup B)^c = \mathbb{N}^c$ en el universo $\mathbb{N}$. Pero $\mathbb{N}^c = \emptyset$. Entonces, en este ejemplo $(A \cup B)^c = \emptyset$. Por otro lado $A^c = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ es par}\}$ y $B^c = \mathbb{N}^c = \emptyset$. Entonces, en este ejemplo $A^c \cup B^c = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ es par}\} \cup \emptyset = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ es par}\} \neq \emptyset$. Hemos probado que en este ejemplo $(A \cup B)^c \neq A^c \cup B^c$, porque $(A \cup B)^c = \emptyset$ y $A^c \cup B^c \neq \emptyset$. Concluimos que la afirmación dada es falsa. $\square$

   Investigar si una afirmación es verdadera o falsa, consiste en averiguar si es verdadera y en ese caso probarla (demostrarla) o si es falsa y en ese caso refutarla (dar un contraejemplo). Lo que uno hace es ensayar con posibles ejemplos, a ver si de entrada uno descubre que es falsa. Si no logra encontrar un contraejemplo que refute la afirmación (y pruebe que es falsa), a medida que uno va vislumbrando cuáles son las dificultades en las que se trancó para encontrar tal contraejemplo (y si uno no pudo encontrarlo), uno conjetura (apuesta) a que la afirmación es verdadera. Entonces uno cambia de estrategia, y en vez de tratar de encontrar un contraejemplo, uno trata de demostrar que es verdadera (encontrar una demostración). Al tratar de demostrarla, cuando uno se tranca y no logra una demostración, uno va aprendiendo mejor cómo debería ser un contraejemplo. Entonces cambia la estrategia nuevamente y apuesta (conjetura) a que es falsa. Entonces trata de vuelta de encontrar un contraejemplo. Si no lo encuentra, uno vuelve a conjeturar (apostar) a que es verdadera y trata de demostrarla. Y así sucesivamente.

Finalmente, después (por ejemplo) de una o varias semanas y muchos intentos (solo después de esmerarse en los intentos, mejor si fueron en equipo de colegas, y nunca sin haber estudiado y entendido antes, completamente, el significado EXACTO de todas las definiciones y enunciados involucrados), uno puede necesitar consultar con otra persona más experta para conocer la solución, si no pudo encontrarla por sí mismo a pesar del esfuerzo realizado. Al comparar las soluciones de otros con los intentos fallidos propios, se obtiene una práctica de aprendizaje duradero.

Investigar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si es verdadera demostrarla. Si es falsa, refutarla.

a) $A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; B = A^c$

b) $A \cap C = C$ y $B \cap C = C \;\Rightarrow\; A \cap B = C$

c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

d) $A \setminus B = A \;\;\Leftrightarrow\;\; A \cap B = \emptyset$.

7. (Antes de hacer los ejercicios 7,8,9 y 10, se recomienda primero leer y estudiar detalladamente las notas tituladas “Sobre los Teoremas”de Gonzalo Cousillas, 2013 (2 páginas), disponibles entre los materiales que están en el sitio web del curso.)

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Escriba la negación de cada uno de los siguientes enunciados:

a) $\forall\ a \in A$ se cumple $a^2 \in B$.

b) $\forall\ a \in A$ se cumple $a^2 \notin B$.

c) $\exists\ a \in A$ tal que $a^2 \in B$.

d) $\exists\ a \in A$ tal que $a^2 \notin B$.

8. a) Investigar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera demostrarla y si es falsa refutarla con un contraejemplo

$$x > 1 \;\Rightarrow\; x^2 - x > 0$$

b) Enunciar el recíproco de la afirmación de la parte a)

c) Investigar si el recíproco de la afirmación de la parte a) es verdadero o falso, y si es verdadero demostrarlo y si es falso refutarlo.

d) Enunciar el contrario de la afirmación de la parte a).

e) Investigar si el contrario de la afirmación de la parte a) es verdadero o falso, y si es verdadero demostrarlo y si es falso refutarlo.

f) Enunciar el contrarrecíproco de la afirmación de la parte a).

g) Investigar si el contrarrecíproco de la afirmación de la parte a) es verdadero o falso, y si es verdadero demostrarlo, y si es falso refutarlo.

9. a) Dar una condición suficiente pero no necesaria que cumple un número real a para que $a^2 - a < 0$.

b) Dar una condición necesaria pero no suficiente que cumple un número real a para que $a^2 - a < 0$.

c) Dar una condición necesaria y suficiente que cumple un número real a para que $a^2 - a < 0$.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 1 Complemento
Tema: Conceptos básicos

El complemento de cada práctico tiene ejercicios medianamente difíciles o muy difíciles.
Son para hacer a lo largo de curso, no necesariamente en la semana que corresponde al Práctico 1.

1. (1a. prueba de Cálculo 1 anual 2013)

   Sea X un conjunto no vacío. Sean $A, B \subset X$. Se define $A\Delta B$, y se llama "la diferencia simétrica entre A y B", al siguiente conjunto:

$$A\Delta B = \{x \in X : x \in A \cap B^c \text{ ó } x \in A^c \cap B\}$$

   a) Dibujar los diagramas de Venn de A, B y de $A\Delta B$. Observar que $x \in A\Delta B$ si y solo si x pertenece a A y no a B, ó x pertenece a B y no a A.

   b) Probar que

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

   c) Investigar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones, y justificar la respuesta (probarla si es verdadera ó refutarla con un contraejemplo si es falsa).

   d1) $A\Delta\emptyset = A$ d2) $\emptyset\Delta B = \emptyset$ d3) $A\Delta B = B\Delta A$

   d4) $A\Delta B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset,\ B = \emptyset$ d5) $A\Delta B = \emptyset \Rightarrow A = B$ d6) $A = B \Rightarrow A\Delta B = \emptyset$

   d7) $C \cap (A\Delta B) = (C \cap A)\Delta(C \cap B)$ d8) $C \cup (A\Delta B) = (C \cup A)\Delta(C \cup B)$.

2. Sean $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, los conjuntos de reales definidos así:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 3\}, \qquad A_2 = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 3^2\},$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x \le 3^3\}, \qquad A_4 = \{x \in \mathbb{R} : 3 \le x \le 3^4\},$$

$$\dots, \qquad A_n = \{x \in \mathbb{R} : (n-1) \le x \le 3^n\} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+.$$

   (Nota: $\mathbb{N}^+$ indica el conjunto de todos los naturales positivos; es decir $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

   Se define $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ como el conjunto de los reales x que pertenecen a alguno de los conjuntos A_n. Es decir, por definición

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} :\ \exists\, n \in \mathbb{N}^+ \text{ tal que } x \in A_n\}.$$

   Se define $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ como el conjunto de los reales x que pertenecen a la vez a todos los conjuntos A_n. Es decir, por definición

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} :\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+ \text{ se cumple } x \in A_n\}.$$

   Dibujar los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ en la recta real y demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

   a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe algún $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $x \in A_n$. b) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \mathbb{R}$.

   c) Ningún $x \in \mathbb{R}$ pertenece a la vez a todos los conjuntos A_n. (Es decir: ningún $x \in \mathbb{R}$ cumple que $x \in A_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, ó, dicho de otra forma: $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in A_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$.) d) $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$

   e) $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$ f) $\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_n \cap A_{n+1}) = \mathbb{R}$ g) $\bigcap_{n=1}^{+\infty}(A_n \cup A_{n+1}) = \emptyset$.

3. Sea $\mathcal{C}$ una "colección" o "familia" no vacía (un "hiper-conjunto" no vacío), cuyos elementos son conjuntos de reales. Más precisamente, por definición:

$$A, B \in \mathcal{C} \text{ solo si } A, B \subset \mathbb{R}.$$

Se dice que la colección $\mathcal{C}$ es infinita no numerable si no se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los naturales. Es decir, dicho intuitivamente, cada vez que intento "numerar" con los números naturales los elementos de $\mathcal{C}$ (i.e. ponerle una etiqueta que sea un número natural diferente a cada elemento de $\mathcal{C}$, como si fuera asignar un número de cédula de identidad diferente a cada elemento diferente de la colección), me sobran elementos de la colección que no puedo numerar; siempre agoto el conjunto de los naturales antes de agotar el conjunto de los elementos diferentes que forman la colección $\mathcal{C}$.

La colección se dice que es infinita numerable, cuando puedo construir una correspondencia biunívoca entre todos los elementos de la colección y el conjunto de todos los números naturales.

La colección se dice que es finita, con k elementos, cuando puedo poner todos los elementos diferentes que forman la colección en correspondencia biunívoca con los primeros k naturales positivos (es decir con los números naturales que van desde 1 hasta k inclusive).

a) Demostrar que la colección $\{A_n\}$ del ejercicio 2 es infinita numerable.

b) Inventar alguna colección finita de conjuntos de reales tal que cada conjunto de la colección sea infinito no numerable. (Sugerencia: Si $a < b$ son reales dados cualesquiera, el "intervalo abierto no vacío de reales": $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ es infinito no numerable. Puede usarse esta afirmación. No se pide demostrarla).

c) Inventar alguna colección de conjuntos de reales que sea infinita no numerable (la colección) pero que cada conjunto de la colección sea finito. (No se pide demostrar rigurosamente que la colección que se construya es efectivamente infinita no numerable).

4. Dada una colección cualquiera $\mathcal{C}$ de conjuntos de reales (colección finita, o infinita numerable, o infinita no numerable) se define

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ para algún conjunto } A \in \mathcal{C}\}.$$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \;\; \forall\, A \in \mathcal{C}\}.$$

Mostrar (exhibiendo un contraejemplo para cada una) que las siguientes afirmaciones son falsas:

a) $\mathcal{C}$ finito, $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \emptyset$.

b) $\mathcal{C}$ infinito no numerable, $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \mathbb{R},\; \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \emptyset,\;\; A, B \in \mathcal{C}, \;\; A \neq B \;\;\Rightarrow\;\; A \cap B = \emptyset.$

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 2
(Números naturales, inducción completa, números enteros, racionales, irracionales y reales)

El principio o axioma de INDUCCIÓN COMPLETA, dicho en lenguaje corriente, es el principio del "dominó". Uno tiene las fichas de dominó apoyadas verticalmente sobre una mesa, formando en fila, una detrás de la otra sin tocarse. Quiere saber si se cumple o no la siguiente propiedad $\mathcal{P}$ (que escribimos en forma de pregunta):

$$\mathcal{P}: \quad \text{¿se caen todas las fichas del dominó?.}$$

Es popular el "principio del dominó"siguiente:
Consideremos las siguientes dos condiciones:

1) (Paso base) La primera ficha se cae.
2) (Paso de inducción) Si se cayera la ficha que ocupa el lugar h de la fila (en modo subjetivo "si se cayera", es decir hipotéticamente, y se refiere solo a una ficha, pero cualquiera), entonces se caería también la ficha que está detrás de la h, la que ocupa el lugar $h + 1$ de la fila (en modo condicional "se caería", es decir condicionada a que la ficha h anterior se haya caído).

El principio del dominó dice que toda vez que se cumplan las dos condiciones anteriores se caen todas las fichas del dominó cualquiera sea la cantidad $n \geq 1$ de fichas en la fila. Es decir, el principio establece que si el paso base y el paso de inducción son verdaderos, entonces se concluye que la propiedad $\mathcal{P}$ es verdadera PARA TODO n natural.

El principio o axioma de INDUCCIÓN COMPLETA es, en lenguaje matemático, el mismo principio del dominó:

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA: Toda vez que se cumplan las siguientes dos condiciones, llamadas: 1) PASO BASE y 2) PASO DE INDUCCIÓN, se cumplirá la afirmación $\mathcal{P}$ para todo n natural positivo:

1) (PASO BASE) La afirmación $\mathcal{P}$ se cumple para $n = 1$.
2) (PASO DE INDUCCIÓN) Si la afirmación $\mathcal{P}$ se cumpliera (en modo subjuntivo, es decir hipotéticamente) para un cierto natural positivo h, cualquiera pero fijo, entonces se cumpliría también para el siguiente natural $h + 1$ (en modo condicional, es decir condicionado a que se haya cumplido para h).

CONCLUSIÓN: Si quiero demostrar una afirmación cualquiera $\mathcal{P}$, que involucra un natural positivo n cualquiera: el objetivo final es DEMOSTRAR $\mathcal{P}$ PARA TODO n; basta demostrar el Paso Base y el Paso de Inducción (objetivos intermedios).

Observar que el Paso de Inducción es una condición lógicamente DIFERENTE de la afirmación que obtenemos al final: "La propiedad $\mathcal{P}$ se cumple para todo natural".

EJEMPLO: Demostrar por inducción completa la siguiente igualdad para todo $n \geq 1$ natural.

$$\mathcal{P}: \qquad e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{x_3} \cdot \ldots \cdot e^{x_n} = e^{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n},$$

donde x_i es un número real cualquiera para cada valor del índice i (que va de 1 a n).

Demostración: Por inducción completa:

1) PASO BASE: ¿Es verdadera $\mathcal{P}$ cuando $n = 1$? Es decir ¿es verdadero que $e^{x_1} = e^{x_1}$? La respuesta es sí, pues ambos términos e^{x_1} de la igualdad son el mismo, son iguales. Hemos terminado de probar el paso base.

2) PASO DE INDUCCIÓN Si se cumpliera $\mathcal{P}$ para $n = h$ ¿se cumpliría $\mathcal{P}$ para $n = h+1$. Es decir tomando con el OBJETIVO INTERMEDIO de probar el paso de inducción, tomamos como hipótesis la siguiente:

Hipótesis de inducción: $e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{x_3} \ldots \cdot e^{x_h} = e^{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_h}$.

Nos proponemos, como objetivo intermedio, demostrar la siguiente tesis de inducción:

Tesis de inducción: $e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{x_3} \ldots \cdot e^{x_h} \cdot e^{x_{h+1}} = e^{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_h + x_{h+1}}$.

Es decir, como objetivo intermedio, demostraremos un "subteorema", dentro de la demostración del teorema principal (que es el objetivo final).

Demostración del paso de inducción Del liceo conocemos (y si no la conocemos la admitimos como demostrada) la siguiente propiedad de la función exponencial $f(x) = e^x$:

$$e^{\,a+b} = e^a \cdot e^b \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Queremos demostrar la tesis de inducción (objetivo). Entonces, para saber para donde apuntar, considero (miro) la siguiente expresión que está en la "mira"(en el objetivo).

$$e^{x_1 + x_2 + \ldots x_h + x_{h+1}}.$$

Le aplico propiedades ya demostradas o axiomas, etc: la propiedad la propiedad asociativa de la suma de reales, luego la propiedad (1) que sabemos del liceo, luego la hipótesis de inducción, y al final la propiedad asociativa del producto de reales, así:

$$e^{x_1 + x_2 + \ldots x_h + x_{h+1}} = e^{(x_1 + x_2 + \ldots x_h) + x_{h+1}} =$$
$$= \left(e^{x_1 + x_2 + \ldots x_h}\right) \cdot e^{x_{h+1}} = \left(e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot \ldots \cdot e^{x_h}\right) \cdot e^{x_{h+1}} =$$
$$= e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot \ldots \cdot e^{x_h} \cdot e^{x_{h+1}}.$$

Entonces hemos demostrado que:

$$e^{x_1 + x_2 + \ldots x_h + x_{h+1}} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot \ldots \cdot e^{x_h} \cdot e^{x_{h+1}}.$$

Por lo tanto hemos demostrado la tesis de inducción. Hemos terminado el Paso de Inducción.

Por el principio de inducción completa, una vez que ya demostramos que son verdaderos el paso base y el paso de inducción, concluimos que la afirmación $\mathcal{P}$ es verdadera para todo natural $n \geq 1$. Es decir hemos terminado de demostrar que

$$e^{x_1 + x_2 + \ldots x_n} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot \ldots \cdot e^{x_n}.$$

$\square$

1. Demostrar por inducción completa las siguientes afirmaciones

   a) $2^{n-1} \leq n!\ \ \forall\ \ n$ natural no nulo.

   Nota: Recordar que, si n es un natural mayor o igual que 1, la potencia 2^n es el producto $2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2$ exactamente n veces. Si $n = 0$ se define, por convención, la potencia $2^0 = 1$.

   Recordar que $n!$ se lee "n factorial", y es una notación o abreviatura que representa lo siguiente:

   Si el natural n es $n \geq 1$, entonces $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Por ejemplo $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Si el natural n es $n = 0$, entonces $n! = 1$; es decir $0! = 1$.

   b) $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$, donde x es un número real fijo positivo.

2. Fijemos un número natural $n > 1$. Consideremos la siguiente suma (la cual, como toda suma, tiene una cantidad finita de sumandos):

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Observamos que los tres puntitos que indican que la suma sigue, NO ESTÁN AL FINAL DE LA SUMA. Hay un último sumando: la cantidad de sumandos es finita. Es una suma común y corriente como conocemos desde la escuela, con muchos sumandos: la cantidad de sumandos es un número natural. En el ejemplo de arriba la cantidad de sumandos es exactamente n (¿por qué?). Pero en otros ejemplos, la cantidad de sumandos podría ser $n+3$, n^2, $n^4 - 1$, 2^n, etc.

Solamente por convención y comodidad, simplemente como una **abreviatura**, se usa el símbolo de sumatoria $\sum$ del siguiente modo:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Uno le da a k todos los valores naturales comprendidos entre 1 y n inclusive, y DESPUÉS (no antes) hace la SUMA de todos los resultados obtenidos, uno para cada valor de k. El símbolo k se llama "índice".

Nunca hay que confundir el índice k con el sumando $\dfrac{1}{k(k+1)}$ que le corresponde. Son cosas DIFERENTES. El índice k es solo una etiqueta que uno le pone al sumando $\dfrac{1}{k(k+1)}$, pero k NO ES el sumando.

La notación $\sum_{k=1}^{n}$ es solo una convención. El símbolo $\sum$ es solo una abreviatura que sustituye (para acortar la escritura) a la SUMA verdadera.

El índice k no tiene ningún valor en sí mismo. Es un COMODÍN. Se llama "ÍNDICE MUDO o VARIABLE MUDA", porque es un comodín usado en la notación, solamente para acortar la escritura.

Cuando se hacen demostraciones usando el símbolo de sumatoria $\sum$, debe evitarse, en lo posible, razonar en base a reglas "adivinadas" a partir de los símbolos. Se debe evitar operar a ciegas. En cambio, hay que tener bien claro qué es lo que representa en realidad cada símbolo (por ejemplo el símbolo $\sum_{k=1}^{n}$, el índice mudo k, el número real fijo n). Se debe distinguir bien qué rol cumple cada uno.

IMPORTANTE: Al principio, en las demostraciones y razonamientos con sumatorias, cada vez que uno se tranca o no sabe cómo seguir, conviene reemplazar el símbolo $\sum$ por la suma desarrollada verdadera, para darse cuenta de qué propiedades tiene, y aplicar las propiedades de la suma común y corriente conocida desde la escuela.

Demostrar por inducción completa las siguientes afirmaciones:

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \;\forall\, n \in \mathbb{N}^+$ b) $\sum_{n=1}^{M} n^2 = \dfrac{M^3}{3} + \dfrac{M^2}{2} + \dfrac{M}{6}$.

3. Sea $n \geq 1$ un número natural fijo. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números naturales positivos (una cantidad n ordenada de números naturales positivos, no necesariamente todos diferentes).

a) Demostrar por inducción completa, sin usar el símbolo de sumatoria, la siguiente igualdad:

$$1 + x_1 + \ldots + x_n \leq (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \;\; \forall\, n \geq 1, \;\; n \text{ natural}.$$

b) Escribir la igualdad de la parte a), y traducir su demostración, escribiendo todas las fórmulas en forma abreviada, usando el símbolo $\sum$ de sumatoria, y usando también el símbolo $\prod$ (es la letra griega Pi Mayúscula) de "productoria". La productoria $\prod$ es una notación (abreviatura) que se usa del siguiente modo:

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) = \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k).$$

4. En el trabajo científico y tecnológico profesional de innovación y creación de conocimiento (en la ingeniería por ejemplo), en general, NO CONOCEMOS la igualdad que tenemos que demostrar o refutar. No solo no conocemos la solución al problema, sino que tampoco conocemos el planteo correcto y exacto del problema en sí mismo. Antes de encontrar una solución, hay que DESCUBRIR EL PLANTEO CORRECTO Y EXACTO DEL PROBLEMA.

   Por ejemplo, supongamos que la igualdad de la parte a) del Ejercicio 2) no la conocemos. Queremos primero, encontrar una igualdad $\sum_{k=1}^{n} k = A(n)$ donde $A(n)$ no sea una sumatoria, pero no conocemos la expresión $A(n)$. Primero hay que descubrirla.

   INDUCCIÓN EXPERIMENTAL Un procedimiento para descubrir $A(n)$ se llama "Inducción experimental", y es usado mayormente en otras Ciencias y Tecnología (entre ellas en Ingeniería, y mucho en Estadística), más que en Matemática. Algunos epistemólogos consideran que la inducción experimental NO es Matemática. Nosotros también consideraremos que la inducción experimental SOLA no es Matemática Para que sea Matemática, tiene que seguir y terminar con una demostración o una refutación según las reglas de las lógicas clásica.

   La inducción experimental consiste en dos pasos: Primer paso: "probar"(experimentar) con muchos ejemplos, buscando (investigando) en cada uno de esos ejemplos qué propiedades en común tienen todos ellos. Segundo paso: conjeturar (sin demostrar, es decir "adivinar"en base a las evidencias dadas por los experimentos anteriores) una afirmación, inducida, descubierta, sospechada, a partir de las propiedades en común que tienen todos esos ejemplos. Finalmente, la Matemática clásica (la llamada "Matemática Pura") se encargará de demostrar la conjetura y transformarla en teorema (por ejemplo por inducción completa, si la afirmación involucra al conjunto de los naturales), o de refutarla (encontrando un contraejemplo).

   Ejemplo: Encontrar por inducción experimental una expresión $A(n)$ que no sea una sumatoria, tal que permita conjeturar la siguiente igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = A(n) \ \ \forall\, n \geq 0,\ n \text{ natural}\ .$$

   Primer paso: Experimento Calculamos $\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1}$ eligiendo, por ejemplo, los siguientes valores particulares de n:

$$n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4 \text{ y } n = 5.$$

$$n = 1. \text{ En este caso } \sum_{k=1}^{1} 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$n = 2. \text{ En este caso } \sum_{k=1}^{2} 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 = 2 + 2 \cdot 3 = 2(1 + 3) = 8$$

$$n = 3. \text{ En este caso } \sum_{k=1}^{3} 2 \cdot 3^{k-1} = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = 8 + 18 = 26$$

$$n=4.\text{ En este caso }\sum_{k=1}^{4} 2\cdot 3^{k-1}=26+2\cdot 3^3=26+54=80$$

$$n=5.\text{ En este caso }\sum_{k=1}^{5} 2\cdot 3^{k-1}=80+2\cdot 3^4=80+162=242.$$

Segundo paso: Conjeturación Es el paso más difícil. Se necesita mucha inventiva y creatividad. En general no hay una respuesta única. No demuestra nada ni refuta nada. Solo conjetura, descubre algo que "aparentaría ser verdadero", sin demostrarlo, apuesta a que es verdadero por inducción fundamentada en la evidencia dada por los ejemplos. Pero no demuestra que es verdadera, ni que es falsa. Lo que se busca NO es una respuesta matemática fundamentada en la lógica clásica. Es decir no es un teorema, no tiene la demostración, no afirma que la respuesta sea verdadera ni que sea falsa.

Veamos cómo obtener una conjetura por inducción experimental en el ejemplo planteado antes. Consideramos todos los números obtenidos del primer paso de experimentación.

¿Qué propiedades en común tienen? (Ojo: La respuesta no es única.)

Los números obtenidos en la experimentación realizada son los siguientes:

$A(1)=2,\quad A(2)=8,\quad A(3)=26,\quad A(4)=80,\quad A(5)=242.$

Una posible respuesta se puede obtener a partir de las siguientes observaciones:

$$A(1)=2=3-1,\quad A(2)=8=9-1=3\times 3-1,\quad A(3)=26=27-1=9\times 3-1,$$

$$A(4)=80=81-1=27\times 3-1,\quad A(5)=242=243-1=81\times 3-1.$$

Entonces, en todos estos ejemplos se cumple lo siguiente:

$$A(1)=3^1-1,\quad A(2)=3^2-1,\quad A(3)=3^3-1,\quad A(4)=3^4-1,\quad A(5)=3^5-1.$$

Por inducción experimental, planteamos la siguiente conjetura (no la hemos demostrado ni refutado, solo estamos conjeturando):

Conjetura $A(n)=3^n-1\ \forall\ n\geq 1$, es decir

$$\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^{k-1}=3^n-1\quad \forall\ n\geq 1,\ n \text{ natural.}\quad \text{(Esta es la conjetura a demostrar o refutar).}$$

Finalmente, pero no ya como parte del proceso de inducción experimental, sino como la parte matemática pura, debemos investigar si la conjetura planteada es verdadera o falsa. Si es verdadera, la demostraremos (por ejemplo por inducción completa), y si es falsa exhibiremos un contraejemplo.

a) Investigar si la conjetura planteada más arriba es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla. Si es falsa, encontrar un contraejemplo.

b) Encontrar por inducción experimental una expresión $A(n)$ que no sea una sumatoria, para la cual se pueda conjeturar la siguiente igualdad, en base a la evidencia experimental:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=A(n).$$

c) Para la expresión $A(n)$ hallada en la parte b), demostrar por inducción completa la igualdad conjeturada.

5. Se define el siguiente conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, llamado producto cartesiano del conjunto de los naturales consigo mismo, definido así:

   $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas (n, m) de números naturales.

   Por ejemplo $(1,7)$; $(6,0)$; $(7,1)$; $(8,8)$; $(0,0)$ son elementos del conjunto producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   Por convención, en una pareja ordenada *el orden en que están dados las dos componentes* importa. Entonces tenemos, por ejemplo, que $(7,1) \neq (1,7)$. Es decir $(7,1)$ y $(1,7)$ son dos elementos **diferentes** del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   a) Ordenar todos los elementos del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en un orden total. Esto significa ordenarlos todos de manera que formen una fila

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

   de longitud infinita, en que aparezcan todos los elementos a del producto cartesiano, una sola vez cada uno.

   Sugerencia: $a_0 = (0,0)$, $a_1 = (0,1)$, $a_2 = (1,0)$, $a_3 = (0,2)$, $a_4 = (1,1)$, $a_5 = (2,0)$, $a_6 = (0,3)$, $a_7 = (1,2)$, $a_8 = (2,1)$, $a_9 = (3,0)$, etc. En vez de dar el orden mediante una "fórmula"de la pareja a_n expresada explícitamente en función de n, puede ser más conveniente describir con palabras en forma matemáticamente rigurosa, (esto es: redactando en idioma español en forma bien precisa y sin ambigüedades), CUÁLES SON LAS REGLAS O LEYES, que determinan el orden de las parejas a_n del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

6. Denotamos con $\mathbb{Z}$ al conjunto de todos los números enteros. Recordemos que x es un número entero si y solo si, o bien $x = n$ natural positivo, o bien x es el opuesto a un natural positivo: $x = -n,\ n \in \mathbb{N}^+$, o bien $x = 0$.

   Para cada pareja (n, m) del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se define el entero $x = n - m$. Denotamos $F(n, m) = n - m$ para todo $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Es decir, tenemos

$$x = F(n,m) = n - m \in \mathbb{Z} \ \ \forall\ (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

   a) Investigar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera demostrarla, y si es falsa refutarla con un contraejemplo. ¿$F(n, m) = F(n', m')$ si y solo si $(n, m) = (n', m')$?.

   b) Se define la suma de parejas ordenadas así:

$$(n,m) + (n',m') = (n + n', m + m').$$

   Demostrar que

$$F(n,m) + F(n',m') = F\Big((n,m) + (n',m')\Big).$$

   Observación: el símbolo $+$ a la izquierda en la igualdad anterior es el de la SUMA de NÚMEROS ENTEROS, mientras que el símbolo $+$ a la derecha es el de la SUMA de PAREJAS ORDENADAS de NÚMEROS NATURALES.

   c) Investigar si es verdadera o falsa la siguiente igualdad. Si es verdadera demostrarla y si es falsa refutarla exhibiendo un contraejemplo.

$$F(n,m) \cdot F(n',m') = F\Big(n \cdot n',\ \ m \cdot m'\Big).$$

Observación: el símbolo $\cdot$ a la izquierda en la igualdad anterior, es el de la PRODUCTO DE NÚMEROS ENTEROS, mientras que los dos símbolos $\cdot$ a la derecha, son los del producto de NÚMEROS NATURALES.

d) **Esta parte es un problema de diseño.** Los problemas matemáticos de diseño son del tipo de los que aparecen frecuentemente en Ingeniería.

Inventar una operación binaria entre parejas ordenadas de números naturales, es decir, definir una operación $(n, m) * (n', m') = (n", m")$ entre dos elementos del conjunto producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de manera que se cumpla la siguiente igualdad:

$$F(n, m) \cdot F(n', m') = F\Big((n, m) * (n', m')\Big).$$

Nota: Después de inventada la operación binaria, hay que demostrar que se cumple la igualdad de arriba para la operación binaria que se haya inventado.

7. Denotamos $\mathbb{Q}$ al conjunto de todos los números racionales. Recordemos que el número x es racional, si y solo si x se puede escribir como una fracción $x = p/q$ donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}^+$.

   Sean $x, y \in \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ es un cuerpo, la suma $x + y$, el producto $x \cdot y$, la resta $x - y$, el cociente x/y (si $y \neq 0$), la potenciación x^n (con $n \in \mathbb{N}$ fijo), son números racionales.

   Supongamos que tenemos escritos los racionales x e y como fracciones, es decir:

$$x = p/q, \;\; y = r/s, \qquad \text{donde} \quad p, s \in \mathbb{Z}, \quad q, r \in \mathbb{N}^+.$$

   a) Escribir una fracción que sea igual al racional $x + y$.

   b) Escribir una fracción que sea igual al racional $x \cdot y$.

   c) Idem para el racional $x - y$

   d) Idem para el racional x/y, cuando $y \neq 0$.

   e) Idem para el racional x^n.

   f) Idem para el racional $x^n + y^n$.

8. Se llama *conjunto de números irracionales* al conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ formado por todos los números reales que no son racionales. Es decir $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cuando x es un número real que NO se puede escribir como una fracción p/q con p entero (positivo, negativo o nulo) y q natural positivo.

   ¿Existen números irracionales?

   La respuesta es afirmativa. Para demostrarlo, basta exhibir algún número real que sea irracional.

   a) Estudiar toda la demostración que está más abajo y completarla con todos los detalles que faltan.

   Definición: Denotamos como $x = \sqrt{2}$ al único número real POSITIVO x que cumple $x^2 = 2$.

   Para que esta definición sea admisible, y antes de usarla, hay que probar primero la siguiente afirmación:

   Afirmación a probar: Existe y es único un número real positivo x tal que $x^2 = 2$.

   Demostración:

   Primero: ¿Existe algún real tal que $x^2 = 2$?

   Sí. ¿Cómo lo demostramos? Escribiendo la demostración que resulta de comprender totalmente y copiar aquí todas las definiciones, axiomas y proposiciones que se encuentran en el libro .^Análisis Matemático I, de F. Paganini (ver bibliografía de Teórico en la página web del curso), desde la

Definición 16 (página 11) hasta la Definición 22 incluida (página 13), y desde el enunciado de la Proposición 26 (página 14) hasta el final de la demostración de esta proposición (página 14).

Segundo: ¿Existe algún real tal que $x^2 = 2$ y $x > 0$?

Sí. Demostración: Por lo demostrado en el primer paso el siguiente conjunto es no vacío:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 = 2\} \neq \emptyset.$$

Elegimos un elemento cualquiera $x \in A$. Por el axioma de orden de los reales, se cumple o bien $x > 0$, o bien $x < 0$, o bien $x = 0$.

Si $x = 0$ entonces $x \notin A$, porque el 0 no satisface la condición $x^2 = 2$. Entonces el número $x \in A$ que elegimos, cualquiera haya sido la elección, es necesariamente diferente de 0.

Si $x > 0$, entonces ya encontramos un número real positivo que satisface la igualdad $x^2 = 2$, porque $x \in A$. En este caso ya terminamos el segundo paso.

Si $x < 0$, entonces denotamos $y = -x$. Tenemos:

$$x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ -x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ y \in \mathbb{R},$$

$$x < 0 \ \Rightarrow \ -x > 0 \ \Rightarrow \ y > 0.$$

$$x^2 = 2 \ \Rightarrow \ \ (-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x \cdot x = x^2 = 2 \ \ \Rightarrow \ y^2 = 2.$$

Entonces, hemos encontrado un número real $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $y > 0$ e $y^2 = 2$. Terminamos el segundo paso.

Tercero: Unicidad: ¿Es único el número real x tal que $x^2 = 2$ y $x > 0$? Supongamos que tomo dos reales x_1 y x_2 tales que ambos cumplen

$$x_1^2 = 2, x_1 > 0, \qquad x_2^2 = 2, x_2 > 0.$$

Probaremos que $x_1 = x_2$. Entonces

$$x_1^2 = 2,\ x_2^2 = 2 \ \Rightarrow \ x_1^2 - x_2^2 = 2 - 2 = 0 \ \ \Rightarrow (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) = x_1^2 - x_2^2 = 0 \ \Rightarrow \ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \ \Rightarrow$$

$$x_1 - x_2 = 0 \text{ ó } x_1 + x_2 = 0. \tag{2}$$

Por otro lado

$$x_1 > 0,\ x_2 > 0 \ \Rightarrow \ \ x_1 + x_2 > 0.$$

Entonces, de la afirmación (2) solo puede es verdadera la afirmación $x_1 - x_2 = 0$. Finalmente

$$x_1 - x_2 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = x_2,$$

terminando de demostrar la unicidad. □

Concluimos que existe y es única la raíz positiva del polinomio $x^2 - 2$, que se denota $\sqrt{2}$ (se omite el signo + delante de una raíz cuadrada, por convención, cuando nos referimos a la raíz positiva). Hemos terminado de probar la afirmación. □

b) Estudiar la demostración que está más abajo y completarla con los detalles que faltan.

Afirmación a probar: $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Demostración: Por absurdo, supongamos que $x = \sqrt{2}$ es racional.

Como cualquier número racional, x es igual a una fracción irreducible. Es decir $x = p/q$ para algún $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}^+$, tales que p y q no tienen factores en común (la fracción p/q no se puede reducir, simplificando un factor del numerador con el mismo factor del denominador)

Como $x > 0$, y $x = p/q$ con $q \in \mathbb{N}^+$, entonces $p > 0$. Luego

$$p, q \in \mathbb{N}^+.$$

Como $x^2 = 2$ y $x = \frac{p}{q}$, tenemos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \; p^2 \text{ es par} \quad \Rightarrow \; p \text{ es par,}$$

Como p y q son naturales positivos que no tienen ningún factor en común, la fracción p/q no se puede simplificar entre 2, numerador y denominador. Pero como p es par, entonces deducimos que

$$q \text{ es impar.} \tag{3}$$

Tenemos

$$p \in \mathbb{N}^+, \quad p \text{ es par} \quad \Rightarrow \; \exists \; s \in \mathbb{N}^+ \text{ tal que } p = 2s$$

$$\Rightarrow \; p^2 = 4s^2 \; \Rightarrow \quad 4s^2 = p^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 2s^2 = q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 \text{ es par} \quad \Rightarrow \quad q \text{ es par },$$

contradiciendo la afirmación (3). Absurdo. □

c) Admitiendo que existe y es único un número real a, que denotamos como $\sqrt{6}$, tal que $a > 0$ y $a^2 = 6$, demostrar que $\sqrt{6}$ es un número irracional.

d) Admitiendo que existe y es único un número real b, que denotamos como $\sqrt[3]{7}$, tal que $b^3 = 7$, demostrar que $\sqrt[3]{7}$ es un número irracional.

9. Encontrar todos los errores de la pseudo-demostración de la siguiente afirmación

   Sea $a > 0$ real fijo. La ecuación $x^2 - a = 0$ tiene una única raíz real. (Cuidado: esta afirmación es falsa)

   Nota importante: La siguiente pseudo-demostración NO puede ser una demostración correcta. Tiene que estar equivocada por algún lado, porque la afirmación que pretende demostrar no es verdadera, sino FALSA. En efecto, debido a la regla de Bascara, la ecuación $x^2 - a = 0$, cuando a es positivo, tiene discriminante positivo. Luego tiene dos raíces reales diferentes.

   Pseudo-demostración (equivocada) Sea $a \in \mathbb{R}^+$ cualquiera, fijo. Supongamos que tenemos dos raíces reales x_1, x_2 de la ecuación $x^2 - a$. Probemos que $x_1 = x_2$ (unicidad de raíz real).

   Como $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ son números reales que verifican la ecuación $x^2 - a = 0$, tenemos

$$x_1^2 - a = 0, \;\; x_2^2 - a = 0, \;\; \Rightarrow \;\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \cdot (x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \cdot (x_1 + x_2) \;\; \Rightarrow \;\; (ax_1 - ax_2)(x_1 + x_2) = 0 \cdot a \cdot (x_1 + x_2) \Rightarrow$$

$$ax_1 - ax_2 = 0 \cdot a \;\Rightarrow\; ax_1 - ax_2 = 0 \;\Rightarrow\; ax_1 = ax_2 \;\; \Rightarrow x_1 = x_2.$$

□

10. a) Demostrar que la suma de un número irracional con un número racional, es irracional.

    b) Demostrar que el producto de un número irracional con un número racional, es irracional.

    c) Encontrar un ejemplo en que la suma de dos números irracionales, sea racional.

    d) Encontrar un ejemplo en que la suma de dos números irracionales, sea irracional.

    e) y f) Idem partes c) y d) pero para el producto en vez de la suma (Nota: los números irracionales que se multiplican pueden ser iguales).

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 3
Transformaciones o Funciones en conjuntos cualesquiera.
Competencias transversales.

Todas las tareas previstas en este práctico son obligatorias (todas van para el primer parcial) excepto el último ejercicio sobre Competencias Transversales, que es obligatorio pero para después del primer parcial.

¿Qué plazo tengo para realizar este práctico?: Este repartido corresponde a las clases prácticas de 1 sola semana. Sin embargo, la realización del último ejercicio (sobre Competencias Transversales) tendrá plazo para ser terminado antes del 20 de junio.

CONCEPTO ABSTRACTO Y GENERAL DE FUNCIÓN

A lo largo de TODOS los cursos de Matemática de la Facultad de Ingeniería se necesitará conocer con exactitud el CONCEPTO GENERAL Y ABSTRACTO de FUNCIÓN dado en la Definición 1 (ver Figura 1).

Caso muy particular: El concepto de función real de una variable real (que conocen del liceo), está dado por ejemplo por la función que tiene fórmula $f(x) = (x-7)^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Las funciones reales de variable real se representan con una gráfica en el plano, previamente provisto de un sistema de coordenadas cartesianas $x0y$. Esta gráfica, por ej. puede ser una curva, y entre todas las posibles curvas, puede ser una parábola. Pero también una gráfica de función real de variable real en el plano $x0y$, puede NO ser una curva. Veremos ejemplos de estos más adelante en el curso.

Aunque consideráramos todas las posibles funciones reales de variable real (las que tienen gráficas que son curvas y las que tienen gráficas que no son curvas), ese conjunto de funciones sería solo un subconjunto muy pequeño y muy particular del concepto general de función en Matemática. Ese caso particular (función real de variable real) es sumamente limitado, y NO comprende todo el significado del concepto general matemático de función.

Como las funciones reales de variable real conforman solo una parte muy limitada del concepto, sus aplicaciones a la Ingeniería son potencialmente menores que las del concepto general y abstracto de función, que trataremos en este práctico.

Definición 1: Función, aplicación, transformación, correspondencia (son todos sinónimos)
Es una **TERNA** formada por los siguientes TRES objetos (los tres objetos juntos, no uno solo por separado, y cada uno de los tres objetos con un rol especial y diferente del de los otros dos, como explicamos a continuación- Ver Figura 1):

1) El dominio D: Es un conjunto cualquiera no vacío; sus elementos no necesariamente son números (pueden serlo o no).

Ejemplo: Si X denota el conjunto de todos los puntos del espacio, el dominio de una función F puede ser, por ejemplo,

$$D = \{x \in X : \text{ La distancia de } x \text{ al planeta Tierra es menor que 20 años luz}\}. \tag{1}$$

¿Qué cosa son los elementos del dominio D en este ejemplo? Son puntos del espacio físico. Cada elemento de D es un punto del espacio físico. Hay una infinidad de puntos en el espacio que están en el dominio D. Sin embargo, no todos los puntos del espacio están en el dominio D, porque existe otra infinidad de puntos que distan de la Tierra más o igual que 20 años luz.

2) El codominio C: Es un conjunto cualquiera no vacío; sus elementos no necesariamente son números (pueden serlo o no). Ejemplo:

$$C = \{\text{Yes}, \ \ \text{No}, \ \ \text{Hoffman}\} \tag{2}$$

En este ejemplo el codominio C tiene solo tres elementos, cada uno de ellos es una palabra en inglés: una de estas palabras es Yes (en español Sí), y la otra es No, y la otra es Hoffman (apellido del actor Dustin Hoffman).

3) Una regla (llamada LEY de CORRESPONDENCIA): Por definición (o convención) DEBE cumplir exactamente, todas las condiciones que se imponen en la siguiente afirmación:

A cada uno (y todos, sin omitir ninguno) de los elementos x del Dominio D, le corresponde uno y uno solo de los elementos y del Codominio C.

Dicho de otra forma: un solo y para cada x, y no se omite ningún x del dominio. Pueden omitirse o no, elementos del codominio. Puede suceder o no, que a varios elementos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ del dominio les corresponda el mismo y del codominio. Ver "Diagrama Sagital" en la Figura 1: cada flecha indica, para cada uno de los elementos del dominio, el que le corresponde, que es uno y uno solo de los elementos del codominio.

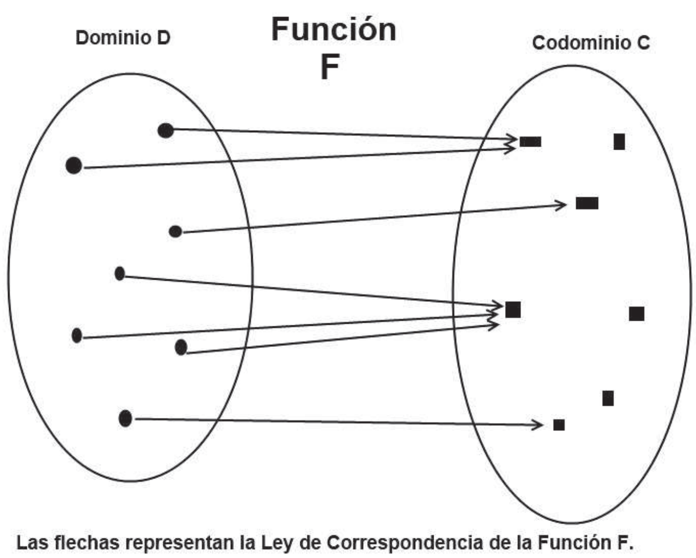

Figura 1: En un Diagrama Sagital se usan óvalos para representar conjuntos, D y C por ejemplo, y se agregan flechas que indican la Ley de Correspondencia de la función F.

Notación importante: La terna conformada por D, C y la ley de correspondencia, ES LA FUNCIÓN ó TRANSFORMACIÓN. Se denota así:

$$F : D \mapsto C$$

Se dice que F *es una función de* D *en* C *(ó de* D *hacia* C*)* .

También pueden usarse otras letras cualesquiera en vez de F para denotar a la función, o en vez de D para denotar al dominio, o en vez de C para denotar al codominio. Lo más común es, por ejemplo, que en vez de F (de función) se usen f ó G ó g ó H ó h ó T (de transformación) ó Φ (Fi mayúscula) ó φ (fi minúscula) ó Ψ (Psi mayúscula) ó ψ (psi minúscula).

Prerrequisito: Antes de realizar los ejercicios de este práctico, leer las páginas 29 al 35 del texto "Conceptos básicos de Matemática"de G. Cousillas, que se puede bajar de la página web del curso. Se advierte que las letras que se usan en ese texto para denotar a las funciones, sus dominios y sus codominios, son distintas a las letras que usamos aquí. Pero los conceptos son los mismos que aquí.

1. Entrar en el sitio web http://ramonnavas.com/wordpress/?page_id=44 y observar con atención la figura que aparece. Es el diagrama Sagital, de una cierta función $F : D \mapsto C$.

   a) Escribir por extensión el conjunto dominio D de esa función.

   b) Escribir por extensión su conjunto codominio C.

   c) Escribir la Ley de Correspondencia de la función $F : D \mapsto C$ representada en ese diagrama Sagital.

   Ejemplo: Sea $x \in D$. Si x es fem. roja o gris, entonces $F(x) =$"Partido B"; si x es masc. verde, entonces $F(x) =$ "..."; etc.

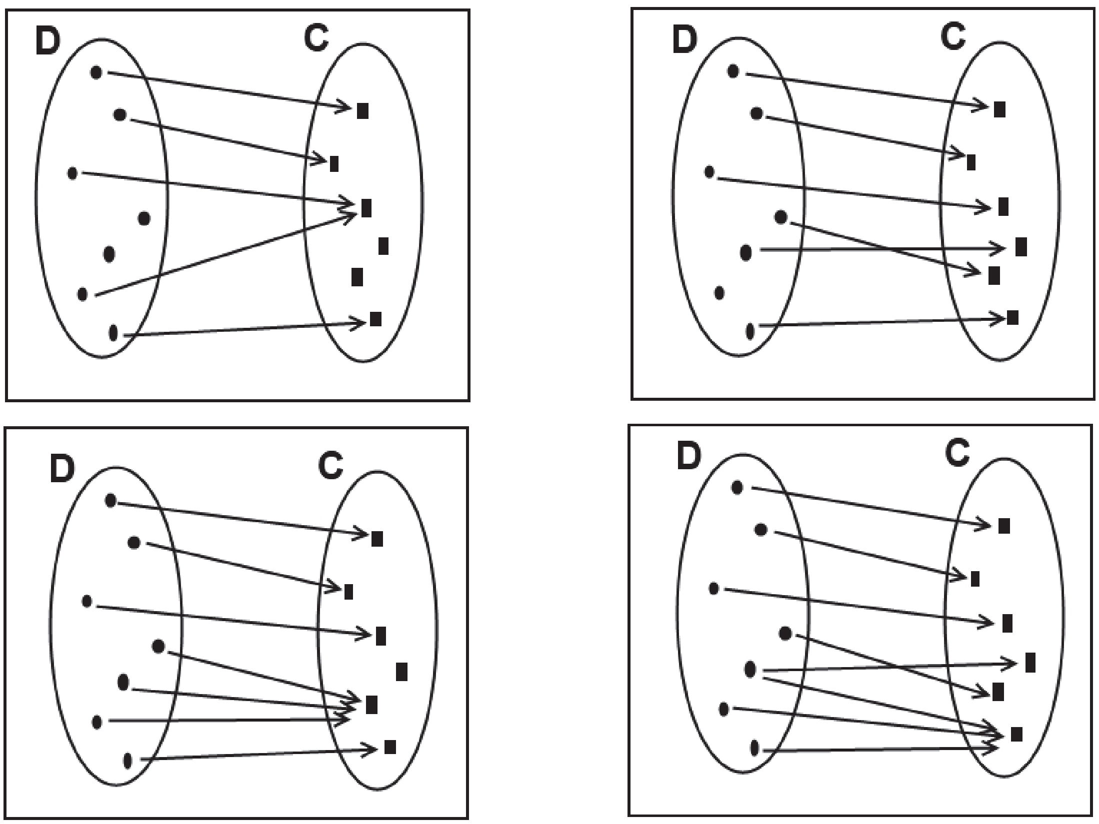

Figura 2: Diagramas Sagitales del ejercicio 1. ¡Cuidado!: algunos representan funciones y otros NO.

2. En los cuadros de la Figura 2 se representan "Diagramas Sagitales", donde las flechas indican las correspondencias desde los puntos del conjunto D hacia puntos del conjunto C. Determinar en cada cuadro, cuáles de los diagramas representan funciones y cuáles no. Explicar las respuestas. (El "por qué" de cada respuesta).

Ejemplo de Hoffman Sean los conjuntos D y C dados por las igualdades (1) y (2) (Estos números (1) y (2) entre paréntesis indican las igualdades así numeradas - a la derecha de la respectiva igualdad - en la exposición teórica de las páginas anteriores; no tienen nada que ver con los números de los ejercicios.)

Sea la siguiente ley de correspondencia:

$$\textbf{Ley de correspondencia de la función } F : D \mapsto C \tag{3}$$

Si el punto del espacio $x \in D$ es tal que la densidad de masa en dicho punto es positiva (es decir, si hay algún objeto físico con masa no nula que ocupa, entre otros, ese punto del espacio, y en ese punto el objeto físico no está "hueco", la densidad de masa de ese objeto en ese punto no es nula), *entonces definimos $F(x) =$Yes.*

En cambio, si la densidad de masa el punto $x \in D$ es nula (es decir, si no hay ningún objeto físico con masa positiva que ocupe entre otros ese punto del espacio, o si lo hay, justo en ese punto x la densidad del objeto es nula), *entonces definimos $F(x) =$No.*

3. a) Hacer una figura con el diagrama Sagital que representa la función $F : D \mapsto C$ del ejemplo de Hoffman

   b) Observar que en este ejemplo, no todos los elementos del codominio C son obtenidos de aplicar la función F a los puntos del dominio. La palabra "Hoffman", (que es un elemento del codominio C), no es obtenida nunca (quedó fuera de la imagen)

   Conjunto Imagen Sea una función cualquiera $F : D \mapsto C$ (no necesariamente la función del ejemplo del Hoffman).

   Se llama Conjunto Imagen de la función $F : D \mapsto C$, y se denota como

   $$F(D)$$

   al conjunto formado por todos los elementos del codominio C que son correspondientes de puntos del dominio D.

4. Escribir por extensión el conjunto imagen $F(D)$ del ejemplo de Hoffman.

5. a) Escribir por comprensión el conjunto imagen $F(D)$ de cualquier función $F : D \mapsto C$ (no solo para el ejemplo de Hoffman). Sugerencia: explicar por qué es

   $$F(D) = \{y \in C : \ \exists\ x \in D \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

   b) Observar que en el ejemplo de Hoffman hay una infinidad de puntos del dominio que tienen el mismo correspondiente $y =$ Yes en el codominio, y otra infinidad que tienen el mismo correspondiente $y =$ No en el codominio. En el diagrama Sagital de la función $F : D \mapsto C$ del ejemplo de Hoffman, pintar de verde al subconjunto de puntos del dominio cuyos correspondientes en el codominio son todos "Yes". Pintar de rojo al subconjunto de puntos del dominio cuyos correspondientes en el codominio son todos "No".

Conjunto preimagen Sea un subconjunto cualquiera no vacío A CONTENIDO EN EL CODOMINIO C. Se llama conjunto preimagen por la función $F : D \mapsto C$ del conjunto $A \subset C$, y se denota:

$$F^{-1}(A)$$

al conjunto formado por todos los elementos x del DOMINIO tales que $F(x) \in A$.

Entonces el conjunto preimagen de A, por definición, está CONTENIDO EN EL DOMINIO D:

$$F^{-1}(A) \subset D \quad \forall\ A \subset C.$$

Notas importantes: Para indicar el conjunto preimagen, se usa el símbolo F^{-1} pero no tiene nada que ver con la potencia -1 de ningún número. Tampoco debe confundirse con la llamada función inversa (que en general no existe).

$F^{-1}(A)$, cuando se refiere al conjunto preimagen, denota un CONJUNTO del dominio, NO un elemento, y es aplicado a un CONJUNTO A del codominio, NO a un elemento.

6. Observar que en el ejemplo de Hoffman: $F^{-1}(\{\text{Yes}\}) = \{x \in D : \quad F(x) = \text{Yes}\}$.

   Escrito de otra forma: $F^{-1}(\{\text{Yes}\}) = \{x \in X : \quad$ distancia de x a la sup. de la Tierra $<$ 20 años-luz, densidad de masa en x es positiva$\}$.

   a) Hallar, en el ejemplo de Hoffman, los siguientes conjuntos preimágenes

   $$F^{-1}(\{\text{No}\}), \quad F^{-1}(\{\text{Yes, No}\}), \quad F^{-1}(\{\text{Yes, No, Hoffman}\}).$$

   b) En el ejemplo de Hoffman, ¿existe algún conjunto no vacío $A \subset C$ tal que $F^{-1}(A) = \emptyset$?

7. a) Escribir por comprensión el conjunto preimagen $F^{-1}(A)$ de cualquier función $F : D \mapsto C$ (no solo del ejemplo de Hoffman). Sugerencia: explicar por qué es

   $$F^{-1}(A) = \{x \in D : \quad f(x) \in A\}.$$

   b) Para una función cualquiera $F : D \mapsto C$ demostrar que

   $$F^{-1}(C) = D.$$

   c) Hacer un diagrama Sagital de una función general cualquiera $F : D \mapsto C$, elegir y pintar un conjunto A no vacío del codominio, y pintar de otro color en el diagrama su conjunto preimagen $F^{-1}(A)$.

   d) Hacer un diagrama Sagital de una función general cualquiera $F : D \mapsto C$, y pintar en él el conjunto imagen $F(D)$.

Conjunto imagen por F de B

Sea $F : D \mapsto C$ una función cualquiera. Sea $B \subset D$ un conjunto no vacío cualquiera contenido en el dominio. Se llama conjunto imagen de B por la función F, y se denota

$$F(B)$$

al conjunto de todos los puntos $y \in C$ (en el codominio) que son correspondientes por F de los puntos $x \in B$.

Entonces, por definición:

$$F(B) \subset C \quad \forall\ B \subset D.$$

Observar que $y \in F(B)$ si y solo si $y = F(x)$ para algún $x \in B$.

8. a) Escribir por comprensión el conjunto imagen $F(B)$ para una función cualquiera $F\colon D \mapsto C$, donde $B \subset D$ es un conjunto no vacío cualquiera contenido en el dominio. Sugerencia: explicar por qué es

$$F(B) = \{y \in C : \ \ \exists\, x \in B \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

b) Para una función cualquiera $F : D \mapsto C$ demostrar que

$$\forall\ B \subset D, \text{ si } B \neq \emptyset, \ \text{ entonces } F(B) \neq \emptyset.$$

c) Hacer un diagrama Sagital de una función general cualquiera $F : D \mapsto C$, elegir y pintar un conjunto no vacío cualquiera $B \subsetneqq D$, y pintar en su conjunto imagen $F(B)$.

d) ¿Se cumple siempre que $F(B) = C$? Justificar la respuesta (Si se responde afirmativamente, demostrarlo. Si se responde negativamente, exhibir un contraejemplo.)

9. Sea una función cualquiera $F : D \mapsto C$.

a) Sean B_1, B_2 dos subconjuntos no vacíos del dominio D. Investigar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si es verdadera demostrarla, y si es falsa refutarla con un contrajemplo.

i) $B_1 \subset B_2 \ \ \Rightarrow \ \ F(B_1) \subset F(B_2)$ ii) $F(B_1 \cap B_2) = F(B_1) \cap F(B_2)$

iii) $F(B_1 \cup B_2) = F(B_1) \cup F(B_2)$.

Sugerencia: i) y iii) son verdaderas pero ii) es falsa.

b) Sean A_1, A_2 dos subconjuntos no vacíos del codominio C. Investigar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si es verdadera demostrarla, y si es falsa refutarla con un contrajemplo. (Si se desea las demostraciones y los contraejemplos pueden realizarse solamente con los diagramas Sagitales + explicación del proceso lógico-deductivo.)

i) $A_1 \subset A_2 \ \ \Rightarrow \ \ F^{-1}(A_1) \subset F^{-1}(A_2)$ ii) $F^{-1}(A_1 \cap A_2) = F^{-1}(A_1) \cap F^{-1}(A_2)$

iii) $F^{-1}(A_1 \cup A_2) = F^{-1}(A_1) \cup F^{-1}(A_2)$.

Sugerencia: las tres afirmaciones son verdaderas.

10. (Ejercicio sobre “Competencias transversales”, plan de estudio vigente en todas las carreras de Ingeniería de esta Facultad)

a) Buscar en el portal Timbó [1] www.timbo.org.uy (acceso gratuito desde las computadoras que son propiedad de la Facultad, pero sin acceso desde computadoras personales, ni desde afuera de la Facultad) lo siguiente:

Tres artículos, escritos en inglés, que traten sobre la investigación científico-tecnológica y/o desarrollo de nueva tecnología en cualquier rama de la Ingeniería (uno por lo menos de esos tres, en la misma rama de Ingeniería en que vos estés inscripto en la Facultad). Deberán haber sido publicados después de 2003 en revistas científicas arbitradas o en libro de artículos científicos arbitrados. Por lo menos un autor de cada artículo, deberá ser un profesor (diferente en cada artículo) con grado 3, 4 ó 5 de esta Facultad.

Como ejemplos:

1) Artículo de investigación en Ingeniería Eléctrica, especialización Ingeniería de Control: “Global considerations on the Kuramoto model of sinusoidally coupled oscillators” Authors: Monzon, Pablo. (IIE, Facultad de Ingeniería, UDELAR, Uruguay, monzon@fing.edu.uy) and Paganini, Fernando.

2) Artículo de investigación en Ingeniería Mecánica, especialización Ingeniería Ambiental: “A Europe-South America network for climate change assessment and impact studies”. Varios autores, entre ellos Rafael Terra, IMFIA, Facultad de Ingeniería, UDELAR, rterra@fing.edu.uy.

3) Artículo de investigación en Ingeniería Civil, especialización Estructuras: “CQM-based BEM formulation for uncoupled transient quasistatic thermoelasticity analysis.” Publicado en: “Engineering Analysis With Boundary Elements”. Varios autores, entre ellos Sensale, Bernardi (IET, FAcultad de Ingeniería, UDELAR, sensale@fing.edu.uy).

4) Artículo de investigación en Ingeniería Eléctrica, especialización Ingeniería Matemática. Tema: Biomatemática-Neurodinámica: “Integrate and fire neural networks, piecewise contractive maps and limit cycles” Autores: Eleonora Catsigeras (IMERL, Facultad de Ingeniería, UDELAR, eleonora@fing.edu.uy) y Pierre Guiraud.

5) Artículo de investigación en Ingeniería en Computación, especialización Redes Informáticas. “Monte Carlo estimation of diameter-constrained network reliability conditioned by pathsets and cutsets”. Autores: Héctor Cancela([*]), Franco Robledo([*], frobledo@fing.edu.uy), Gerardo Rubino y Pablo Sartor([*]).

[*] = INCO, Facultad de Ingeniería, UDELAR. Publicado en la revista científica “Computer Communications” Volumen 36, año 2013.

[1] La mayoría de los sitios de internet que contienen información científica y tecnológica novedosa, son de difusión para público en general, no profesional ni científico. No contienen información académicamente refrendada, y científicamente convalidada (aunque pueda ser cierta). Unos pocos sitios contienen información científicamente arbitrada (convalidada). Entre estos sitios en la web, el portal Timbó contiene una colección muy completa de artículos y libros científicos y tecnológicos arbitrados, en todas las ramas de la Ciencia y la Tecnología, con casi toda la información existente hoy en día. Es la que usan y publican los científicos e ingenieros (entre otros profesionales) del mundo. Los artículos y libros de ese portal fueron rigurosamente arbitrados y refrendados antes de la publicación por otros científicos expertos del mundo. El acceso a esta bibliografía internacional es muy cara, si se pretende realizar en forma individual directamente con las editoriales científicas. Sin embargo, la ANII compra cada año el derecho de uso de toda esa biblioteca, y hoy en día la facilita, año a año, con acceso gratuito desde cualquier computadora institucional de escuelas y liceos, así como de universidades públicas y privadas en todo Uruguay. En particular en todas las salas de computadoras que tienen acceso libre para estudiantes de nuestra Facultad, hay acceso libre y gratuito al portal Timbó de la ANII.

b) Copiá el título en inglés y resumen en inglés, si lo tiene (el resumen se llama "abstract") de cada uno de los tres artículos encontrados por vos en el portal Timbó, con las referencias bibliográficas completas, que deben incluir:

b1) título del artículo b2) nombres del autor o autores en el mismo orden en que aparecen publicados b3) nombre de la revista científica donde fue publicado, b4) volumen y número de la revista donde apareció el artículo, o número de volumen del libro (si el libro fue publicado en más de un volumen), b5) entre qué páginas (inicial y final) se encuentra el artículo en dicho volumen, b6) año de publicación del volumen donde aparece el artículo, b7) ISSN de la revista científica, o ISBN si se trata de un libro b8) sitio web de la revista científica o de la editorial que publicó el libro, b9) doi del artículo (digital object identification), o la aclaración de que no le fue asignado doi (para lo cual tenés que estar seguro que no le fue asignado doi) b10) Abstract

c) Elegí uno de los tres artículos que encontraste. Traducí al español su título y su "abstract".

d) Mirá y leé (por arriba, muy rápidamente) el texto completo del artículo elegido. Aunque no logres entender nada de su contenido todavía, contá cuántas páginas del artículo contienen Matemática en cualquiera de las siguientes tres formas:

1) Fórmulas matemáticas y/o símbolos matemáticos

2) Párrafos del texto que expresen argumentos de deducción según la lógica-clásica, de afirmaciones que, en el mismo artículo, se dice o concluye que quedan probadas o demostradas. (Por ejemplo: las fundamentaciones lógico-deductivas habladas con palabras, aunque no tengan ninguna fórmula y ningún símbolo matemático, y aunque se refiera y contenga exlusivamente afirmaciones técnicas que vos no entendés todavía)

3) Argumentos inductivo-experimentales, que contengan o se obtengan de tablas de resultados, símbolos-códigos-programas, gráficas de funciones concretas, y/o representaciones gráficas simbólicas o abstractas (ej. figuras que representan propiedades de objetos reales concretos, pero que no son fotos ni dibujos que copian a la máxima perfección esos objetos reales).

e) Coordiná la entrevista y entrevistá personalmente a uno de los autores del artículo que elegiste, que sea profesor de esta Facultad Las entrevistas deberán realizarse en grupo de cualquier cantidad de estudiantes, de modo SOLAMENTE UN grupo entreviste a cada docente.

En esa entrevista averiguá lo siguiente:

e1) Si usó funciones matemáticas en el artículo e2) Si usó conjuntos de números reales, enteros, etc, en su artículo e3) Si usó otros tipos de conjuntos numéricos o no numéricos. e4) Si usó otros conceptos matemáticos comprendidos en el programa de este curso de cálculo 1 (leer previamente, y llevar impreso a la entrevista, el Temario del curso que se encuentra en la página de eva.fing.edu.uy- Instituto de Matemática-curso Cálculo 1 Anual). e4) Si al descubrir o innovar en los aspectos técnicos de ese artículo de investigación, el profesor entrevistado necesitó previamente descubrir pequeños teoremas o introducir definiciones matemáticas nuevas. e5) Si entre los ingredientes usados en ese artículo se encuentran trabajos de matemáticos u otros científicos, que no son necesariamente ingenieros.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 4
(Cardinalidad: conjuntos finitos, infinitos numerables e infinitos no numerables.)

1. Sea X un conjunto cualquiera no vacío (el universo). X no es necesariamente un conjunto de números. Puede ser un conjunto de puntos en el espacio, todo el espacio, un conjunto de rectas, un conjunto de caramelos, un conjunto de especies animales, etc.

   Un conjunto $A \subset X$ se llama finito si la **cantidad** de elementos diferentes que pertenecen al conjunto A es un número natural $k \in \mathbb{N}$. Por convención, el conjunto vacío es finito porque tiene 0 elemento y $0 \in \mathbb{N}$.

   A la cantidad k de elementos **diferentes** que tiene un conjunto **finito** A se llama *cardinalidad o cardinal de* A y se denota $\operatorname{card}(A)$ o también $\#A$.

   Fijemos un $k \geq 1$ natural. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_k$ exactamente k elementos **diferentes** del universo X (recordar que los a_j no tienen por qué ser números, pueden ser personas, verduras, funciones, rectas, etc). Sea

   $$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_k\}.$$

   Entonces

   $$\operatorname{card}(A) = \#A = k \in \mathbb{N}.$$

   Dicho de otra forma, se define

   $$\#\emptyset = 0;$$

   y si el natural k cumple $k \geq 1$ se define

   $$\#A = k$$

   cuando el conjunto A se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto $\{1, 2, \ldots, j, \ldots, k\} \subset \mathbb{N}$ de los primeros k naturales positivos (es decir, con todos los números naturales comprendidos entre 1 y k inclusive).

   Recordamos que la correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos A y $\{1, 2 \ldots, j, \ldots, k\}$, significa, dicho en términos corrientes, que a cada elemento $a \in A$ (que en general NO es un número), le pegamos una "etiqueta" j (j es un número natural entre 1 y k), de manera que:

   - A los diferentes elementos de A le corresponden etiquetas diferentes.
   - Todos los elementos de A están etiquetados.
   - Se usan como etiquetas todos los números naturales del conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$.

   a) Inventar y escribir un conjunto finito A de rectas en el plano con cardinalidad 3, tal que no todas las rectas sean paralelas entre sí. Exhibir una correspondencia biunívoca entre el conjunto A inventado y el conjunto $\{1, 2, 3\}$

   b) Inventar y escribir un conjunto finito B de números reales con cardinalidad 5. Exhibir dos correspondencias biunívocas diferentes entre el conjunto B inventado y el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. Un conjunto NO finito se dice que es un conjunto *INFINITO* (más precisamente que tiene INFINITOS ELEMENTOS), o que tiene cardinalidad infinita. Esto de llamarlo infinito (al conjunto) es un ADJETIVO (nada más). No es la definición de ningún objeto matemático nuevo que se represente con el símbolo ∞. Sin embargo, aunque ∞ no sea un objeto ni un elemento ni nada, suele usarse la siguiente notación (solo para ahorrarse palabras y acortar la escritura), cuando un conjunto A tiene infinitos elementos:

   $$\#A = +\infty.$$

a) Inventar y escribir un conjunto infinito C de números reales y demostrar que NO existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto inventado C y el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ para ningún $n \geq 1$ natural. (Sugerencia: usar inducción completa en n).

3. Sean A y B conjuntos finitos en un mismo universo X. Demostrar las afirmaciones siguientes:

   a) Si A y B son disjuntos (es decir, si $A \cap B = \emptyset$), entonces $\#(A \cup B) = (\#A) + (\#B)$.

   b) Si $A \subset B$ entonces $\#A \leq \#B$.

   c) Si $A \subset\neq B$ entonces $\#A < \#B$.

   d) Si $A \subset B$ entonces $\#(B \setminus A) = (\#B) - (\#A)$.

   e) $\#(A \cup B) = (\#A) + (\#B) - \#(A \cap B)$.

4. Se define el producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos (finitos o infinitos) del siguiente modo:

   $A \times B$ es el conjunto cuyos elementos son todas las parejas ordenadas (a, b) donde $a \in B$ y $b \in B$

   a) Escribir por extensión $A \times B$ cuando $A = \{\sqrt{2}, -1\}$ y $B = \{\sqrt{2}, -1, 0\}$.

   b) Demostrar que si A y B son finitos entonces

   $$\#(A \times B) = (\#A) \cdot (\#B).$$

   c) Exhibir algún subconjunto finito A tal que $A \subset \mathbb{R}^2$ y $\#A = 7$. (Nota: $\mathbb{R}^2$ es el producto cartesiando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales. Dibujar en el plano, tomando un sistema cartesiano de coordenadas $x0y$, todos los puntos cuyas parejas de coordenadas (x, y) son los elementos de A.

   d) Se define

   $$\pi_1(A) = \{a \in \mathbb{R} : \ \exists\, b \in \mathbb{R} \text{ tal que } \ (a, b) \in A.$$

   Exhibir por extensión el subconjunto $\pi_1(A)$ donde A es el conjunto construido por ti en la parte anterior. Interpretar en el plano el significado geométrico del conjunto $\pi(A)$ (Sugerencia: proyección del conjunto A del plano sobre el eje de las x).

   e) Demostrar que para todo subconjunto finito A contenido en $\mathbb{R}^2$, se cumple que el conjunto $\pi_1(A)$ es finito.

   f) Mostrar que $\mathbb{R}^2$ es infinito. Sugerencia: usar la parte e)

   g) Demostrar que si $A \times B$ es infinito, entonces A ó B es infinito.

5. Un conjunto infinito A se dice que es *infinito NUMERABLE* si se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathbb{N}^+$ de todos los naturales positivos.

   a) Estudiar la demostración que está más abajo y completarla con los detalles que puedan faltarle.

   Ejemplo Probar que el conjunto

   $$A = \{x \in \mathbb{Q} : \quad \exists\, b \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ x = b/3\},$$

   es numerable.

   Demostración: Trataremos de construir (para demostrar que existe) una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathbb{N}^+$ de todos los naturales positivos, y todos los diferentes elementos del conjunto A.

   Al principio, uno podría tratar de asignar por ejemplo, a cada natural positivo $b \in \mathbb{N}^+$ el elemento $x_b = b/3 \in A$. (Es decir, cada "etiqueta" $b \in \mathbb{N}^+$ la "pegamos "en el elemento $x_b = b/3$ del conjunto A).

   Pero esa correspondencia no sirve porque no es biunívoca entre los conjuntos $\mathbb{N}^+$ y A. No es biunívoca porque no todos los elementos de A quedan etiquetados. En efecto, $0 \in A$, y sin embargo $0 \neq x_b = b/3$ para todo $b \in \mathbb{N}^+$.

Entonces, cambiaremos un poco la correspondencia definida al principio, para tener otra correspondencia del conjunto $\mathbb{N}^+$ al conjunto A que sí sea biunívoca.

Como el problema es que falta el 0 en $\mathbb{N}^+$ pero está en A, puedo hacer lo siguiente:

1) A cada natural $n \in \mathbb{N}^+$, le hago corresponder $n-1 \in \mathbb{N}$. Esa correspondencia entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^+$ es biunívoca (convencerse de eso).

2) A cada natural $n-1 \in \mathbb{N}$ le hago corresponder el elemento $x_n = (n-1)/3 \in A$.

Ahora basta demostrar que la correspondencia que a cada natural positivo $n \in \mathbb{N}^+$ le hace corresponder

$$x_n = \frac{n-1}{3} \in A$$

es biunívoca. En efecto, por construcción:

I) TODO natural positivo $n \in \mathbb{N}^+$ es la etiqueta de algún elemento $x_n \in A$. (Precisamente a cada $n \in \mathbb{N}^+$ le hicimos corresponder $x_n = (n-1)/3$).

II) TODO elemento $x = b/3 \in A$ tiene una etiqueta $n \in \mathbb{N}^+$. En efecto, si $x = b/3$, entonces $x_n = (n-1)/3 = b/3 = x$ para la etiqueta $n = b+1$.

III) Dos elementos diferentes de A tienen etiquetas diferentes. Efectivamente, si $x = b/3$, si $y = c/3$ y si $x \neq y$, entonces $b \neq c$. Como la etiqueta de x es $n = b+1$ y la de y es $m = c+1$, y como $b \neq c$, entonces $n \neq m$.

IV) A dos etiquetas diferentes de $\mathbb{N}^+$ le corresponden elementos diferentes de A. Precisamente, si $n \neq m$, si $x = (n-1)/3$ y si $y = (m-1)/3$, entonces $n-1 \neq m-1$, de donde $(n-1)/3 \neq (m-1)/3$, de donde $x \neq y$.

Hemos terminado de probar que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto A y el conjunto de los naturales positivos $\mathbb{N}^+$. Entonces, por definición, hemos demostrado que el conjunto A es numerable.

$\square$

Nota importante: Se puede demostrar en general que un conjunto A es infinito numerable SI Y SOLO SI puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathbb{N}$ de TODOS los naturales (incluido el cero). Esta propiedad podrá usarse como sustituta de la definición de conjunto infinito numerable de ahora en adelante.

b) Sea el conjunto $\sqrt{2}\,\mathbb{N}$ definido así:

$$\sqrt{2}\,\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : \ \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ x = \sqrt{2} \cdot n\}.$$

Demostrar que $\sqrt{2}\,\mathbb{N}$ es numerable. (Sugerencia: leer la nota importante que está más arriba).

c) Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros (positivos, negativos y cero), es infinito numerable. Sugerencia: A los diferentes enteros x asignarle las etiquetas naturales n en forma alternada según su signo: Primero, si n es cero, x_n es el entero cero. Segundo, si $n \geq 1$ es impar, x_n es un cierto entero positivo a definir. Tercero, si $n \geq 1$ es par, x_n es un cierto entero negativo a definir.

6. a) Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera no vacío (no necesariamente formado por números), que llamaremos universo. Demostrar que si dos subconjuntos $A, B \subset X$ son infinitos numerables, entonces $A \cup B$ es infinito numerable.

b) Demostrar que si A es infinito numerable y B es finito, entonces $A \cup B$ es infinito numerable.

c) Sea el conjunto $\sqrt{2}\,\mathbb{Z} + \{7,5\}$ definido así

$$\sqrt{2}\,\mathbb{Z} + \{7,5\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad \text{Existen } \ a \in \mathbb{Z}, \ b \in \{7,5\} \text{ tales que } x = \sqrt{2} \cdot a + b\}.$$

Demostrar que $\sqrt{2}\,\mathbb{Z} + \{7,5\}$ es infinito numerable.

d) Sea n un natural tal que $n \geq 1$. Sean $A_1, A_2, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos de un mismo universo X. Demostrar por inducción completa en n que si cada uno de los n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son infinitos numerables, entonces $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ es infinito numerable.

7. Sean A y B dos conjuntos no vacíos tales que existe una correspondencia biunívoca entre A y B. Demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) Si A es finito, entonces B es finito.

   b) Si B es finito, entonces A es finito.

   c) Si A es infinito numerable, entonces B es infinito numerable.

   d) Si B es infinito numerable, entonces A es infinito numerable.

   e) Si A es infinito pero no es numerable, entonces B es infinito pero no es numerable.

   Sugerencia: Para demostrar e) argumentar por absurdo, y usar las afirmaciones b) y d).

   f) Si B es infinito pero no es numerable, entonces A es infinito pero no es numerable.

8. Un conjunto infinito A que no sea numerable, se dice que es NO NUMERABLE. Es decir, sabiendo que A es infinito, será un conjunto no numerable cuando NO exista ninguna correspondencia biunívoca entre $\mathbb{N}$ y A.

   Dicho de otro modo, **cualquier** correspondencia que uno defina de $\mathcal{N}$ hacia A deberá ser necesariamente NO biunívoca. Esto significa que, o bien cualquier correspondencia de $mathbbN$ hacia A asigna etiquetas naturales iguales a elementos diferentes del conjunto A, o bien deja elementos de A sin etiquetar, o suceden ambas cosas a la vez.

   ¿Cuándo un conjunto infinito A es NO numerable? Dicho en términos corrientes, A es NO numerable, cuando A tiene tantos elementos (muchísimos) que hacen imposible la tarea de enumerarlos biunívocamente con etiquetas usando solo los números naturales. Siempre se terminan “gastando ”todos los números naturales (todas las etiquetas), dejando (infinitos) elementos de A sin etiquetar.

   Ejemplo: El conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales es infinito NO numerable. Admitiremos esta afirmación como si fuera un axioma (a pesar de que puede demostrarse a partir de los axiomas de cuerpo, orden y completitud de $\mathbb{R}$).

   a) Demostrar que si existe una correspondencia biunívoca entre A y B, y si A es infinito no numerable, entonces B también es infinito no numerable.

   b) Demostrar que si $A \subset B$ y si A es infinito no numerable, entonces B es infinito no numerable.

9. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de todos los números racionales. Recordar que cada número racional x puede escribirse en forma única, como una fracción irreducible $x = p/q$, donde $p \in \mathbb{Z}$ es un entero (positivo, negativo o cero), y q es un natural positivo que es co-primo con p. Co-primos significa que no existen divisores naturales comunes (mayores estrictamente que 1) de p y q. Es decir, la fracción p/q es irreducible (no se puede simplificar o tachar ningún factor del numerador con ningún factor del denominador). Por ejemplo, el número racional $x = -18/4$ se escribe en forma única como la fracción irreducible $x = (-9)/2$.

   Afirmamos que

   $$\mathbb{Q} \text{ es un conjunto numerable.} \quad \text{(A demostrar)}$$

   a) Estudiar detenidamente la demostración clásica de numerabilidad de $\mathbb{Q}$ que está más abajo, y completarla dibujando la tabla que se menciona en ella.

Nota importante: No es necesario formalizar más la demostración que está escrita más abajo, ni con ecuaciones ni con fórmulas analíticas.

La demostración que se escribe aquí abajo, tiene **todo el rigor matemático-lógico-deductivo** que se usa en Matemática Pura por los investigadores científicos.

La Matemática NO ES LA FORMALIZACIÓN con símbolos, ecuaciones, fórmulas. Esta formalización es solo una herramienta para poder abreviar los conceptos y argumentos abstractos o lógicos. Hay veces, como en este ejercicio, que ese tipo de formalización, entorpece y no ayuda, en vez de servir de herramienta. En algunos casos, es mucho mejor usar otras herramientas, como gráficas, dibujos, tablas, imágenes (ej. los diagramas de Venn), sin usar fórmulas, ni expresiones algebraicas o analíticas, ni ecuaciones.

La Matemática es mucho más GENERAL, profunda y conceptual que los números, las fórmulas, las ecuaciones, y las expresiones algebraicas que se usan algunas veces para representarla.

En este ejercicio solo hay que dibujar la tabla que se menciona en la demostración, escribiendo algunos de los números racionales en ella, y RELLENAR los argumentos lógico-deductivos intermedios (lemas), que **cada estudiante** necesite (depende de la experiencia matemática de cada estudiante) para quedar totalmente convencido (con total AUTOCONVICCIÓN), de la veracidad de la afirmación que se pretende demostrar.

Es probable que algunos o muchos estudiantes, necesiten, para convencerse de alguna afirmación intermedia durante la siguiente demostración, agregar ciertas fórmulas, ecuaciones, etc.

El propósito de este ejercicio, es que cada estudiante decida y agregue, lo que NECESITE agregar a esta prueba, para quedar totalmente convencido, **en base exclusivamente a argumentos lógico-deductivos exactos**, de que la afirmación que se pretende demostrar, queda demostrada.

Demostración: Denotamos $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}^+$ es el conjunto de todos los racionales positivos. Denotamos $\mathbb{Q}^- \subset \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}^-$ es el conjunto de todos los racionales negativos. Entonces tenemos:

$$\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\} = \mathbb{Q}.$$

Uno hace una tabla con todos los números racionales positivos $x \in \mathbb{Q}^+$. Sabemos que $x = p/q > 0$ con $p, q \in \mathbb{N}^+$. En la columna 1 de la tabla (que tiene tamaño infinito), uno pone todos los racionales positivos para los cuales $q = 1$ ordenados según p (el primero de la columna 1 es el racional $p/1$ con $p = 1$, el segundo es $p/1$ con $p = 2$, etc). En la columna 2 (que también es infinita), uno hace lo mismo que hizo para escribir la la columna 1, pero eligiendo $q = 2$ (dejando fijo $q = 2$), y variando $p \in \mathbb{N}^+$ desde 1 en adelante. En la tercera columna uno escribe todos los racionales que tienen $q = 3$ fijo. Así sucesivamente, en la columna r-ésima uno escribe todos los racionales que tienen $q = r$ fijo.

Habrá infinitas columnas e infinitas filas en la tabla.

Ahora uno asigna las "etiquetas" n del conjunto $\mathbb{N}^+$, a los elementos $x \in \mathcal{Q}^+$ que están en la table construida. Asigna estas etiquetas ordenadamente, según un orden que NO es el dado por la desigualdades $x < y$ entre números racionales. Para asignar todas las diferentes etiquetas $n \in \mathbb{N}^+$ a **todos** los **diferentes** elementos $x \in \mathbb{Q}^+$, uno hace lo siguiente:

1. Recorre ordenadamente todos los racionales de la tabla, de acuerdo al camino de la figura 1.

2. Va asignando, a lo largo del camino, en orden cronológico mientras lo recorre, todas las etiquetas n (empezando por la etiqueta 1, siguiendo por la $2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$), a todos los racionales que hay en la tabla, en el **orden en que aparecen** estos números racionales **al recorrer la tabla según el camino de la figura 1.**

3. Para que la correspondencia así definida (correspondencia de $\mathbb{N}^+$ a $\mathbb{Q}^+$) SEA BIUNÍVOCA, habrá que ir salteando oportunamente las fracciones p/q de la tabla que representen a algún mismo número racional

que ya haya sido etiquetado antes. En efecto, observamos que un mismo número racional puede aparecer representado en la tabla con muchas fracciones diferentes (por ejemplo $x = 9/2 = 18/4 = 27/6 = 36/8$, etc). Ese racional x será etiquetado solo la primera vez que aparece a lo largo del camino que estamos recorriendo. Cuando aparezca después, en el recorrido del camino (con otra fracción que representa al mismo racional x), saltearemos esa nueva fracción, no asignándole etiqueta natural a ella. De esa forma no volveremos a etiquetar al mismo racional x: cada racional positivo x tendrá una única etiqueta $n \in \mathbb{N}^+$, y podremos escribirlo como x_n.

Por ejemplo, el racional 18/4 va a ser etiquetado como x_n, con el número natural n que le corresponde en el camino de la Figura 1 a la fracción 9/2. La fracción 9/2 aparece en el camino de la Figura 1, antes que la fracción 18/4. Cuando después lleguemos a la fracción 18/4, la saltearemos. Análogamente, saltearemos también las fracciones 27/6, 36/8, etc, porque todas ellas aparecen en el camino de la Figura 1 después que 9/2 y SON el mismo racional que 9/2.

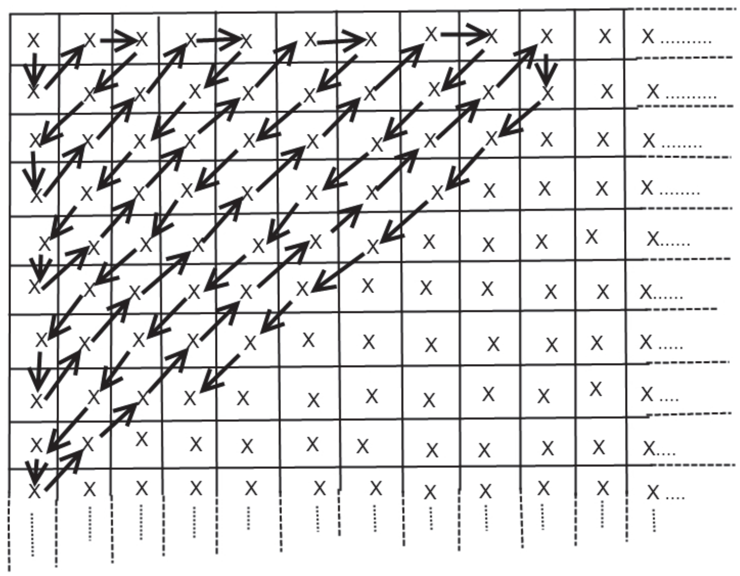

Figura 1: Tabla del Ejercicio 12

Mediante el proceso descrito en los pasos 1, 2 y 3, hemos construido una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{N}^+$. Entonces hemos demostrado que existe una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{N}^+$. Por definición de numerabilidad, hemos probado que

$$\mathbb{Q}^+ \text{ es un conjunto infinito numerable.}$$

Ahora hacemos un argumento análogo con el conjunto $\mathbb{Q}^-$ de todos los racionales negativos. Deducimos que

$$\mathbb{Q}^- \text{ es un conjunto infinito numerable.}$$

Finalmente, usamos la propiedad demostrada en la parte b) del Ejercicio 9, deduciendo que

$$\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \text{ es un conjunto infinito numerable.}$$

Como $\{0\}$ es un conjunto finito (porque tiene un solo elemento), usando la propiedad demostrada en la parte c) del Ejercicio 9, deducimos que

$$\left(\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-\right) \cup \left\{0\right\} \text{ es un conjunto infinito numerable.}$$

Como
$$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-\right) \cup \left\{0\right\},$$
concluimos que
$$\mathbb{Q} \text{ es un conjunto infinito numerable.}$$
La afirmación anterior es la que queríamos demostrar. $\square$

10. Sean A, B conjuntos de un mismo universo.

    a) Demostrar que si A y B son conjuntos infinitos no numerables, entonces $A \cup B$ también es infinito no numerable.

    b) Demostrar que si A es infinito no numerable y B es finito o infinito numerable, entonces $A \cup B$ es infinito no numerable.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 4
Transformaciones o Funciones: inyectivas, sobreyectivas, biyectivas ó invertibles, función inversa y función compuesta.

Notación: Cuando se escribe "la función F", se está abreviando la notación $F : D \mapsto C$. Pero eso no significa que la función F sea otra cosa que la terna D, C, y Ley de Correspondencia. Aunque por comodidad, para escribir menos, se omita a veces escribir $F : D \mapsto C$, la función ES LA TERNA.

Convención importante: Si se cambia el conjunto D por otro conjunto (por ejemplo por un subconjunto no vacío $D' \subsetneqq D$), o si se cambia el conjunto C, o si se cambia la ley de correspondencia por otra, la función o transformación que se obtiene ES OTRA diferente, por convención. Por ejemplo, dejamos la misma ley de correspondencia del ejemplo de Hoffman, el mismo codominio, pero cambiamos el dominio D por el siguiente:

$$D' = \{x \in X : \text{ distancia de } x \text{ a la Tierra} \leq 10 \text{ millones de años luz}\}.$$

Obtenemos otra función

$$G : D' \mapsto C,$$

aunque la ley de correspondencia sea la misma que la de F. Las funciones F y G son DISTINTAS.
$F \neq G$, aunque la fórmula (ley, regla, etc) que permite obtener $F(x) \ \ \forall\, x \in D$, sea en forma, exactamente la misma que la que permite obtener $G(x) \ \ \forall\, x \in D'$.
$F \neq G$ porque $D \neq D'$. Entonces, hay algún punto $x \in D \setminus D'$ ó hay algún punto $x \in D' \setminus D$. Para esos puntos se puede obtener $F(x)$ pero no $G(x)$, o se puede obtener $G(x)$ pero no $F(x)$.

1. Sea

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}, \quad C = \mathbb{R}$$

$$F : D \mapsto C \text{ tal que } F(x) = 1/(x-1) \ \ \forall\, x \in D.$$

$$D' = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$$

$$G : D' \mapsto C \text{ tal que } G(x) = 1/(x-1) \ \forall\, x \in D'.$$

a) Explicar por qué $F \neq G$ (son funciones diferentes) y por qué $F(x) = G(x) \ \ \forall\, x \in D \cap D'$..

a) Chequear que $F > 0$ y G no. Recordamos que una función Φ cuyo codominio esté contenido en el conjunto $\mathbb{R}$ de reales, se dice que es positiva, y se escribe $\Phi > 0$, si $\Phi(x) > 0$ para todo x en el dominio de Φ.

b) Hacer diagramas Sagitales para representar F y G (en dos dibujos separados). En cada uno de esos dibujos, pintar de gris el dominio y de azul el codominio. Pintar de amarillo el conjunto imagen.

c) Croquizar las gráficas en el plano $x0y$ de las funciones reales con variable real F y G (en dos dibujos separados). En cada uno de esos dibujos, pintar de gris el dominio y de azul el codominio. Pintar de amarillo el conjunto imagen.

d) Sea $C' = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$. Sea $H : D \mapsto C'$ definida por $H(x) = 1/(x-1)$ Explicar por qué $H \neq F$ y probar que $H > 0$. Hacer diagrama Sagital para representar H. Croquizar la gráfica en el plano $x0y$ de la función H. Pintar de diferentes colores el dominio, el codominio y el conjunto imagen.

e) Sea $g : D' \mapsto C'$ definida por $g(x) = 1/(x-1)$. Explicar por qué g no es una función (y por lo tanto, en realidad, no tenemos derecho a escribir $g : D' \mapsto C'$).

f) Sea $\phi : D \mapsto \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = 1/(x-1)$ si $x \geq 2$ y $\varphi(x) = -1/(x-1)$ si $x \leq 2$. Explicar por qué φ no es una función (y por lo tanto, en realidad, no tenemos derecho a escribir $\varphi : D \mapsto \mathbb{R}$.

g) Sea $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = 1/(x-1)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Explicar por qué ψ no es una función (y por lo tanto, en realidad, no tenemos derecho a escribir $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

h) De todo lo anterior concluir que una “fórmula”, como por ejemplo $1/(x-1)$, no es, rigurosamente hablando, lo mismo que una función.

2. Averiguar si las siguientes son o no son funciones. Si lo son, dibujar sus diagramas Sagitales y croquizar sus gráficas en el plano $x0y$. Si no lo son, explicar por qué no lo son:

   a) $D = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 5\}$, $\quad f : D \mapsto \mathbb{Q}$ dada por $f(n) = \dfrac{n}{100}\ \forall\ n \in D$

   b) $D = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 5\}$, $\quad g : D \mapsto \mathbb{Q}$ dada por $g(n) = \dfrac{100}{n}\ \ \forall\ n \in D$.

   c) $h : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ dada por $h(n) = \dfrac{100}{n}\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

   e) $H : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ dada por $H(n) = \dfrac{100}{n}$ si $n \geq 5$ y $H(n) = \dfrac{n}{100}$ si $n \leq 5$.

   f) $F : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \dfrac{100}{x}$ si $x \geq 5$ y $F(x) = \dfrac{x}{100}$ si $x < 5$.

   g) $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $G(x) = \dfrac{100}{x}$ si $x \geq 5$ y $G(x) = \dfrac{x}{100}$ si $x < 5$.

3. Considerar las funciones F y G dadas en las partes f) y g) del ejercicio anterior.

   a) Observar que F es una sola función, aunque se precisen dos fórmulas para definir su ley de correspondencia. Análogamente G. Explicar por qué $F \neq G$ (son funciones distintas) a pesar que $F(x) = G(x)\ \ \forall\ x \in \mathbb{N}$.

   b) Dibujar las gráficas en el plano $x0y$ de las funciones F y G (en dibujos separados). Pintar el dominio y el conjunto imagen de F. Idem para G.

   c) Observar que no todos los puntos de una de las gráficas de la parte b) son puntos de la otra gráfica. Observar que ambas gráficas son objetos geométricos muy diferentes entre sí, a pesar de que la fórmula que se usó para definir las leyes de correspondencia de F y G es, en formato, la misma. Explicar por qué las gráficas son tan diferentes.

Función sobreyectiva o suprayectiva (son sinónimos): Cuando todo punto del codominio está en el conjunto imagen de la función.

Función inyectiva: Cuando a puntos diferentes del dominio le corresponden puntos diferentes del codominio.

Función biyectiva o invertible o correspondencia biunívoca (los tres son sinónimos): Cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

4. Dibujar diagrama Sagital de

   a) una función no sobreyectiva

   b) una función inyectiva

   c) una función sobreyectiva

   d) una función no inyectiva

   e) una función inyectiva no sobreyectiva

   f) una función sobreyectiva no inyectiva

   g) una función ni inyectiva ni sobreyectiva

   h) una función biyectiva

e) una función invertible $F : D \mapsto C$.

f) En el diagrama Sagital de la función invertible o biyectiva F observar que cambiando el sentido de las flechas se obtiene otra función $G : C \mapsto D$, tal que:

El dominio de G es el codominio de F y el codominio de G es el dominio de F.

g) Tome un elemento x cualquiera del dominio de la función biyectiva F. ¿Qué se obtiene al aplicar primero F y luego G al elemento x? En breve: ¿Quién es $G(\,F(x)\,)$?

h) Tome un elemento y cualquiera del codominio de la función biyectiva F. ¿Qué se obtiene al aplicar primero G y luego F al elemento y? En breve: ¿Quién es $F(\,G(y)\,)$?

Función inversa: Sea dada una función

$$F : D \mapsto C,$$

invertible o biyectiva (estos adjetivos son sinónimos, por definición, y también lo es la expresión correspondencia biunívoca). Construimos la función G como en el ejercicio anterior, así:

- Tomar como dominio de G, el codominio de F
- Tomar como codominio de G, el dominio de F
- Tomar como ley de correspondencia de G, la ley que invierte las flechas en el diagrama Sagital de F.

La función G así construida se llama función inversa de F, y se denota

$$F^{-1} : C \mapsto D.$$

(Lamentablemente, por haraganería, se usa el mismo símbolo que para conjunto preimagen, pero ahora, cuando se refiere a la función inversa, F^{-1} no indica un conjunto, sino una función)

5. a) Demostrar (usando solo los diagramas Sagitales y argumentando con rigor lógico exacto sobre las figuras) que si $F : D \mapsto C$ es una función cualquiera invertible o biyectiva, entonces

$$F^{-1}\Big(\,F(x)\,\Big) = x \;\; \forall\, x \in D, \tag{1}$$

$$F\Big(\,F^{-1}(y)\,\Big) = y \;\; \forall\, y \in C. \tag{2}$$

b) Demostrar (usando solo los diagramas Sagitales y argumentando con rigor lógico exacto sobre las figuras) que si $F : D \mapsto C$ no es sobreyectiva, entonces ninguna función $H : C \mapsto D$ cumple

$$F(H(y)) = y \;\forall\; y \in C.$$

Deducir que si F no es sobreyectiva ninguna función $H : C \mapsto D$ cumple la igualdad (2) de la parte a). Atención: lo anterior se refiere a qué pasa si se pone H en el rol de F^{-1} dentro de la igualdad (2).

Concluir que si F no es sobreyectiva, no existe función inversa F^{-1} de F. Atención: la función inversa F^{-1} por convención, debe cumplir las dos igualdades (1) y (2) de la parte a).

c) Demostrar (usando solo los diagramas Sagitales) que si $F : D \mapsto C$ no es inyectiva, entonces ninguna función $H : C \mapsto D$ cumple

$$H(F(x)) = x \;\forall\; x \in D.$$

d) Concluir que existe la función inversa F^{-1} cumpliendo las dos igualdades de la parte a) si y solo si F es biyectiva o invertible. (Es por este motivo que en Matemática se usa la palabra invertible como sinónimo de biyectiva)

Función compuesta $G \circ F$: La que resulta de aplicar una función F primero, y al elemento obtenido, aplicarle después la función G.

Observar que $G \circ F$ se escribe y se aplica de derecha a izquierda como en la escritura hebrea, y no de izquierda a derecha. En efecto, dado cualquier elemento x del dominio de F:

PRIMERO, aplicamos la función F. Obtenemos el elemento $y = F(x)$ perteneciente al conjunto imagen de F.

SEGUNDO, aplicamos la función G al elemento y obtenido antes. Obtenemos $G(y) = G(\,F(x))$.

En breve:

$$(G \circ F)(x) = G(\,F(x)\,) \;\; \forall\, x \in \text{ Dominio de } F.$$

Pero para poder aplicar G a $y = F(x)$, este elemento y debe pertenecer al dominio de G. Esto se cumple si el conjunto imagen de F está contenido (o coincide) con el dominio de G.

Entonces, para poder definir la función compuesta $G \circ F$ uno pide que se cumpla previamente la siguiente condición:

$$(\text{Imagen de } F) \subset (\text{Dominio de } G).$$

6. a) Dibujar el diagrama Sagital de dos funciones $F : D \mapsto C$ y $G : D' \mapsto C'$ de modo que la imagen de F esté contenida en el dominio de G.

   b) Dibujar y/o repasar en color, sobre la misma figura dibujada en la parte a), el diagrama Sagital de la función compuesta $G \circ F$.

   c) Sean $F : D \mapsto C$ y $G : D' \mapsto C'$ tales que la imagen de F está contenida en el dominio de G. Demostrar (usando solamente los diagramas Sagitales y argumentos rigurosos lógicos de deducción a partir de esos diagramas) que si F y G son invertibles, entonces $G \circ F$ también es invertible.

   d) Sean $F : D \mapsto C$ y $G : D' \mapsto C'$ tales que la imagen de F está contenida en el dominio de G. Investigar cuál es la respuesta a la siguiente pregunta (si es afirmativa demostrarla y si es negativa fundamentar la respuesta exhibiendo un contraejemplo)

$$G \circ F \text{ invertible, ¿implica } G, F \text{ necesariamente invertibles?}$$

7. a) Dado un conjunto no vacío D se define la función llamada Identidad en D, que se denota Id_D, del siguiente modo:

$$Id_D : D \mapsto D \text{ definida por } Id_D(x) = x \;\; \forall\, x \in D.$$

   Dibujar el diagrama Sagital de la función Id_D

   b) Dado otro conjunto no vacío C, definir Id_C y dibujar el diagrama Sagital de la función Id_C.

   c) Sea una función biyectiva o correspondencia biunívoca $F : D \mapsto C$. Demostrar que la función inversa F^{-1} cumple las siguientes igualdades:

$$F^{-1} \circ F = Id_D, \quad F \circ F^{-1} = Id_C. \tag{3}$$

   d) En las hipótesis de la parte c) demostrar que la función inversa F^{-1} es la única función $H : C \mapsto D$ que cumple las igualdades (3). Es decir, si $H : C \mapsto D$ cumpliera

$$H \circ F = Id_D, \;\; F \circ H = Id_C,$$

   entonces sería $H = F^{-1}$.

8. a) Dibujar en una recta real horizontal (eje de las x) el siguiente conjunto de reales

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x \leq 1\}$$

Este conjunto D se llama intervalo cerrado de la recta real con extremos en los puntos -1 y 1 y se denota como

$$D = [-1, 1]$$

b) Dibujar en una recta real vertical (eje de las y) el siguiente conjunto de reales:

$$C = \{y \in \mathbb{R} : -2 \leq y, \ y \neq 3\}$$

c) Dibujar la gráfica en el plano $x0y$ de la siguiente función real de variable real:

$$f : [-1, 1] \mapsto C \text{ dada por } f(x) = 2x \ \forall \ x \in [-1, 1].$$

d) Pintar en color el conjunto imagen de f (Es decir $f(D) = f([-1, 1])$). Chequear que este conjunto imagen es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ de la recta real con extremos en los puntos -2 y 2.

e) ¿Es f biyectiva? ¿Es f inyectiva?

f) Sea $g : [-1, 1] \mapsto f([-1, 1])$ dada por $g(x) = 2x \ \forall \ x \in [-1, 1]$. Dibujar la gráfica de g en el plano $x0y$.

g) Probar que g es biyectiva (o sea, invertible, o sea, una correspondencia biunívoca entre su dominio y su codominio).

h) Dibujar la gráfica de la función inversa g^{-1}, usando el eje vertical de las y para la variable independiente de g (es decir, eje vertical para el dominio de g), y el eje horizontal de las x para la variable dependiente de g (es decir, eje horizontal para el codominio de g).

i) Chequear que la función inversa de g es $g^{-1} : f([-1, 1]) \mapsto [-1, 1]$ dada por $g(y) = y/2 \ \ \forall \ y \in f([-1, 1])$.

9. Sea $e \in \mathbb{R}$ el número de Euler (base de la función exponencial e^x).

Sean en la recta real los siguientes intervalos cerrados:

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leq x \leq 1\}, \qquad [0, e] = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x \leq e\}.$$

Definimos la función

$$f : [0, 1] \mapsto [0, e] \text{ dada por } \ f(x) = x\, e^x.$$

a) Admitiendo que la función f es creciente y que la imagen $f([0, 1])$ es un intervalo, hallarlo.

b) Dibujar aproximadamente la gráfica de f en el plano $x0y$.

b) Demostrar que existe función inversa f^{-1} de f. (Sugerencia: Argumentar en forma rigurosa lógico-deductiva a partir de la gráfica de f. Hacer primero el ejercicio anterior).

c) Intentar encontrar la “fórmula” $x = f^{-1}(y)$ de la función inversa.

d) Dibujar aproximadamente la gráfica de la función inversa f^{-1}.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.

Práctico 4 Complemento

Temas: Cardinalidad, conjuntos infinitos numerables y no numerables. Densidad de conjuntos en la recta real.

El complemento de cada práctico tiene ejercicios medianamente difíciles o muy difíciles.

Los de este Práctico 3 Complemento, son para hacer a lo largo de curso, no necesariamente en la semana que corresponde al Práctico 3.

1. Se puede demostrar que el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales es infinito NO numerable.

   Nota importante: De ahora en adelante usaremos (como si fuera un axioma, o como si fuera un teorema que ya estuviera demostrado), la propiedad de no numerabilidad del conjunto $\mathbb{R}$ de todos los reales.

   a) Sea el siguiente intervalo acotado abierto de reales definido por

   $$\{1 < x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : \ 1 < x < 2\}.$$

   Afirmamos:

   El intervalo $\{1 < x < 2\}$ es no numerable. (A demostrar)

   a) Estudiar la siguiente demostración de la afirmación anterior, completándola con los dibujos gráficos necesarios y los argumentos exactos lógico-deductivos que puedan faltar.

   Demostración: Recordamos que $\mathbb{R}$ es no numerable. Encontramos una correspondencia biunívoca entre el intervalo $\{1 < x < 2\}$ y el conjunto de todos los reales. Por ejemplo, graficamos, como sabemos del liceo, la función

   $$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

   y deducimos, de la representación gráfica de la función f, y sin argumentos algebraicos ni usando ecuaciones, que $f(x)$ (para los valores de x restringidos a los del intervalo $\{1 < x < 2\}$), establece una correspondencia biunívoca entre ese intervalo y el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los reales.

   Ahora asumimos por absurdo que el intervalo $\{1 < x < 2\}$ es numerable. Entonces, existiría una correspondencia biunívoca g entre $\mathbb{N}$ y el intervalo $\{1 < x < 2\}$.

   "COMPONEMOS" esta correspondencia biunívoca g (aunque no la conocemos ni nos interesa cuál sea en realidad), con la correspondencia biunívoca f construida antes, f del intervalo $\{1 < x < 2\}$ a los reales $\mathbb{R}$.

   Obtenemos la siguiente correspondencia (llamada "COMPUESTA", y denotada como $f \circ g$) que va del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, hacia el conjunto $\mathbb{R}$ de los reales:

   $$(f \circ g)(n) = f(g(n)) \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

   donde

   $$g(n) = x_n \in \{1 < x < 2\}, \quad f(g(n)) = f(x_n) = y_n \in \mathbb{R}.$$

   Ahora probamos, con argumentos gráficos, no analíticos ni con ecuaciones, que la correspondencia que a cada $n \in \mathbb{N}$ le asigna el real $y_n = f(x_n) = f(g(n))$, es biunívoca entre $\mathcal{N}$ y la recta real $\mathbb{R}^+$.

   Concluimos, por definición de numerabilidad, que el conjunto $\mathbb{R}$ sería numerable, lo que es absurdo. $\square$

2. a) Sean $a < b$ dos números reales fijos. Demostrar que el siguiente intervalo abierto de reales

$$\{a < x < b\} = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$$

es infinito no numerable.

3. Demostrar que si A es infinito no numerable y si $A \subset B$, entonces B es infinito no numerable.

4. Sean $a < b$ dos números reales fijos.

   a) Demostrar que el siguiente intervalo cerrado de reales

$$\{a \leq x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$$

   es no numerable. Sugerencia: usar lo probado en los dos ejercicios anteriores.

   b) Demostrar que el siguiente intervalo (ni abierto ni cerrado) de reales es no numerable

$$\{a < x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}.$$

   c) Demostrar que el siguiente intervalo no acotado y abierto (semirrecta abierta) de reales, es no numerable:

$$\{a < x\} = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}.$$

   d) Demostrar que el siguiente intervalo no acotado y cerrado (semirrecta cerrada) de reales, es no numerable:

$$\{a \leq x\} = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\}.$$

5. a) Construir un subconjunto no vacío de reales que sea finito.

   b) Construir un subconjunto de reales que sea infinito numerable.

   c) Construir un subconjunto de reales que sea infinito no numerable, que no sea todo $\mathbb{R}$ y que no sea un intervalo.

6. Intentar construir un subconjunto K de reales que sea infinito no numerable y tal que ningún intervalo esté contenido en K. ¿Existe algún ejemplo?

7. a) Buscar en algún lugar confiable de internet o en algún libro, cómo se construye geométricamente el conjunto K de reales llamado "Conjunto de Cantor del tercio mitad."(Sugerencia: ver Wikipedia)

   b) Estudiar y entender la construcción geométrica del conjunto de Cantor K del tercio mitad.

   c) Buscar y leer las ideas que se usan para demostrar que el conjunto de Cantor K del tercio mitad es infinito NO numerable (No se pide estudiar y comprender totalmente esa demostración).

   d) Usando la construcción geométrica del conjunto de Cantor K del tercio mitad, demostrar que ningún intervalo está contenido en K

8. Un conjunto A de reales con cardinalidad infinita (numerable o no numerable) se dice que es *denso* en la recta real, si toda vez que se tomen dos elementos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, existe un elemento $c \in A$ tal que

$$a < c < b.$$

   a) Interpretar geométricamente la definición de conjunto denso en la recta real.

   b) Demostrar que el intervalo $[0, 1] = \{0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}$ NO es denso en la recta real.

c) Inventar un ejemplo de conjunto $A \subset\neq \mathbb{R}$ denso en la recta real. Sugerencia: Considerar el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros. Unirlo con el conjunto $\mathbb{Z}/10$ de todos los racionales que tienen la forma $p/10$ donde $p \in \mathbb{Z}$. Considerar la unión

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{Z}}{10^n}.$$

Demostrar que A es denso en la recta real.

9. Demostrar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los racionales es denso en la recta real.

10. a) Investigar si es afirmativa o negativa la respuesta a la siguiente pregunta. Si es afirmativa demostrarla, y si es negativa, refutar la afirmación exhibiendo un contraejemplo.

    Si $A \subset \mathbb{R}$ es denso en la recta real ¿es necesariamente cierto que A es infinito?

    b) Idem a la parte a) con la siguiente pregunta:

    Si $A \subset \mathbb{R}$ es denso en la recta real ¿es necesariamente cierto que A es infinito no numerable?

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 5
Número real: orden (signo) y completitud (supremo, ínfimo, de conjuntos y de funciones reales.)

Decimos que el signo de un real y es $+$ cuando $y > 0$, es $-$ cuando $y < 0$, y es 0 cuando $y = 0$. Observar que el signo de $-y$ es $-$ si $y > 0$, pero es $+$ si $y < 0$ y es 0 si $y = 0$. Por ejemplo $-(-3) = 3$ tiene signo $+$.

1. **Estudio del signo de un polinomio factorizado**

a) Sea $P(x) = (x-5)(x-2)(x+\sqrt{3})(x+7)(x+100)$. Sus raíces son $5, 2, -\sqrt{3}, -7, -100$, ordenadas de mayor a menor, y todas son raíces simples (multiplicidad 1).

Chequear que el signo de $P(x)$ está representado en la figura 1 (cuadro superior), donde en el renglón de abajo se escriben los valores de x y en el renglón de arriba el signo correspondiente de $P(x)$.

Sugerencia: de derecha a izquierda en la figura, chequear que: $P(x) > 0$ si $x > 5$, $\quad P(5) = 0$, $\quad P(x) < 0$ si $2 < x < 5$, $\quad P(2) = 0$, $\quad P(x) > 0$ si $-\sqrt{3} < x < 2$, $\quad$ etc.

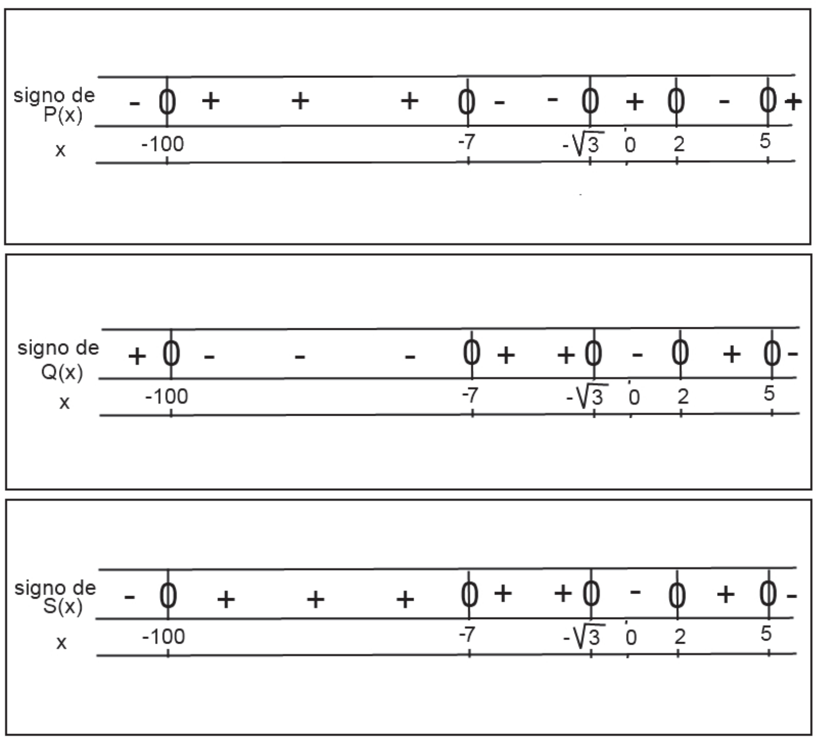

Figura 1: Estudio del signo de los polinomios $P(x), Q(x)$ y $R(x)$ del Ejercicio 1.

b) Sea $Q(x) = -(x-5)(x-2)(x+\sqrt{3})(x+7)(x+100)$. Sus raíces son $5, 2, -\sqrt{3}, -7, -100$, ordenadas de mayor a menor, y todas son raíces simples (multiplicidad 1)

Chequear que el signo de $Q(x)$ está representado en la figura 1 (cuadro del medio), donde en el renglón de abajo se escriben los valores de x y en el renglón de arriba el signo correspondiente de $Q(x)$.

c) Sea $S(x) = -(x-5)(x-2)^3(x+\sqrt{3})(x+7)^2(x+100)$. Sus raíces son $5, 2, -\sqrt{3}, -7, -100$, ordenadas de mayor a menor, donde $5, -\sqrt{3}, -100$ son raíces simples (multiplicidad 1), -7 es raíz doble (multiplicidad 2) y 2 es raíz triple (multiplicidad 3).

Chequear que el signo de $S(x)$ está representado en la figura 1 (cuadro inferior), donde en el renglón de abajo se escriben los valores de x y en el renglón de arriba el signo correspondiente de $S(x)$.

d) Conjeturar y escribir un conjunto de reglas generales que sirvan de método para estudiar el signo de cualquier polinomio que esté factorizado, conociendo todas sus raíces y las multiplicidades de cada raíz.

e) Estudiar el signo del polinomio $f(x) = -2x^3 - 8x^3 - 6x^2 + 8x + 8$.

Sugerencia: 1 es una raíz; bajar por Ruffini; luego encontrar todas las demás raíces para factorizar el polinomio; finalmente aplicar el método de la parte d).

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 4 > 0\}$. Dibujemos en la recta real el conjunto A. Primero observamos que

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2).$$

Entonces, estudiando el signo del polinomio con el método del ejercicio 1, obtenemos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\} \bigcup \{x \in \mathbb{R} : \ x < -2\}$$

$$A = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \ -2 \leq x \leq 2\}.$$

Es decir, el conjunto A de todos los puntos x en la recta real tales $x^2 - 4 > 0$, es la unión de dos semirrectas disjuntas entre sí: la "semirrecta abierta izquierda":

$$(-\infty, -2) = \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$$

con la "semirrecta abierta derecha":

$$(2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}.$$

El conjunto $A = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ puede escribirse también como el complemento en la recta real del "intervalo acotado cerrado":

$$[-2, 2] = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}.$$

Es decir:

$$A = \mathbb{R} \setminus [-2, 2].$$

En la figura 2 (cuadro superior) marcamos con trazo grueso al conjunto A.

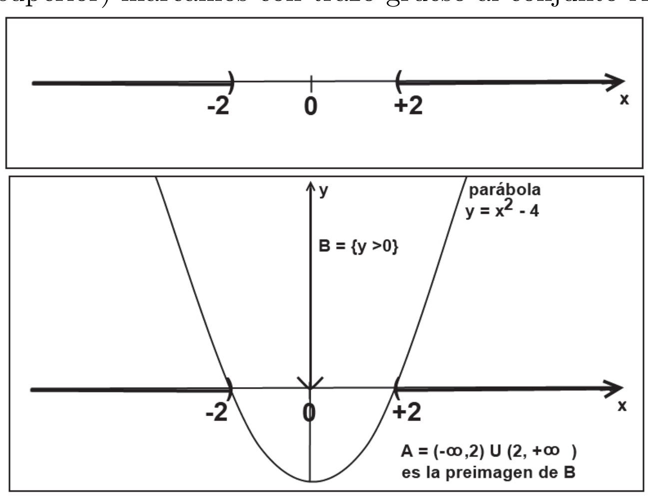

Figura 2: El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - 4 > 0\}$ en el eje real de las x, es la unión de dos semirrectas abiertas disjuntas entre sí.

Nota: En la figura 2 (cuadro superior), la marca ")" en el punto -2 significa que la semirrecta izquierda abierta

$$(-\infty, -2) = \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$$

está a la izquierda del punto -2 pero no contiene a ese punto -2.

Análogamente, la marca "("en el punto $+2$ significa que la semirrecta derecha abierta

$$(2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$$

está a la derecha de 2 pero no contiene al punto 2.

Si quisiéramos representar una semirrecta izquierda cerrada

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$

resaltaríamos los puntos de la semirrecta en la recta real y pondríamos en su punto extremo a la marca "]" en vez de ")". Análogamente, si quisiéramos representar una semirrecta derecha cerrada

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

pondríamos en su punto extremo a la marca "[" en vez de "(".

Otro procedimiento para dibujar al conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\}$ en la recta real, es la siguiente:

1er paso) Tomar coordenadas cartesianas ortogonales xOy en el plano.

2do paso) Dibujar la gráfica de la función $y = x^2 - 4$, que en este ejemplo es una parábola con concavidad hacia arriba, porque el coeficiente de x^2 es positivo, ya que es 1. La gráfica de cualquier función real de variable real $y = f(x)$ corta al eje de las x donde $y = 0$. Entonces, en este ejemplo, la parábola corta al eje de las x cuando $y = x^2 - 4 = 0$, o sea $x^2 = 4$, por lo tanto en $x = 2$ ó $x = -2$. En la figura 2 (cuadro inferior) dibujamos esa parábola.

3er paso) El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\}$ es el subconjunto del eje de las x formado por todos los puntos tales que la función $x^2 - 4$ (cuya gráfica es la parábola del 1er paso), en esos puntos, toma valores > 0.

Luego, A es el conjunto de abscisas x tales que la ordenada y del punto correspondiente en la parábola es > 0. Dicho de otra forma, los puntos de A son las abscisas para las cuales la parábola está arriba del eje de las x (o sea, tienen ordenada $y > 0$).

Este conjunto A está pintado con trazo grueso en la figura 2 cuadro inferior (y coincide con el conjunto de la figura 2 cuadro superior). Además: A es el conjunto contenido en el eje de las x, obtenido como la *preimagen* $A = f^{-1}(B)$ por la función cuadrática $y = f(x) = x^2 - 4$, del conjunto de puntos $B = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$ (este conjunto B está contenido en el eje de las y, ver cuadro inferior de la figura 2).

2. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

$$A = \{0, -5, \sqrt{3}, 2, -\sqrt{5}\}, \quad B = (-\infty, -3), \quad C = \{x \in \mathbb{R} : -x^3(x-1)(x+2)^3 < 0\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : -x^3(x-1)(x+2)^3 \leq 0\},$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^3 - 1}{x + 5} \leq 0\}, \quad G = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + 1 < 2x^2\}, \quad H = \{e^{3x} > 1\}.$$

Conjuntos acotados superiormente de reales Un conjunto A de reales se dice que es acotado superiormente, si es no vacío y existe(n) alguna(s) constante(s) real(es) K tal que

$$x \leq K \quad \forall \ x \in A.$$

Las constantes K que cumplen lo anterior, se llaman COTAS SUPERIORES DEL CONJUNTO A.

3. a) Dibujar en la recta real los siguientes conjuntos de reales, y decir si son acotados superiormente o no lo son. En caso que sean acotados superiormente hallar 5 cotas superiores diferentes de cada conjunto. Dibujar esas cotas superiores en la recta real, en el mismo dibujo donde está representado el conjunto respectivo.

$$A = \{1/2, \sqrt{2}, -7, 0\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > -7\}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} : \quad x(x-1) > 0\}.$$

Conjuntos acotados inferiormente de reales Un conjunto A de reales se dice que es acotado inferiormente si es no vacío y si existe(n) alguna(s) constante(s) real(es) K tal que

$$x \geq K \quad \forall \; x \in A.$$

Las constantes K que cumplen lo anterior, se llaman COTAS INFERIORES DEL CONJUNTO A.

b) Considérense los conjuntos de reales A, B o C de la parte a). Decir si son acotados inferiormente o no lo son. En caso que sean acotados inferiormente hallar 5 cotas inferiores diferentes de cada conjunto. Dibujar esas cotas inferiores en la recta real, en el mismo dibujo donde está representado el conjunto respectivo.

Conjuntos acotados de reales Un conjunto A de reales se dice acotado, si es acotado superiormente y es también acotado inferiormente.

c) Decir si cada uno de los conjuntos de reales A, B o C de la parte a) son acotados o no lo son.

4. Sean $a < b$ dos números reales fijos.

a) Definimos **intervalo cerrado acotado** de reales $[a, b]$, con extremo izquierdo a y extremo derecho b, al siguiente conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Dibujar en la recta real el segmento formado por todos los puntos que corresponden a números reales del intervalo cerrado $[a, b]$. Encontrar cuatro cotas superiores diferentes del conjunto $[a, b]$ y cuatro cotas inferiores diferentes. Encontrar la menor de las cotas superiores y la mayor de las cotas inferiores.

Supremo e ínfimo de un conjunto de reales Si A es un conjunto de reales acotado superiormente (tiene cotas superiores), entonces se llama supremo de A a la menor de sus cotas superiores. Si A es un conjunto de reales acotado inferiormente (tiene cotas inferiores), entonces se llama ínfimo de A a la mayor de las cotas inferiores.

b) Definimos **intervalo abierto acotado** de reales (a, b), con extremo izquierdo a y extremo derecho b, al siguiente conjunto:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Dibujar en la recta real el intervalo abierto (a, b). Observar que ninguno de sus extremos pertenece al conjunto (a, b). Encontrar cuatro cotas superiores diferentes del conjunto (a, b) y cuatro cotas inferiores diferentes. Encontrar el supremo y el ínfimo de (a, b).

c) Los siguientes conjuntos de reales **también se llaman intervalos acotados** (en los siguiente ejemplos, no son ni abiertos ni cerrados):

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Dibujar en la recta real los intervalos acotados $[a, b)$ y $(a, b]$. Encontrar cuatro cotas superiores diferentes del conjunto $[a, b)$ que no sean su supremo, y cuatro cotas inferiores diferentes que no sean su ínfimo. Idem para el conjunto $(a, b]$. Encontrar el supremo y el ínfimo de cada uno de esos intervalos acotados.

Máximo (absoluto) y mínimo (absoluto) de un conjunto de reales: Sea A un conjunto de reales acotado superiormente. Se llama máximo (absoluto) del conjunto A, al número real supremo de A *cuando este supremo pertenece al conjunto A.* Importante: si el supremo no es un elemento del conjunto A, entonces el conjunto A NO tiene máximo (absoluto). Es decir:

$$\max A = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ es acot. superiorm.}, \quad x_0 = \sup A, \;\; x_0 \in A;$$

$$\nexists \max A \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ NO es acot. superiorm.} \quad \text{ó} \quad A \text{ es acot. superiorm.}, \quad x_0 = \sup A, \;\; x_0 \notin A.$$

Sea A un conjunto de reales acotado inferiormente. Se llama mínimo (absoluto) del conjunto A, al número real ínfimo de A, *cuando este ínfimo pertenece al conjunto A.* Importante: si el ínfimo no es un elemento del conjunto A, entonces el conjunto A NO tiene mínimo (absoluto). Es decir:

$$\min A = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ es acot. inferiorm.}, \quad x_0 = \inf A, \;\; x_0 \in A;$$

$$\nexists \min A \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ NO es acot. inferiorm.} \quad \text{ó} \quad A \text{ es acot. inferiorm.}, \quad x_0 = \inf A, \;\; x_0 \notin A.$$

Ejemplos:

$$\sup[a,b] = b, \;\; \max[a,b] = b, \;\; \inf[a,b] = a, \;\; \min[a,b] = a,$$
$$\sup(a,b) = b, \;\; \nexists \max(a,b), \;\; \inf(a,b) = a, \;\; \nexists \min(a,b).$$

d) Decir si existen o no existen máximo y mínimo de $(a,b]$ y de $[a,b)$, y en el caso que exista alguno de ellos, decir qué número real es.

e) Se llama **intervalo no acotado** de reales a todo el conjunto de reales, o a una semirrecta. Ejemplos:

La recta real $\mathbb{R}$.

Una semirrecta derecha cerrada: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$.

Una semirrecta izquierda abierta: $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

Una semirrecta derecha abierta: $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.

Una semirrecta izquierda cerrada: $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.

Dibujar en la recta real las cuatro semirrectas dadas anteriormente. En cada una de ellas, decir si es acotada superiormente o no lo es, y en caso que sea acotada superiormente hallar cinco cotas superiores de cada una. Decir si es acotada inferiormente o no lo es, y en caso que sea acotada inferiormente hallar cinco cotas inferiores de cada una. Decir si existe o no existe supremo y en caso que exista encontrarlo. Decir si existe o no existe ínfimo y en caso que exista encontrarlo. Decir si existe o no existe máximo y en caso que exista encontrarlo. Decir si existe o no existe mínimo y en caso que exista encontrarlo.

e) Sean los conjuntos

$$A = \{0, -5, \sqrt{3}, 2, -\sqrt{5}\}, \quad B = (-\infty, -3), \quad C = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x^2 < 4\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) \leq 0\}.$$

Determinar si existen o no existen los siguientes números reales, y en caso que existan encontrarlos:

$$\sup A, \;\; \inf A, \;\; \sup B, \;\; \inf B, \;\; \sup C, \;\; \inf C, \;\; \sup D, \;\; \inf D,$$

$$\max A, \;\; \min A, \;\; \max B, \;\; \min B, \;\; \max C, \;\; \min C, \;\; \max D, \;\; \min D.$$

5. a) Representar en la recta real los siguientes conjuntos de reales:

   a1) $\{3x - 7 < 20\,x + 5\}$. **Notación:** La anterior es una forma abreviada de escribir al siguiente conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : 3x - 7 < 20\,x + 5\}.$$

   a2) $\{1 \leq 2x - 5\}$. a3) $\left\{\dfrac{x-1}{x+1} \leq 0\right\}$. a4) $\{x(x-1)(x-2) \leq 0\}$. a5) $\{(x-6)^2 = 0\}$.

   a8) $\{(x-6)^2 > 0\}$. a9)$\{(x-6)^2 \geq 0\}$. a10) $\{x^2 - 5x + 4 > 0\}$. a11) $\{(x+1)(x^2+2x+1) \leq 0\}$.

   b) Para cada uno de los conjuntos dados en la parte a), determinar si es o no es acotado superiormente, si lo es encontrar su supremo, determinar si existe o no existe máximo, y si existe encontrarlo.

   c) Para cada uno de los conjuntos dados en la parte a), determinar si es o no es acotado inferiormente, si lo es encontrar su ínfimo, determinar si existe o no existe mínimo, y si existe encontrarlo.

6. Sean dados dos números reales $a < b$. Sea el intervalo abierto $(a, b) = \{a < x < b\}$. Sean dados n números reales

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

   y sean dados otros n números reales no nulos

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} : \; y > 0\}.$$

   tales que

$$\frac{x_1}{y_1}, \; \frac{x_2}{y_2}, \; \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n} \; \in \; (a, b).$$

   Demostrar que

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} \; \in \; (a, b).$$

7. **Valor absoluto:** Dado un número real x se llama *valor absoluto de x,* y se denota como $|x|$ al siguiente número real:

$$\text{Si } x = 0, \text{ entonces } |x| = 0;$$

$$\text{si } x > 0, \text{ entonces } |x| = x > 0;$$

$$\text{si } x < 0, \text{ entonces } |x| = -x > 0.$$

   a) Hallar $|\sqrt{2}|$, $\quad |-\sqrt{3}|$, $\quad |(3/7 - 1/2)^{-1} \cdot (4/5 - 1/2)| \cdot \sqrt{2}$.

   b) Probar que $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \;\; \forall \;\; a, b \in \mathbb{R}$,

   $|a|^n = |a^n| \;\; \forall \; a \in \mathbb{R}, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$,

   $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \;\; \forall \; a, b \in \mathbb{R}$ tales que $b \neq 0$. c) Probar que $-|x| \leq x \leq |x| \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}$.

   d) Demostrar la siguiente propiedad, llamada *propiedad triangular del valor absoluto:*

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall \;\; a, b \in \mathbb{R}.$$

   (Sugerencia: Discutir según a, b sean ambos positivos, ambos negativos, o uno positivo y otro negativo.)

   e) Demostrar la siguiente propiedad, llamada *propiedad triangular del valor absoluto para la resta:*

$$|a - b| \geq \Big|\, |a| - |b| \,\Big| \geq |a| - |b| \quad \forall \;\; a, b \in \mathbb{R}.$$

f) Sean $x, a \in \mathbb{R}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^+$. Demostrar que

$$|x-a| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad a-\epsilon < x < a+\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad x \in (a-\epsilon,\ a+\epsilon). \tag{1}$$

$$|x-a| \leq \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad a-\epsilon \leq x \leq a+\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad x \in [a-\epsilon,\ a+\epsilon], \tag{2}$$

g) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Representar en la recta real los dos puntos a y b en los casos $a < b$, $a = b$, $a > b$ e interpretar geométricamente que, cualquiera sea el caso, el valor absoluto $|b-a|$ es igual a la "distancia" entre los puntos a y b sobre la recta (en el sentido usual de la palabra distancia según el diccionario de idioma español).

Distancia entre dos puntos en la recta real: En Matemática, se define *distancia (usual)* en la recta real, entre dos puntos a y b, a

$$\text{dist}(a,b) = |b-a|,$$

donde denotamos con las mismas letras a y b a los números reales correspondientes respectivamente a los puntos dados a y b en la recta real.

f) Demostrar la siguiente propiedad de la distancia, llamada *positividad:*

$$\text{dist}(a,b) \geq 0 \quad \forall \quad a,b \in \mathbb{R}, \qquad \text{y} \quad \text{dist}(a,b) = 0 \text{ si y solo si } a = b.$$

La propiedad de positividad de la distancia, se enuncia también del siguiente modo: *La distancia entre dos puntos a y b es un número real estrictamente positivo si los puntos son diferentes, y es cero si los puntos coinciden.*

g) Demostrar la siguiente propiedad de la distancia, llamada *propiedad simétrica:*

$$\text{dist}(a,b) = \text{dist}(b,a) \quad \forall\ a,b \in \mathbb{R}.$$

La propiedad simétrica de la distancia se enuncia también del siguiente modo: *La distancia del punto a al punto b es igual a la distancia del punto b al punto a.*

h) Demostrar la siguiente propiedad de la distancia, llamada *propiedad triangular:*

$$\text{dist}(a,b) \leq \text{dist}(a,c) + \text{dist}(c,b).$$

Sugerencia: usar la definición de distancia como valor absoluto de la resta de reales, y luego usar la propiedad triangular del valor absoluto, demostrada en la parte d1).

La propiedad triangular de la distancia se enuncia también del siguiente modo: *La distancia entre dos puntos a y b es menor o igual que la distancia del punto a a un tercer punto c, más la distancia de este tercer punto c al punto b.*

8. Graficar en el plano xOy (tomando previamente coordenadas cartesianas con ejes perpendiculares centrados en un punto origen O), las siguientes funciones reales $y = f(x)$ de variable real x:

a) $y = x \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. b) $y = -x \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. c) $y = |x| \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ d) $y = |x-3| \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

e) $y = x^2 + x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. f) $y = |x^2 + x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ (ver sugerencia abajo).

g) $y = -|x^2 + x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, h) $y = |x| + |x^2 + x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Sugerencia para las partes f) g) y h): Partir primero la recta real en diferentes intervalos (segmentos, semirrectas) donde cada una de las funciones dentro de las barras de valor absoluto tienen signo + ó $-$, estudiando el signo de estas funciones con el método del ejercicio 1. Segundo, sustituir el valor absoluto de cada función por la misma función cuando su signo es +, o por la opuesta de la función (cambiarle el signo) cuando su signo es $-$. Tercero, graficar en cada intervalo, la función que se obtuvo en el paso 2. Cuarto, la gráfica pedida se obtiene "pegando"las gráficas obtenidas en el paso 3.

9. a) Representar en la recta real los siguientes conjuntos de números reales:

i) $\{|x-2|<3\}$ **Convención:** Esta notación es una forma abreviada de escribir el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : \ |x-2|<3\}.$$

Sugerencia: usar la afirmación (1).

ii) $\{|2x-3| \geq 7\}$ iii) $\{|x-5|<|x+1|\}$ iv)$\{x^2-5|x|+4>0\}$

v)$\{|x^2+x|>|x+5|\}$ vi) $\left\{ \left| \dfrac{3x+1}{x-2} \right| \ > \ 2x \right\}$.

b) Para cada uno de los conjuntos dados en la parte a) determinar si es acotado superiormente o no lo es, y si es acotado superiormente encontrar su supremo, determinar si existe máximo o no existe, y si existe encontrarlo.

c) Para cada uno de los conjuntos dados en la parte a) determinar si es acotado inferiormente o no lo es, y si es acotado inferiormente encontrar su ínfimo, determinar si existe mínimo o no existe, y si existe encontrarlo.

Caracterización con ϵ del supremo de un conjunto:

Teorema Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío de reales, acotado superiormente. Entonces:

$$S = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad S \geq x \quad \forall x \in A \text{ y además } \forall\, \epsilon > 0\ \exists x \in A \text{ tal que } S-\epsilon < x \leq S.$$

Demostración: 1) Demostremos primero el "$\Rightarrow$": Por hipótesis $S = \sup A$. Entonces por definición de supremo, S es la menor de las cotas superiores del conjunto A. Entonces S es una de las cotas superiores, es decir $S \geq x \ \ \forall\, x \in A$. Además es la menor de las cotas superiores, entonces $S-\epsilon$ no es cota superior del conjunto A (porque $S-\epsilon < S$). Por lo tanto $S-\epsilon$ no cumple la definición de ser cota superior; es decir NO cumple que $x \leq S-\epsilon$ para todo $x \in A$. Esto significa que EXISTE algún $x \in A$ tal que $x > S-\epsilon$, como queríamos demostrar.

2) Ahora demostremos el "$\Leftarrow$": Por hipótesis $S \geq x \ \ \forall\, x \in A$. Entonces, por definición de cota superior, S es una de las cotas superiores del conjunto A. Tenemos que probar que S es la menor de todas las cotas superiores (o sea el supremo).

Tomemos cualquier *cota superior* K del conjunto A. Hay que probar que $S \leq K$. Por absurdo supongamos que $S > K$, y definamos

$$\epsilon = S-K > 0.$$

Por hipótesis, sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que

$$S-\epsilon < x \leq S.$$

Entonces, sustituyendo $\epsilon = S-K$, deducimos que existe $x \in A$ tal que

$$S-(S-K) < x; \qquad K < x$$

Entonces K no es cota superior del conjunto A; absurdo. $\square$

10. a) Interpretar en la recta real con un dibujo el enunciado del teorema de caracterización con ϵ del supremo de un conjunto.

b) **Caracterización con ϵ del ínfimo de un conjunto.** Demostrar el siguiente Teorema:

Teorema. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío de reales que es acotado inferiormente. Entonces:

$$I = \text{ínf}\, A \quad \Leftrightarrow \quad I \leq x\ \forall\, x \in A \text{ y además } \ \forall\, \epsilon\ \exists\, x \in A \text{ tal que } \ I \leq x < I+\epsilon.$$

c) Interpretar en la recta real con un dibujo el enunciado del teorema de caracterización con ϵ del ínfimo de un conjunto.

Funciones reales acotadas superiormente, supremo, máximo (absoluto) de una función: Una función real $y = f(x)$ se dice que es acotada superiormente si su conjunto IMAGEN (o sea, en el eje de las y) es acotado superiormente.

Una constante K se dice que es una cota superior de la función f, cuando K es una cota superior del conjunto imagen de f.

El supremo de f se define como la menor de las cotas superiores de f. Es decir $\sup f = S$ si y solo si S es el supremo del conjunto IMAGEN de f.

El máximo (absoluto) de f, cuando existe, es por definición, el supremo de f, cuando este supremo *pertenece al conjunto imagen.* Es decir, el máximo (absoluto) de f es el máximo (absoluto) del conjunto imagen, cuando existe.

Importante: De las definiciones anteriores, el máximo (absoluto) de una función cuando existe, es ÚNICO.

Cuando existe $\max f = M$, se llama lugar o lugares del máximo al punto o a los puntos x_0 del dominio D de la función tales que $f(x_0) = M$, es decir a los puntos del dominio donde la función alcanza el máximo.

11. a) Sea una función real $y = f(x)$, $\;x \in D$ con dominio D. Probar que f es acotada superiormente si y solo si existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \leq K \quad \forall\, x \in D.$$

Convención importante: Cuando una función real de variable real está dada por una fórmula y no se especifica explícitamente cuál es el dominio D ni cuál es el codominio C, se adopta la siguiente convención:

1) El codominio C es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los reales.

2) El dominio D es el mayor subconjunto de reales donde la fórmula se puede aplicar. Por ejemplo, la función dada por la fórmula $\log x$ (cuando no se especifica explícitamente un dominio), por convención tiene dominio $D = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0\}$.

b) Croquizar las gráficas en el plano xOy de las siguientes funciones y pintar (en el eje de las y) el conjunto imagen de cada una.

i) $y = \operatorname{sen} x$ ii) $y = e^x$ iii) $y = -e^x$ iv) $y = -|x|$ v) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

vi) $y = x \log x$ en el dominio $D = (0, 1]$. v) $y = \begin{cases} x & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < -1 \text{ ó } x \geq 1. \end{cases}$

c) Determinar si cada una de las funciones dadas en la parte b) es o no es acotada superiormente. Si es acotada superiormente, hallar 3 cotas superiores diferentes de cada una y el supremo de cada una. Determinar si cada una de ellas tiene máximo (absoluto) o no lo tiene. Si tiene máximo (absoluto) tiene hallarlo y hallar el lugar o lugares donde se alcanza el máximo (absoluto).

d) Definir función acotada inferiormente, ínfimo y mínimo absoluto de una función.

e) Determinar si cada una de las funciones dadas en la parte b) es acotada inferiormente o no lo es. Si es acotada inferiormente hallar el ínfimo y determinar si existe mínimo (absoluto) o no existe. Si existe mínimo (absoluto) hallarlo, y hallar el lugar o los lugares donde se alcanza el mínimo (absoluto).

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 6
Topología en la recta real.

Recordar los siguientes temas del práctico anterior:
• La definición y propiedades del valor absoluto $|x|$ de un número real x.
• La definición y propiedades de la distancia (usual) $\text{dist}(x,y) = |y-x|$ en la recta real, entre dos puntos x, y.
• La definición de intervalos acotados $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ en la recta real y de intervalos no acotados (toda la recta ó semirrectas).

1. Sean dos reales $a, \epsilon \in \mathbb{R}$ fijos, tales que $\epsilon > 0$. Probar las siguientes igualdades entre conjuntos de reales:

$$(a-\epsilon, a+\epsilon) = \{|x-a| < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : \ \ \text{dist}(x,a) < \epsilon\}.$$

Definición de entorno abierto, bola abierta, vecindad abierta, ó intervalo abierto de centro a **y radio** $\epsilon > 0$ (todos son sinónimos):

Es por definición, el siguiente intervalo abierto acotado de reales

$$E_\epsilon(a) = (a-\epsilon, a+\epsilon) = \{|x-a| < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : \ \ \text{dist}(x,a) < \epsilon\}.$$

Por definición, tenemos que $E_\epsilon(a)$ es el conjunto de todos los puntos de la recta que distan del punto a menos que ϵ. Por ejemplo $E_{10}(\sqrt{2})$ es el conjunto de puntos de la recta que están a distancia menor que 10 (por ejemplo en centímetros) del punto que tiene abscisa $\sqrt{2}$ (hacia su izquierda o hacia su derecha). Observar que

$$\sqrt{2} \in E_{10}(\sqrt{2}),$$

porque $\text{dist}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 0 < 10$.

2. a) Pintar en la recta real la vecindad $E_{10}(\sqrt{2})$. Para un a real cualquiera fijo, y para un $\epsilon > 0$ cualquiera fijo, pintar en la recta real la vecindad $E_\epsilon(a)$.

   b) Demostrar que si $x_0 \in E_\epsilon(a)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $E_\delta(x_0) \subset E_\epsilon(a)$.

   Sugerencia: Primero probar que $x_0 \neq a-\epsilon$, $\ x_0 \neq a+\epsilon$. Después elegir $\delta = \min\{\text{dist}(x_0, a+\epsilon), \ \text{dist}(x_0, a-\epsilon)$. Luego probar que $\delta > 0$. Finalmente, probar que ese valor de δ satisface la tesis del teorema.

Conjunto abierto de reales es un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ que, o bien es vacío, o bien para todo $x_0 \in A$ existe un radio $\delta > 0$ tal que el entorno o vecindad $E_\delta(x_0)$ de centro x_0 y radio δ está CONTENIDO en el conjunto A.

3. a) Demostrar que $E_\epsilon(a)$ es un conjunto abierto. Sugerencia: usar la parte b) del ejercicio anterior.

   b) Demostrar que $\mathbb{R}$ es abierto.

   c) Demostrar que las semirrectas $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ son conjuntos abiertos.

   d) Demostrar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ es un conjunto abierto.

   e) Demostrar que $\mathbb{Q}$ no es un conjunto abierto. Sugerencia. Usar, sin demostrar, la siguiente propiedad de densidad de los racionales y densidad de los irracionales: entre dos números reales diferentes siempre existen infinitos números reales racionales e infinitos números reales irracionales)

   f) Demostrar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es un conjunto abierto.

Conjunto cerrado de reales es un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que su complemento $\mathbb{R} \setminus A$ es un conjunto abierto.

4. a) Demostrar que $\mathbb{R}$ es abierto y cerrado a la vez.

   b) Demostrar que $\emptyset$ es abierto y cerrado a la vez.

   c) Sean dos reales $a < b$. Demostrar que el intervalo $[a, b]$ es cerrado y que el intervalo $[a, b)$ no es ni abierto ni cerrado.

   d) Demostrar que la semirrecta $(-\infty, 4]$ es cerrada, y demostrar que $(-\infty, 4] \setminus \{-1\}$ no es ni abierta ni cerrada.

   e) Demostrar que el conjunto $[-1, 0) \bigcup (0, 7]$ no es ni abierto ni cerrado, y que el conjunto $[-1, 0) \bigcup [0, 7]$ es cerrado.

   f) Demostrar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es ni abierto ni cerrado.

5. Sean $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ conjuntos abiertos.

   a) Probar que $A_1 \cup A_2$ es abierto. Sugerencia: Dado cualquier punto $x \in A_1 \cup A_2$ hay que probar que existe $\delta > 0$ tal que $E_\delta(x_0) \subset A_1 \cup A_2$. Como $x \in A_1 \cup A_2$, entonces $x \in A_1$ ó $x \in A_2$. 1er. caso: si $x \in A_1$, como por hipótesis A_1 es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $E_\delta(x_0) \subset A_1 \subset A_1 \cap A_2$, como queríamos demostrar. Análogamente probar el 2do. caso: cuando $x \in A_2$.

   b) Probar que $A_1 \cap A_2$ es abierto.

   c) Sean B_1, B_2 conjuntos cerrados de reales. Probar que $B_1 \cap B_2$ y que $B_1 \cup B_2$ son conjuntos cerrados. (Sugerencia: usar la definición de conjunto cerrado de reales, las leyes de De Morgan y las partes a) y b) de este ejercicio.)

Conjunto compacto de reales es un conjunto de reales, cerrado y acotado.

6. Sean dos números reales $a < b$.

   a) Explicar por qué el intervalo $[a, b]$ es compacto, el intervalo $[a, b)$ no es compacto, y la semirrecta $[b, +\infty)$ no es compacta.

   b) Dar ejemplos de conjuntos compactos no vacíos de reales que no sean intervalos.

   c) Dar un ejemplo de conjunto compacto no vacío de reales que no contenga ningún intervalo abierto.

Interior de un conjunto A de reales. Sea A un conjunto no vacío de reales. Sea $x_0 \in A$. Se dice que x_0 es un punto "interior " al conjunto A si existe un entorno $E_\delta(x_0) \subset A$.

Observar que todos los puntos interiores pertenecen al conjunto A, pero que no todos los puntos pertenecientes a A son necesariamente interiores.Por ejemplo, si $A = [1, 4]$, cualquier punto x_0 real, que sea mayor que 1 y menor que 4, es interior a A, pero el punto 1 (que también pertenece al conjunto A) NO es un punto interior a A.

Se llama "conjunto interior de A", y se denota como $\text{int}(A)$ al conjunto formado por todos los puntos interiores a A.

Se puede demostrar las siguientes propiedades importantes:

$\text{int}(A) \subset A$, $\text{int}(A)$ *es un conjunto abierto, e* $\text{int}(A)$ *es el mayor conjunto abierto contenido en* A.

Puede suceder que el interior de A sea vacío aunque A no sea vacío. Por ejemplo si $A = \{3, \sqrt{7}\}$ su interior es vacío.

Otro ejemplo:

$$\text{int}(\{0 \leq x \leq 2,\ x \neq 1\}) = (0, 1) \cup (1, 2).$$

Adherencia o clausura de un conjunto A de reales. Sea A un conjunto no vacío de reales. Sea un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ (no necesariamente perteneciente a A). El punto x_0 se llama "punto de la adherencia o de la clausura del conjunto A" si todo entorno $E_\delta(a)$ intersecta al conjunto A.

Por ejemplo si el conjunto $A = (1, 4]$ y si $x_0 \in A$ entonces x_0 es un punto de la adherencia o clausura de A. Pero también el punto $x_0 = 1$, que no pertenece a A es un punto de la adherencia o clausura de A. Observar entonces que un punto de la clausura o adherencia de A no tiene necesariamente que pertenecer a A.

Se llama "conjunto clausura o adherencia de A", al conjunto formado por todos los puntos en la adherencia o clausura de A. Este conjunto clausura o adherencia de A se denota como $\overline{A}$.

Se pueden probar las siguientes propiedades importantes:

$\overline{A}$ es siempre un conjunto cerrado, $\overline{A} \supset A$, y $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene al conjunto A.

Por ejemplo:

$$\overline{\{0 \leq x \leq 2,\ x \neq 1\}} = [0, 2].$$

Otro ejemplo. Si $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x = 1/n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+\}$, entonces $\overline{A} = \{0\} \cup A$.

Frontera o borde de un conjunto A de reales. Sea A un conjunto no vacío de reales. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto cualquiera (no necesariamente perteneciente al conjunto A). El punto x_0 se llama "punto frontera o punto borde" del conjunto A, si en todo entorno del punto x_0 existen puntos del conjunto A y puntos del conjunto complemento de A.

Por ejemplo: si $A = (0, 1) \cup (1, 4]$, los puntos del interior de A que son los del conjunto $\operatorname{int}(A) = (0, 1) \cup (1, 4)$, no son puntos frontera de A porque por definición existe un entorno de cada uno de esos puntos totalmente contenido en A (entonces ese entorno no puede intersectar al complemento de A). El punto $x_0 = 4$ es punto frontera de A. Los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, que NO pertenecen a A también son puntos frontera de A.

Se llama "conjunto borde o frontera del conjunto A", y se denota como ∂A, al conjunto de todos los puntos borde o frontera de A.

Por ejemplo:

$$\partial(\{0 \leq x \leq 2,\ x \neq 1\}) = \{0, 1, 2\}.$$

Observar que no todos los puntos borde o frontera tienen necesariamente que pertenecer al conjunto A. Algunos puntos frontera pueden pertenecer a A y otros no.

Se puede demostrar la siguiente propiedad importante:

Los puntos frontera o borde de A son los que están en la clausura de A y no están en el interior de A. Es decir

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A).$$

Exterior de un conjunto A de reales. Sea A un conjunto no vacío de reales que no es toda la recta real. Sea $x_0 \notin A$ (es decir x_0 es un punto del conjunto $A^c = M \setminus A$, complemento de A). El punto x_0 se llama "exterior al conjunto A"si es punto interior al complemento de A, es decir, existe un entorno $E_\delta(x_0) \subset A^c$.

Se llama "conjunto exterior de A", y se denota como $\operatorname{ext}(A)$ al conjunto de todos los puntos exteriores a A. O sea:

$$\operatorname{ext}(A) = \operatorname{int}(A^c).$$

Se puede demostrar las siguientes propiedades importantes:

El conjunto exterior de A es el complemento de la clausura o adherencia de A. Es decir:

$$\operatorname{ext}(A) = \mathbb{R} \setminus \overline{A}.$$

El conjunto exterior de A es abierto, no intersecta a A, y es el mayor abierto que no intersecta a A.

Por ejemplo:

$$\operatorname{ext}(\{0 \leq x \leq 2,\ x \neq 1\}) = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$$

Observar que ningún punto exterior pertenece a A, pero que no todos los puntos del complemento de A son necesariamente exteriores. En el ejemplo anterior el punto $x = 1$ está en el complemento de A pero no es exterior a A.

7. Para los siguientes conjuntos A de reales, encontrar el interior $\operatorname{int}(A)$, la clausura o adherencia $\overline{A}$, el borde o frontera ∂A, y el exterior $\operatorname{ext}(A)$.

   a) $\{-5\}$ b) $(-1, 5]$ c) $(-\infty, \sqrt{2}]$ d) $(-1, 5] \cup (8, +\infty)$ e) $(-1, 5) \cup [8, 9]$ f) $\{1 < x \leq 5,\ x \neq 2\}$

   g) $\mathbb{N}$ h) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ i) $\mathbb{Q}$ j) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ k) $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}^+\}$

   Sugerencias. Justificar los siguientes resultados, siguiendo al pie de la letra las definiciones respectivas:

   g) $\operatorname{int}(\mathbb{N}) = \emptyset$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\operatorname{ext}(\mathbb{N}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

   i) $\operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\operatorname{ext}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

   k)$\operatorname{int}(\{1/n : \ n \in \mathbb{N}^+\}) = \emptyset$, $\overline{\{1/n : \ n \in \mathbb{N}^+\}} = \{0\} \cup \{1/n : \ n \in \mathbb{N}^+\}$,

   $\partial\{1/n : \ n \in \mathbb{N}^+\} = \{0\} \cup \{1/n : \ n \in \mathbb{N}^+\}$,

   $\operatorname{ext}(\{1/n : \ n \in \mathbb{N}^+\}) = (-\infty, 0) \cup \{x \in (0, 1) : \ x \neq 1/n \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+\} \cup (1, +\infty)$.

8. Para los siguientes conjuntos encontrar el interior, la clausura o adeherencia, el conjunto borde o frontera y el exterior.

   a) $\bigcup_{n=0}^{+\infty}(n, n+1) = \{x \in \mathbb{R} : \ n < x < n+1 \text{ para algún natural } n \in \mathbb{N}\}$

   Nota: El conjunto dado en la parte a) está denotado con el primer símbolo $\bigcup_{n=0}^{+\infty}(n, n+1)$. Pero este símbolo es solo una *notación* para indicar el conjunto definido a la derecha del mismo.

   b) $\bigcap_{n=1}^{+\infty}[0, 1/n) = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leq x < 1/n \ \ \text{ para todo natural } \ n \geq 1.$

   Nota: El conjunto dado en la parte b) está denotado con el primer símbolo $\bigcap_{n=1}^{+\infty}[0, 1/n)$. Pero este símbolo es solo una *notación* para indicar el conjunto definido a la derecha del mismo.

9. Justificar por qué son ciertas las siguientes propiedades, hacer un esquema de ellas y recordarlas:

   a) $\partial A = \partial(\mathbb{R} \setminus A)$

   b) A es abierto si y solo si $A = \operatorname{int}(A)$.

   c) A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

   d) $\operatorname{int}(A) \cup \partial A = \overline{A}$

   e) $\operatorname{int}(A) \cup \partial A \cup \operatorname{ext}(A) = \mathbb{R}$.

   f) A es cerrado si y solo si $\partial A \subset A$

   g) A es abierto si y solo si ningún punto borde pertenece a A.

   h) A es cerrado y abierto si y solo si $\partial A = \emptyset$.

   i) A no es ni cerrado ni abierto si existen puntos borde que pertenecen a A y existen también puntos borde que no pertenecen a A.

Punto de acumulación o punto de aglomeración de un conjunto A es un punto x_0 (*que pertenece o que no pertenece a* A), tal que en todo entorno $E_\epsilon(x_0)$ centrado en x_0 (cualquiera sea el radio $\epsilon > 0$), existe algún punto $x \in A$ que es *diferente* de x_0.

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se denota como A'.

Punto aislado de un conjunto A es un punto $x_0 \in A$ tal que existe algún entorno $E_\epsilon(x_0)$ centrado en x_0 (para algún radio $\epsilon > 0$) tal que x_0 es el único punto del conjunto A en ese entorno. Es decir $\{x_0\} = E_\epsilon(x_0) \cap A$.

10. a) Para cada uno de los conjuntos A dados en el ejercicio 7 determinar el conjunto A' de puntos de acumulación, el conjunto de puntos aislados y el conjunto borde o frontera ∂A.

    b) En cada uno de esos ejemplos encontrar, si existen, todos los puntos de acumulación que no son puntos frontera, y todos los puntos frontera que no son puntos de acumulación.

    c) En cada uno de esos ejemplos encontrar, si existen, todos los puntos frontera que no son puntos aislados.

    d) Demostrar, para cualquier conjunto A, que todo punto aislado (si existe alguno) es punto frontera.

    e) Demostrar, para cualquier conjunto A, que A es cerrado si y solo si $A' \subset A$.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 6 Complemento
Temas: Recta real (Orden, completitud y topología)

Este práctico es optativo, para hacer a lo largo de todo el año, solamente quien guste y tenga tiempo suficiente.

1. **Caracterización con ϵ del supremo de una función.** Demostrar el siguiente teorema:

   Teorema: Sea la función real $y = f(x)$ definida en el dominio D. Se sabe que la función f es acotada superiormente. Entonces:

   $$S = \sup f \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq S \ \forall\ x \in D \text{ y además } \ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ x \in D \text{ tal que } S - \epsilon < x \leq S.$$

2. Enunciar y demostrar un teorema de caracterización con ϵ del ínfimo de una función real.

3. Sean $f, g : D \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones acotadas (superiormente e inferiormente).

   a) Probar que la suma $f + g$ es una función acotada (superiormente e inferiormente).

   b) Probar que $\sup(f + g) \leq (\sup f) + (\sup g)$.

   c) Probar que $\inf(f + g) \geq (\inf f) + (\inf g)$.

   d) Probar que si $f = g$ entonces $\sup(f + g) = (\sup f) + (\sup g)$.

   e) Probar que si $f = g$ entonces $\inf(f + g) = (\inf f) + (\inf g)$.

   f) Encontrar un ejemplo de dos funciones $f, g : D \mapsto \mathbb{R}^+$ acotadas tales que $\sup(f+g) < (\sup f)+(\sup g)$.

   g) Encontrar un ejemplo de dos funciones $f, g : D \mapsto \mathbb{R}^+$ acotadas tales que $\inf(f + g) > (\inf f) + (\inf g)$.

4. Sean $f, g : D \mapsto \mathbb{R}^+$ dos funciones positivas y acotadas.

   a) Probar que el producto $f \cdot g$ es una función acotada (superiormente e inferiormente).

   b) Probar que $\sup(f \cdot g) \leq (\sup f) \cdot (\sup g)$.

   c) Probar que $\inf(f \cdot g) \geq (\inf f) \cdot (\inf g)$.

   d) Probar que si $f = g$ entonces $\sup(f \cdot g) = (\sup f) \cdot (\sup g)$.

   e) Probar que si $f = g$ entonces $\inf(f \cdot g) = (\inf f) \cdot (\inf g)$.

   f) Encontrar un ejemplo de dos funciones $f, g : D \mapsto \mathbb{R}^+$ positivas y acotadas tales que $\sup(f \cdot g) < (\sup f) \cdot (\sup g)$.

   g) Encontrar un ejemplo de dos funciones $f, g : D \mapsto \mathbb{R}^+$ positivas y acotadas tales que $\inf(f \cdot g) > (\inf f) \cdot (\inf g)$.

   h) Encontrar un ejemplo de dos funciones $f, g : D \mapsto \mathbb{R}^+$ acotadas tales que

   $$\sup(f \cdot g) > (\sup f) \cdot (\sup g).$$

5. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ conjuntos abiertos de reales. Se define el siguiente conjunto A, llamado unión de todos los (infinitos) conjuntos A_n:

   $$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \in A_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+\}.$$

Se define el siguiente conjunto B, llamado intersección de todos los (infinitos) conjuntos A_n:

$$B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \in A_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^+\}.$$

a) Probar que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ es abierto.

b) Dar un contraejemplo de infinitos conjuntos abiertos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ de reales, tales que la intersección $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ no sea un conjunto abierto. (Sugerencia: construir infinitos intervalos abiertos de reales de modo que la intersección de todos sea el conjunto formado por un solo punto)

6. Sean $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ conjuntos cerrados de reales. a) Probar que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n$ es cerrado (Sugerencia: usar la definición de cerrado, las leyes de De Morgan y la parte a) del ejercicio anterior).

   b) Dar un contraejemplo de infinitos conjuntos cerrados $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ de reales, tales que la unión $\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$ no sea un conjunto cerrado.

7. Dar un ejemplo de conjunto compacto K de reales que no contenga ningún intervalo abierto y que no contenga ningún punto aislado. (Sugerencia: buscar, por ejemplo en wikipedia, la construcción del conjunto compacto llamado "conjunto de Cantor del tercio mitad").

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 7
Números complejos

Antes de hacer los siguientes ejercicios leer lo siguiente del libro .^nálisis Matemático I"de F. Paganini, Re-edición del IMERL 2014 (está en la bibliografía de la página web eva.fing de este curso):

Desde la página 14 donde dice "Número complejo: definición y operaciones", hasta la página 15, donde dice "$i^2 = -1$"; y desde la página 18 donde dice "Representación gráfica" hasta la página 21 donde dice "Propiedades del módulo" excluido.

1. Representar gráficamente mediante puntos en el plano complejo, los siguientes números complejos; decir en qué cuadrante están (cuadrantes I, II, III ó IV), y calcular el módulo y el argumento de cada uno. (Ver más abajo las relaciones entre notaciones binómica y en polares, y la tabla de funciones trigonométricas.)

   a) $1+i$ b) $-1+i$ c) $-1-i$ d) $1-i$

   e) $2+\sqrt{3}\,i$ f) $-2+\sqrt{3}\,i$ g) $-2-\sqrt{3}\,i$ h) $2-\sqrt{3}\,i$

   i) $\sqrt{3}+2i$ j) $-\sqrt{3}+2i$ k) $\sqrt{3}-2i$ l) $\sqrt{3}-2i$

   m) $5\,i$ n) $-5\,i$ p) 5 q) -5.

RELACIONES ENTRE NOTACIONES BINÓMICA Y EN POLARES

complejo notación binómica		$z = a + bi \neq 0$	complejo notación en polares	$\lvert z\rvert = \rho, \arg(z)$
p. real	p. imag.	cuadrante	módulo: $\lvert z\rvert = \rho$	argumento: $\arg(z)$
$a = \rho\cos\varphi$	$b = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$	cualquier cuadrante	$\rho = +\sqrt{a^2+b^2} > 0$	$\varphi + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$
$a > 0$	$b > 0$	cuadrante I	$\rho = +\sqrt{a^2+b^2} > 0$	$0 < \varphi < \pi/2$ $\varphi = \arctan(b/a)$
$a < 0$	$b > 0$	cuadrante II	$\rho = +\sqrt{a^2+b^2} > 0$	$\pi/2 < \varphi < \pi$ $\varphi = \pi + \arctan(b/a)$
$a < 0$	$b < 0$	cuadrante III	$\rho = +\sqrt{a^2+b^2} > 0$	$\pi < \varphi < 3\pi/2$ $\varphi = \pi + \arctan(b/a)$
$a > 0$	$b < 0$	cuadrante IV	$\rho = +\sqrt{a^2+b^2} > 0$	$-\pi/2 < \varphi < 0$ $\varphi = \arctan(b/a)$
$a = 0$	$b > 0$	borde de los cuadrantes I y II	$\rho = +\sqrt{a^2+b^2} > 0$	$\varphi = \pi/2$
$a < 0$	$b = 0$	borde de los cuadrantes II y III	$\rho = +\sqrt{a^2+b^2} > 0$	$\varphi = \pi$
$a = 0$	$b < 0$	borde de los cuadrantes III y IV	$\rho = +\sqrt{a^2+b^2} > 0$	$\varphi = 3\pi/2$
$a > 0$	$b = 0$	borde de los cuadrantes IV y I	$\rho = +\sqrt{a^2+b^2} > 0$	$\varphi = 0$

TABLA DE VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

φ	$\cos\varphi$	$\operatorname{sen}\varphi$	$\tan\varphi = \operatorname{sen}\varphi/\cos\varphi$
0	$1 = \sqrt{4}/2$	$0 = \sqrt{0}/2$	$0/1 = 0$
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2 = \sqrt{1}/2$	$(1/2)/(\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$(\sqrt{2}/2)/(\sqrt{2}/2) = 1$
$\pi/3$	$1/2 = \sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$	$(\sqrt{3}/2)/(1/2) = \sqrt{3}$
$\pi/2$	$0 = \sqrt{0}/2$	$1 = \sqrt{4}/2$	$1/0 \;\nexists\; \sim$ "∞"

Reglas mnemotécnicas que permitan reconstruir de memoria la tabla anterior, sin necesitar de mirarla cada vez:

1) La primera columna, de abajo hacia arriba tiene los ángulos φ que son π divido el denominador en forma creciente 2; 3; 4; 6 e ∞, respectivamente (con la convención $\pi/\infty \sim 0$).

2) La segunda columna, de abajo hacia arriba tiene los valores de $\cos\varphi$, que son $\sqrt{n}/2$ donde n está dado en forma creciente $0, 1, 2, 3$ y 4 respectivamente.

3) La tercera columna tiene los valores de $\operatorname{sen}\varphi$, y es igual a la segunda columna, pero invertida (en vez de construirla de abajo hacia arriba como la segunda columna, construimos la tercera columna de arriba hacia abajo).

4) La cuarta columna tiene los valores de $\tan\varphi = \operatorname{sen}\varphi/\cos\varphi$, son los cocientes de los valores de la tercera columna divididos los valores respectivos de la segunda columna.

5) Si quisiéramos podríamos agregar una quinta columna con los valores de la cotangente $\cot\varphi = \cos\varphi/\operatorname{sen}\varphi = (\tan\varphi)^{-1}$: es la de los valores a^{-1}, donde a son los valores respectivos de la cuarta columna.

2. Demostrar las siguientes igualdades:

   a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ b) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$ c) $\overline{zw} = (\overline{z})(\overline{w})$ d) Si $w \neq 0$: $\bar{(}z/w) = (\overline{z})/(\overline{w})$

   e) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ f) $z - \overline{z} = 2\,i\operatorname{Im}(z)$ g) $\overline{\overline{z}} = z$ h) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ i) Si $w \neq 0$: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$

3. Para cualquier número real φ, se define

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi.$$

   a) Probar que si $\rho \in \mathbb{R}^+$ entonces para todo complejo $z \neq 0$ se cumple:

$$|z| = \rho, \quad \arg(z) = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad z = \rho \cdot e^{i\varphi}.$$

Expresión en polares de un complejo no nulo usando la función exponencial compleja: Usando lo probado en la parte a) de este ejercicio, de ahora en adelante, cada vez que queramos expresar el complejo $z \neq 0$ en polares, escribiremos

$$z = \rho\, e^{i\varphi},$$

donde $\rho = |z|$ es el módulo de z y $\varphi = \arg(z)$ es el argumento de z en radianes.

b) Expresar en polares usando la exponencial compleja cada uno de los números complejos del ejerc. 1.

4. Expresar en forma binómica cada uno de los siguiente números complejos:

   a) $(1+3i)+(7-4i)$ b) $(1+3i)-(7-4i)$ c) $\overline{(1+3i)}+(7-4i)$

   d) $(1+3i)\cdot(7-4i)$ e) $\dfrac{1+3i}{7-4i}$ f) $\dfrac{\overline{1+3i}}{7-4i}$ g) $(7-4i)^2$ h) $\dfrac{1+3i}{(7-4i)^2}$

5. Expresar en polares, usando la exponencial compleja, cada uno de los números complejos del ejercicio anterior.

   Antes de hacer el siguiente ejercicio estudiar del libro "Análisis Matemático I"de F. Paganini (edición 2014 del IMERL) lo siguiente:

   Las figuras 1.7, 1.8 y 1.9 de las páginas 25 y 26.

6. a) Probar con argumentos gráficos la siguiente regla del paralelogramo:

   Si z y w son dos complejos cualesquiera en el plano complejo, entonces el complejo suma $z+w$ se representa en el plano complejo como el cuarto vértice de un paralelogramo que tiene tres de sus vértices en 0, z y w.

   b) Usar la regla del paralelogramo para representar en el plano complejo, sin calcularlo, al siguiente número complejo:

   $$(2-\sqrt{3}\,i)+(-1-i).$$

   c) Probar con argumentos gráficos la siguiente regla del módulo de la resta de complejos:

   Si z y w son dos complejos cualesquiera en el plano complejo, entonces $|z-w|$ es la distancia usual entre los puntos z y w del plano. (Nota: la distancia usual entre dos puntos del plano, es la longitud del segmento de recta que los une).

   d) Usar la regla de la parte c) para estimar gráficamente, midiendo la distancia con una regla, el siguiente número real:

   $$\rho=|(2-\sqrt{3}\,i)-(1+i)|.$$

   Calcular analíticamente el valor del real ρ y compararlo con el resultado obtenido en la estimación gráfica. (Nota: para obtener el valor numérico final del cálculo analítico de ρ, se necesitará usar una calculadora científica).

7. a) Probar analíticamente las siguientes reglas (I) y (II) del producto y del cociente de complejos en polares:

   (I) Si z y w son complejos no nulos, entonces el producto zw tiene módulo igual al producto de los módulos, y tiene argumento igual a la suma de los argumentos. Es decir:

   $$|zw|=|z|\cdot|w|,\qquad \arg(zw)=\arg(z)+\arg(w).$$

   (Sugerencia: usar la tabla de fórmulas trigonométricas que está abajo)

   (II) Si z y w son complejos no nulos, entonces el cociente z/w tiene módulo igual al cociente de los módulos, y tiene argumento igual a la resta de los argumentos. Es decir:

   $$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|},\qquad \arg(zw)=\arg(z)-\arg(w)$$

   b) Representar en el plano los siguientes complejos, mediante sus expresiones polares, sin calcular sus expresiones binómicas:

   i) $z=2-\sqrt{3}\,i$, ii) $w=i$, ii) $v=1+i$ iv) zw v) z/w vi) vz
   vii) z/v viii) z^2 ix) z^3 x) z^5 (Nota: En las partes iv) hasta la x) los complejos z, v y w son los dados en las partes i), ii) y iii) respectivamente.

TABLA DE FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Nota: De las tres fórmulas (1), (2), (3) salen haciendo cuentas más o menos sencillas toda la enorme cantidad de fórmulas trigonométricas complicadas que hay en los manuales.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A & = 1 \\
(2'') & \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A & = \cos(2A) \\
(2') & \cos A \cos A - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} A & = \cos(A + A) \\
(2) & \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B & = \cos(A + B) \\
(3) & \cos A \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A \cos B & = \operatorname{sen}(A + B) \\
(3') & 2 \cos A \operatorname{sen} A & = \operatorname{sen}(2A)
\end{array}$$

Reglas mnemotécnicas para poder escribir de memoria la tabla anterior, sin necesidad de mirarla todas las veces:

1) La fórmula (1) es la popular fórmula que debe recordarse siempre.

2) La fórmula (2") llamada del "COSENO DEL ÁNGULO DOBLE"puede recordarse fácilmente porque se obtiene de la (1) cambiando el signo de $+$ por $-$ e igualando $\cos(2A)$ en vez de igualar a 1.

La fórmula (2') es la misma que la (2")

La fórmula (2) llamada del "COSENO DE LA SUMA" es como la (2'), pero en vez de repetirse A, una vez se pone A y la otra B.

3) La fórmula (3) llamada del "SENO DE LA SUMA" es como la (2) pero en vez de repetir $\cos \cos$ y repetir $\operatorname{sen} \operatorname{sen}$ en la resta, se pone $\cos \operatorname{sen}$ y se suma, cuidando que ambos sumandos queden diferentes.

La fórmula (3') llamada del "SENO DEL ÁNGULO DOBLE"se obtiene de (3) poniendo $A = B$.

8. a) Sea la función $F : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por la fórmula

$$F(z) = z + (3 + 4i) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Probar que en el plano complejo, F es la traslación de vector $(3, 4)$. Es decir F lleva el punto z del plano complejo, al punto $w = F(z)$ que se obtiene trasladando el punto z 3 unidades de longitud hacia la derecha y 4 unidades de longitud hacia arriba.

b) Sea la función $G : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por la fórmula

$$G(z) = i \cdot z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Probar que en el plano complejo, G es la rotación de centro en el origen y ángulo $\pi/2$ en sentido antihorario. Es decir G lleva el punto z del plano complejo, al punto $w = G(z)$ que se obtiene girando el punto z alrededor del origen en sentido antihorario un ángulo de 90 grados $= \pi/2$ radianes.

c) Encontrar la fórmula $H(z)$ con $H : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ de modo que H en el plano complejo sea una rotación alrededor del punto $2 + i$ en sentido horario y ángulo igual a 60 grados $= \pi/3$ radianes.

9. Sea una partícula cargada que se mueve en un plano. En cada instante $t \in \mathbb{R}$, medido en microsegundos, la posición $z(t)$ de la partícula está medida con sus coordenadas cartesianas en nano-metros; donde 1 nano-metro es por definición 10^{-9} metros. Esta posición $z(t)$ es el punto del plano representado por el complejo siguiente:

$$z(t) = 2 + 3e^{4it}.$$

a) Representar gráficamente en el plano, el recorrido de la partícula cargada al transcurrir el tiempo. (Este recorrido, se llama "órbita").

b) Encontrar cuánto tiempo $T > 0$ (en microsegundos) debe transcurrir como mínimo para que la partícula cargada vuelva a la misma posición que tenía inicialmente. (Este tiempo T se llama "período" de la órbita)

c) Encontrar con qué frecuencia la partícula cargada vuelve a estar en el mismo punto que tenía incialmente. Dar el resultado de la frecuencia en mega-Hertz. (Nota: la frecuencia medida en Hertz es por definición la cantidad de veces por segundo de retorna al mismo punto. Es decir: 1 Hertz = 1 vez por segundo. Además se define: 1 mega-Hertz = 1 millón de Hertz = 10^6 Hertz.)

10. La tensión de una línea de transmisión eléctrica trifásica de 220 voltios y 50 Hertz (como la que suministra la UTE), se representa por medio de tres vectores (tres flechas) en el plano complejo. Cada uno de estos tres vectores tiene origen (extremo inicial) en el complejo $z_0 = 0$, y extremo final (punta de la flecha) en los siguientes tres complejos z_1, z_2, z_3 que dependen del instante t en segundos cuando se efectúa la medición:

$$z_1(t) = (220)e^{i\Big((2\pi)50\, t\Big)}, \quad z_2(t) = (220)e^{i\Big((2\pi)50\, t + 2\pi/3\Big)}, \quad z_3(t) = (220)e^{i\Big((2\pi)50\, t + 4\pi/3\Big)}.$$

Cada vector de esa representación se llama "fase" (de la línea trifásica).

a) Representar en el plano complejo las tres fases de la línea trifásica en los siguientes instantes t:

0 segundo, 5 milisegundos, 10 milisegundos, 15 milisegundos y 20 milisegundos (Nota: para poder aplicar las fórmulas de $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$ cada instante t debe estar medido en segundos, y 1 milisegundo = 1 segundo/1000 = 10^{-3} segundos.)

11. Dado un complejo $z \neq 0$ se llaman raíz cuadrada compleja de z (y se representa como $\sqrt{z}$) a los DOS complejos w tales que

$$w^2 = z$$

a) Hallar los dos complejos $\sqrt{i}$ expresados en forma binómica y en forma polar.

b) Hallar los dos complejos $\sqrt{-9}$ expresados en forma binómica y en forma polar.

c) Hallar los dos complejos $\sqrt{3-4i}$ expresados solamente en forma binómica.

12. Antes de hacer este siguiente ejercicio, buscar en el libro "Análisis Matemático I"de F. Paganini (edición 2014 del IMERL), y estudiar lo siguiente:

Desde la página 26 donde dice "Potencias enteras y raíces" hasta la página 28 donde dice "Logaritmo complejo" excluido.

a) Encontrar las expresiones polares de las 5 raíces quintas complejas siguientes, y representarlas en el plano complejo verificando que forman un pentágono regular (polígono regular de 5 lados).

i) $\sqrt[5]{i}$, ii) $\sqrt[5]{-1+i}$

b) Encontrar las expresiones polares de las 4 raíces cuartas complejas $\sqrt[4]{i}$, y representarlas en el plano complejo verificando que forman un cuadrado (polígono regular de 4 lados).

c) Sea el complejo $z = (3-4i)^6$. Hallar las seis raíces sextas complejas de z, expresados en coordenadas polares y expresados también en forma binómica (coordenadas cartesianas). Dibujar los afijos en el plano complejo de las seis raíces sextas complejas de z verificando que forman un hexágono regular.

Sugerencia: Una raíz sexta compleja de z es $w_1 = 3-4i$. Las otras se obtienen de esa girando el punto que corresponde a w_1 alrededor del origen un ángulo $\pi/3$, sucesivas veces (5 veces). El correspondiente de un punto cualquiera $w \neq 0$ por un giro G de ángulo $\pi/3$ alrededor del origen en sentido antihorario, se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$G(w) = u \cdot w \quad \forall\, w \in \mathbb{C},$$

donde u es el complejo con módulo 1 y argumento $\pi/3$. Luego

$$u = e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(\pi/3) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces las seis raíces complejas de z son

$$w_1, \quad w_2 = G(w_1) = u \cdot w_1, \quad w_3 = G(w_2) = u \cdot w_2,$$

$$w_4 = G(w_3) = u \cdot w_3, \quad w_5 = G(w_4) = u \cdot w_4, \quad w_6 = G(w_5) = u \cdot w_4.$$

Estas fórmulas permiten calcular las coordenadas polares y las expresión binómica de las seis raíces complejas de z. Como verificación tiene que cumplirse que $G(w_6) = u \cdot w_6 = w_1$, pues $G(w_6)$ es el resultado que se obtiene de haber aplicado al punto w_1, 6 veces consecutivas la rotación de centro en el origen y ángulo $\pi/3$ radiantes (60 grados) en sentido antihorario.

d) Hallar las tres raíces cúbicas del complejo z dado en la parte c), y dibujar sus afijos en el plano complejo verificando que forman un triángulo equilátero.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 8
Reglas para cálculo de límites de funciones reales dadas con fórmulas.

Se recuerda que una función real $y = f(x)$ de variable real x dada por una fórmula, es un caso muy restringido y muy particular de función real de variable real. En este práctico repasaremos las reglas de cálculo de límites de funciones reales dadas por fórmulas, y aunque estas reglas deberían conocerse desde el liceo, las exposiciones teóricas que se incluyen en este repartido revisan esas reglas desde el inicio. La definición matemática precisa de límite y el estudio de los límites para funciones con discontinuidades, se verá en la segunda mitad del curso. No asumimos en este práctico que se conoce o se recuerda la definición matemática de límite. Solo revisaremos aquí las reglas para el cálculo de límites de manera operativa.

Convención: Cuando se da una función real $y = f(x)$ de variable real, mediante una fórmula, (por ejemplo $y = \log x$), y no se dice cuál es el dominio ni el codominio, se interpreta lo siguiente:

- El codominio es todo el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
- El dominio D es el mayor conjunto de reales donde la fórmula se puede aplicar y tiene sentido.
- Si se dan explícitamente el dominio y/o el codominio, entonces *las reglas anteriores no rigen.*

Función exponencial (con base el número irracional e llamado número de Euler $e = 2,74...$): Es la función $y = e^x$. Como no se explicita codominio, este es todo $\mathbb{R}$. Como no se explicita dominio, y la fórmula e^x se puede aplicar para todo $x \in \mathbb{R}$, por convención el dominio de $y = e^x$ es $\mathbb{R}$.

La gráfica en el plano $x0y$ de la función $y = e^x$ es la de la Figura 1. Se observa que su gráfica es una curva continua (en el sentido usual en idioma castellano de las palabras "curva" y "continua").

Las siguientes propiedades deben recordarse

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^x > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 1 \text{ si } x > 0, \quad 0 < e^x < 1 \text{ si } x < 1, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to a} e^x = e^a \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

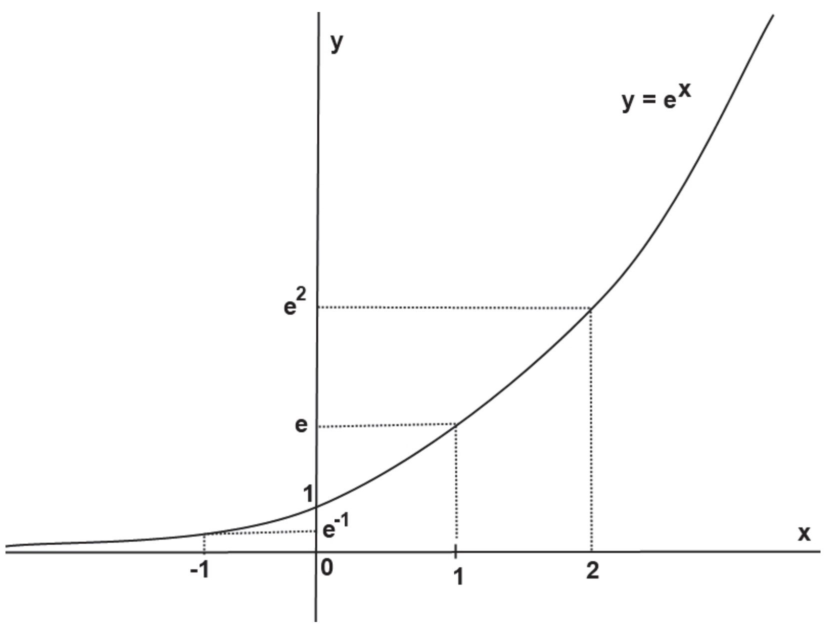

Figura 1: Gráfica de la función exponencial con base e.

1. *a*) Interpretar en la curva gráfica de $y = e^x$ el significado de las propiedades dadas en todas las igualdades (1) y (2).

   b) Graficar las siguientes funciones: $y = e^x + 7$, $y = e^x - 7$, $y = e^{x-7}$, $y = e^{x+7}$, $y = e^{-x}$, $y = 8e^{-x}$, $y = -e^x$, $y = -8e^x$, $y = 8e^{-x+7}$.

   c) Explicar, a partir de las curvas gráficas respectivas, por qué son verdaderas las siguientes igualdades:
   $\lim_{x\to-\infty} e^x + 7 = 7$, $\lim_{x\to+\infty} 8e^{-x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} 8e^{-x} = +\infty$,
   $\lim_{x\to-\infty} -e^x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} -e^x = -\infty$.

   d) Probar a partir de su curva gráfica que la función $y = e^x$ es inyectiva pero no es sobreyectiva.

   e) Considerar la función $y = e^x$ con codominio en la semirrecta abierta $(0, +\infty)$. Probar a partir de su curva gráfica que es invertible.

   f) **Función logaritmo** Se llama logaritmo neperiano y se denota $x = \log y$ a la función inversa de la "función exponencial $y = e^x$ en el codominio $(0, +\infty)$", dada en la parte d).
   (i) Explicar por qué el dominio de la función dada por la fórmula $y = \log x$ es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ de todos los reales positivos.
   (ii) Dibujar la gráfica en el plano $x0y$ de la función $y = \log x$. (Ver Figura 2.)

   g) Explicar, a partir de la curva gráfica de la función logaritmo $y = \log x$, las siguientes propiedades:

$$\log 1 = 0, \quad \log e = 1, \quad \log(e^\alpha) = \alpha, \quad \log x < 0 \text{ si } 0 < x < 1, \quad \log x > 0 \text{ si } x > 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \log x = -\infty, \quad \lim_{x\to a} \log x = \log a \text{ si } a > 0.$$

   Nota: Todas las propiedades de la función logaritmo en esta parte g), deben recordarse.

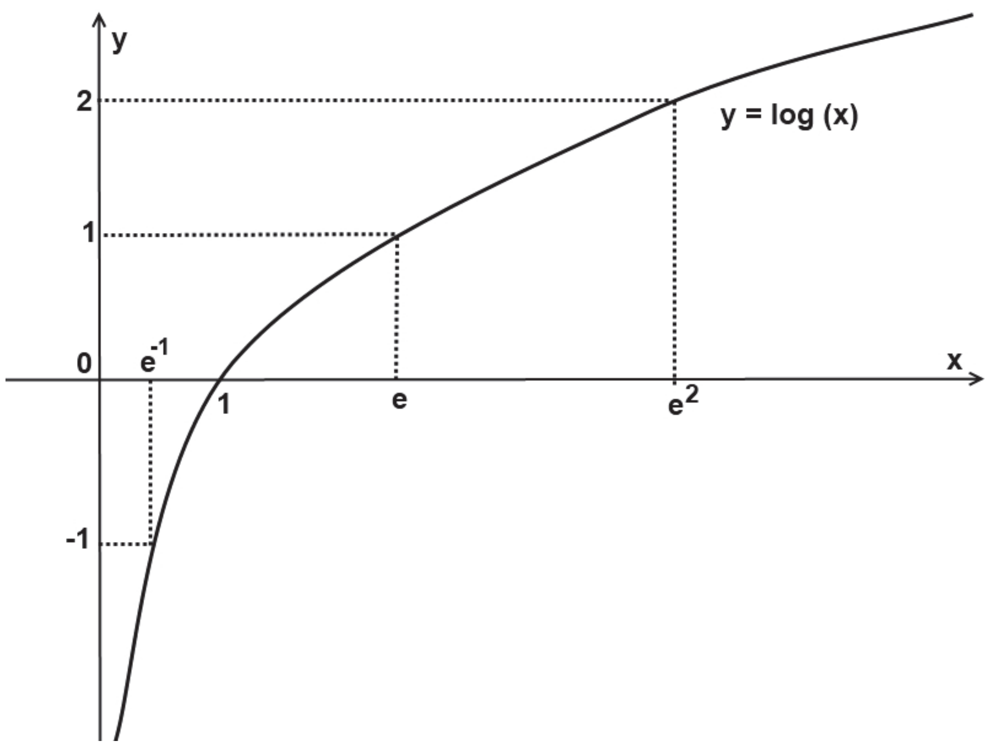

Figura 2: Gráfica de la función logaritmo neperiano.

2. Sea dan las siguientes funciones

$$\textbf{Función constante: } \; y = k \text{ constante real } \; \forall\, x \in \mathbb{R},$$

$$\textbf{Función lineal: } \; y = \lambda x + \mu, \quad \text{donde } \lambda, \mu \text{ son constantes reales dadas.}$$

$$\textbf{Otras funciones: (i)} y = x^2, \quad \textbf{(ii)} y = x^2 - 5, \quad \textbf{(iii)} y = (x+5)^2, \quad \textbf{(iv)} y = \sqrt{x},$$

$$\textbf{(v)} y = \sqrt{x-2}, \quad \textbf{(vi)} \sqrt{x} - 2, \quad \textbf{(vii)} y = 3\sqrt{x-2}$$

$$\textbf{(viii)} y = \operatorname{sen} x, \quad \textbf{(ix)} y = \cos x, \quad \textbf{(x)} y = \operatorname{sen}(x + \pi/6), \quad \textbf{(xi)} y = 4 \operatorname{sen}(x + \pi/6),$$

$$\textbf{(xii)} y = \operatorname{sen} x \;\; \forall\, x \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ en el codominio } [-1,1],$$

$$\textbf{(xiii)} y = \cos x \;\; \forall x \in [0, \pi] \text{ en el codominio } [-1,1],$$

$$\textbf{(xiv)} y = \operatorname{arc\,sen} x \text{ (ver notas abajo)}, \quad \textbf{(xv)} y = \arccos x \text{ (ver notas abajo)},$$

$$\textbf{(xvi)} y = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \textbf{(xvii)} y = \tan(x) \;\; \forall\, x \in (-\pi/2, \pi/2),$$

$$\textbf{(xviii)} y = \arctan(x) \text{ (ver notas abajo).}$$

Notas sobre las funciones Arcoseno, Arcocoseno y Arcotangente:

- La fórmula $\operatorname{arc\,sen}(y)$ denota la función inversa de $y = \operatorname{sen} x \;\; \forall\, x \in [-\pi/2, \pi/2]$ en el codominio $[-1, 1]$.
- La fórmula $\arccos(y)$ denota la función inversa de $y = \cos x \;\; \forall\, x \in [0, \pi]$ en el codominio $[-1, 1]$.
- La fórmula $\arctan(y)$ denota la función inversa de $y = \tan(x) : (-\pi/2, \pi/2) \mapsto \mathbb{R}$.

a) Determinar dominio D y codominio C de la función constante, de la función lineal, y de cada una de las funciones (i) hasta (xviii).

b) Dibujar la gráfica en el plano $x0y$ de cada una de esas funciones, discutiendo en el caso de la función lineal según el signo de las constantes λ y μ. (Las gráficas se pueden hacer, si se desea, usando programas de computadora. En el sitio web eva de este curso, en la ventana "Programas Interactivos", se incluye enlace a un recurso on line para graficar algunas funciones.)

Determinar el conjunto imagen de cada una de las funciones.

c) A partir de las curvas gráficas de las funciones respectivas, deducir las siguientes igualdades:

$$\lim_{x \to a} k = k \;\; \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} k = k, \quad \lim_{x \to -\infty} k = k,$$

$$\lim_{x \to a} \lambda x = \lambda a \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} \lambda x = +\infty \text{ si la constante } \lambda > 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \lambda x = -\infty \text{ si la constante } \lambda < 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \lambda x = 0 \text{ si la constante } \lambda = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \lambda x = -\infty \text{ si la constante } \lambda > 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \lambda x = +\infty \text{ si la constante } \lambda < 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \lambda x = 0 \text{ si la constante } \lambda = 0,$$

$$\lim_{x \to a} x^2 = a^2 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty,$$

$$\lim_{x \to a} x^3 = a^3 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad \forall\, a \geq 0 \text{ real}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty, , \quad \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \quad \forall\ a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x \quad \nexists,$$

$$\lim_{x\to \pi/2} \operatorname{sen} x = 1, \qquad \lim_{x\to -\pi/2} \operatorname{sen} x = -1,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arc\,sen} x = \pi/2, \qquad \lim_{x\to -1^+} \operatorname{arc\,sen} x = -\pi/2$$

$$\lim_{x\to a} \operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{arc\,sen} a \quad \forall\ a \in (-1,1), \qquad \lim_{x\to a} \arctan x = \arctan a \quad \forall\ a \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

Nota: $x \to a^-$ indica que x solo se puede acercar a a por valores menores que 1, es decir por la izquierda de a en el eje de las abscisas x. Análogamente $x \to a^+$ indica que x solo se puede acercar a a por valores mayores que a, es decir por la derecha de a en el eje de las abscisas x.

3. **Tablas de operaciones con límites**

   a) Estudiar, recordar y copiar en el cuaderno las reglas de las Tablas (I), (II), (III).

   Nota importante: En las tablas aparece la abreviatura "Indet." (se lee "indeterminado"). Significa sólamente que no hay una regla general en ese renglón para poner en la tabla de manera que valga para funciones cualesquiera. Pero el límite en sí mismo, normalmente EXISTE, ES DETERMINADO Y SE PUEDE CALCULAR (se dice "levantar la indeterminación" de la tabla). Para calcular el límite la tabla no es suficiente: habrá que usar procedimientos especiales diversos, en general un procedimiento diferente para cada ejemplo particular (que depende de la función dada cuyo límite se pretende calcular).

Tabla (I): Límite de la suma de funciones reales $f(x) + g(x)$

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \big(f(x) + g(x)\big)$
$\alpha \in \mathbb{R}$	$\beta \in \mathbb{R}$	$\alpha + \beta$
$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\alpha \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Indet. tipo "$+\infty - \infty$".

Tabla (II): Límite del producto de funciones reales $f(x) \cdot g(x)$

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \big(f(x) \cdot g(x)\big)$
$\alpha \in \mathbb{R}$	$\beta \in \mathbb{R}$	$\alpha \cdot \beta$
$\alpha > 0$ real, ó $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\alpha < 0$ real, ó $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha > 0$ real, ó $+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\alpha < 0$ real, ó $-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	Indet. tipo "$0 \cdot \infty$"

Tabla (III): Límite del cociente de funciones reales $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \Big(f(x)/g(x)\Big)$
$\alpha \in \mathbb{R}$	$\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$	α/β
$\alpha > 0$ real	0^+	$+\infty$
$\alpha < 0$ real	0^+	$-\infty$
$\alpha > 0$ real	0^-	$-\infty$
$\alpha < 0$ real	0^-	$+\infty$
$\alpha \neq 0$ real	0	∞
$\alpha \in \mathbb{R}$	∞	0
0	0	Indet. tipo "0/0 "
∞	∞	Indet. tipo "∞/∞ "

b) Buscar ejemplos de límites de funciones de todos los casos que son determinados en las tablas (I), (II) y (III). Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty,$$

porque $x^2+3 \to 1+3=4$, entonces $\alpha = 4 > 0$, y $x-1 \to 0^+$ cuando $x \to 1^+$ y $x-1 \to 0^-$ cuando $x \to 1^-$.

4. **Cómo levantar algunas indeterminaciones de límites de funciones racionales**:

Leer y entender del libro "Conceptos básicos de Matemática"(ver bibliografía del curso), desde la página 61 hasta la página 66, donde dice Ejercicio 11 (excluido).

Responder las siguientes preguntas sobre el texto leído en el libro:

a) ¿Cómo se prueba que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = -1$?

b) ¿Cuánto es $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2-x^3}{x^2+x^4}$?

c) ¿Cómo se prueba que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-2x+1} = \infty$?

d) ¿Cuánto es $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-2x^2-x+2}$?

e) ¿Cómo se prueba que $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+4x+3} = 0$?

f) ¿Cuánto dan $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x^2+4x+1}$ y $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^2+4x+1}$?

g) ¿Cómo se prueba que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-1} = \infty$?

h) ¿Cómo se prueba que $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{3x}{x+1} - \frac{-3}{x+1} = 3$?

i) ¿Cómo se prueba que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2 - x = +\infty$?

j) ¿Cómo se prueba que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} = +\infty$?

k) ¿Cómo se prueba que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+6x^2-x+8}{x^2+5x-1} = +\infty$?

l) ¿Cuánto es $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+2x^2-2x+1}{2x^3-4x}$?

m) ¿Cómo se prueba que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+3}{2x^2+x} = 0$?

n) ¿Cuánto es $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}\,x^3+2x^2+\sqrt{3}\,x}{2x^3-4x+1}$?

5. *a*) Sea $n \in \mathbb{N}^+$ y $a \in \mathbb{R}$. Probar que

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{(x-a)} = na^{n-1}$$

Sugerencia: Primer probar (por ejemplo bajando por Ruffini) la siguiente identidad

$$x^n-a^n = (x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-3}x^2+a^{n-2}x+a^{n-1}).$$

b) Sean $n, m \in \mathbb{N}^+$. Sea

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

un polinomio en x de grado n con primer coeficiente $a_n > 0$. Por ejemplo $P_n(x) = 2x^3-4x^2+1$, es un polinomio en x de grado 3, con primer coeficiente $a_3 = 2$ positivo. Sea

$$Q_m(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0$$

un polinomio en x de grado m con primer coeficiente $b_m > 0$. Probar las siguientes afirmaciones:

(i) Si $n > m$ entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = +\infty$$

(ii) Si $n = m$ entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n}{b_m}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n}{b_m}.$$

(iii) Si $n < m$ entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0.$$

(iv) Si $n > m$ y ambos son impares o ambos pares, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = +\infty$$

(v) Si $n > m$, uno par y el otro impar, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = -\infty$$

c) Calcular

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^9+2x^8-\sqrt{7}\,x^5+x^2+x-1}{4x^5+x^3+x^2+\sqrt{5}\,x}$$

6. **Límites de funciones con radicales**

Leer y estudiar del libro "Conceptos básicos de Matemática"(ver bibliografía del curso), desde página 69 Ejemplo 3.2.1 hasta página 70, ejercicio 70 incluido. Responder las siguientes preguntas sobre el texto leído:

a) ¿Cuál es el dominio de las funciones dadas por las siguientes fórmulas:?

$$\sqrt{\frac{2x-4}{x+1}},\quad \sqrt{\frac{x}{x-1}},\quad \sqrt{\frac{-3x+1}{6x+2}},\quad \sqrt{\frac{x^2+x-2}{x+1}},\qquad \sqrt[3]{\frac{x^2+x-2}{x+1}}$$

b) ¿Cómo se prueba que $\lim\limits_{x\to -1^-}\sqrt{\dfrac{2x-4}{x+1}}=+\infty$

c) ¿Cómo se prueba que $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\sqrt{\dfrac{2x-4}{x+1}}=\sqrt{2}$.

d) ¿Cuánto dan los siguientes límites?

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}},\qquad \lim_{x\to(1/3)^-}\sqrt{\frac{-3x+1}{6x+2}},\qquad \lim_{x\to-1^-}\sqrt{\frac{x^2+x-2}{x+1}},\qquad \lim_{x\to-1^+}\sqrt[3]{\frac{x^2+x-2}{x+1}}.$$

e) **Diferencia de radicales** Leer y entender la siguiente exposición, y hacer resumen en la carpeta de lo esencial de la misma:

Tenemos dos funciones $f(x)\geq 0$ y $g(x)\geq 0$ tales que

$$\lim f(x)=\lim g(x)=+\infty.$$

Queremos calcular el límite de una expresión del tipo:

$$\lim\,(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)})\cdot h(x).$$

La diferencia de radicales $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ da una indeterminación $+\infty-\infty$ (pues ambos radicales tienden a $+\infty$).

Para hacer desaparecer la diferencia de radicales, y lograr levantar la indeterminación del límite, podemos aplicar el siguiente método (que funciona en muchos ejemplos, pero NO en todos los casos):

$$(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)})\cdot h(x)=\frac{(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)})\cdot(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)})}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}\cdot h(x)=$$

$$=\frac{(\sqrt{f(x)})^2-(\sqrt{g(x)})^2}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)})}\cdot h(x)=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}\cdot h(x).$$

Ahora aparece la suma de radicales en el denominador que tiende a $+\infty$. En el numerador sigue habiendo una indeterminación $+\infty-\infty$, pero ahora este numerador no tiene radicales. Entonces, podemos intentar aplicar los procedimientos vistos antes, para levantar la indeterminación $+\infty-\infty$ del numerador (que ahora ya no tiene radicales).

f) Calcular los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{3x^2-x+4}\right)\cdot(3x+5)$,

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{3x^2-x+4}$, (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^3+1}\;-\;\sqrt{x^4+x^2+1}}{x}$.

7. **Límites de funciones con exponenciales y logaritmos**

Leer y estudiar del libro "Conceptos básicos de Matemática"(ver bibliografía del curso), desde página 71 donde dice "Función exponencial", hasta página 73, ejercicio 15 excluido, y desde página 74 donde dice "Función logarítmica", hasta página 75, ejercicio 16 excluido. Responder las siguientes preguntas sobre el texto leído:

a) ¿Cuál es el dominio de las funciones dadas por las siguientes fórmulas?

$$e^{(2x-4)/(x+1)}, \qquad \log\frac{x}{x-1}, \qquad \log\left|\frac{x^2+x-2}{x+1}\right|.$$

b) ¿Cómo se prueba que $\lim_{x\to -1^-} e^{(2x-4)/(x+1)} = +\infty$?

c) ¿Cómo se prueba que $\lim_{x\to 2} e^{(2x-4)/(x+1)} = 1$?

d) ¿Cómo se prueba que $\lim_{x\to -1^+} e^{(2x-4)/(x+1)} = 0$?

e) ¿Cómo se prueba que $\lim_{x\to +\infty} e^{(2x-4)/(x+1)} = e^2$?

f) ¿Cuánto dan los siguientes límites?

$$\lim_{x\to+\infty}\log\frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to-\infty}\log\frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to 2}\log\frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1^+}\log\frac{x}{x-1}.$$

g) ¿Cuánto dan los siguientes límites?

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left|\frac{x^2+x-2}{x+1}\right|, \quad \lim_{x\to 2}\log\left|\frac{x^2+x-2}{x+1}\right|, \quad \lim_{x\to -1}\log\left|\frac{x^2+x-2}{x+1}\right|, \quad \lim_{x\to 0}\log\left|\frac{x^2+x-2}{x+1}\right|.$$

8. *a*) Estudiar y recordar la siguiente tabla de propiedades de las funciones exponencial y logarítmica

e^{a+b}	$=$	$e^a\cdot e^b$	$\log a+\log b$	$=$	$\log(a\cdot b)$
e^{a-b}	$=$	$\frac{e^a}{e^b}$	$\log a-\log b$	$=$	$\log\frac{a}{b}$
$(e^a)^b$	$=$	$e^{b\cdot a}$	$\log(a^\alpha)$	$=$	$\alpha\log a$
e^{-a}	$=$	$\frac{1}{e^a}$	$\frac{\log a}{\alpha}$	$=$	$\log a^{1/\alpha}=\log\sqrt[\alpha]{a}$
$\sqrt[b]{e^a}$	$=$	$(e^a)^{1/b} = e^{a/b}$			

b) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\cdot e^{x^3}, \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}\cdot e^{x^3}, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{x^2}\cdot e^{-x^3}, \quad \lim_{x\to 2} e^{-x^2}\cdot e^{x^3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\log x^2)\cdot(\log x^3), \quad \lim_{x\to 0^+}(\log x^2)\cdot(\log x^3),$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\log x^2-\log x^3), \quad \lim_{x\to+\infty}(-\log x^2+\log x^3), \quad \lim_{x\to e}(-\log x^2+\log x^3).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^3+3x}\right)^{x^2}.$$

Sugerencia para el último límite: escribir $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\log f(x)}$.

9. **Límites tipo:**

   a) Leer, entender y copiar en la carpeta lo esencial de la siguiente exposición teórica:

   • Sabemos que
   $$\lim_{f(x)\to 0}(e^{f(x)}-1)=0.$$

   • Decimos que
   $$\left(e^{f(x)}-1\right)\sim f(x)$$
   (aquí el símbolo $\sim$ se lee "*equivalente a*",) porque vale la siguiente propiedad:
   $$\lim_{f(x)\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1.$$

   • Dada otra función $g(x)$, se cumple:
   $$\lim_{f(x)\to 0}\left(e^{f(x)}-1\right)\cdot g(x)=\lim_{f(x)\to 0}f(x)\cdot g(x).$$

   • En general:
   Teorema: Para calcular el límite de *un producto* o *de un cociente* de funciones, se puede sustituir una de ellas por su límite tipo equivalente.

   ¡Ojo! Precaución 1: Esta propiedad de sustituir una función por su tipo equivalente, no vale cuando en el límite aparecen otras operaciones que no sean el producto o cociente de funciones. Por ejemplo si en el límite aparece la suma de funciones $\left(e^{f(x)}-1\right)+g(x)$ cuando $f(x)\to 0$, no vale sustituir $\left(e^{f(x)}-1\right)$ por su tipo equivalente $f(x)$.

   ¡Ojo! Precaución 2: La sustitución por su límite tipo equivalente, según la tabla siguiente, vale cuando $f(x)\to 0$.

   b) Leer, copiar en la carpeta y recordar la siguiente tabla de límites tipo:

$e^{f(x)}-1$	$\sim$	$f(x)$	cuando $f(x)\to 0$
$\log(1+f(x))$	$\sim$	$f(x)$	cuando $f(x)\to 0$
$\operatorname{sen}(f(x))$	$\sim$	$f(x)$	cuando $f(x)\to 0$
$1-\cos(f(x))$	$\sim$	$\dfrac{(f(x))^2}{2}$	cuando $f(x)\to 0$
$\tan(f(x))$	$\sim$	$f(x)$	cuando $f(x)\to 0$

c) Calcular los siguientes límites

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{(x-1)^2}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\sqrt{|x-1|}},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} x)}{4x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen}^2 x)}{4x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+|\operatorname{sen} x|^{1/2})}{4|x|}$$

d) Sea $a \in \mathbb{R}$. Calcular el siguiente límite discutiendo según el valor de a: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^a}$.

e) Calcular los siguientes límites: (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{3x^4}$, (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

Sugerencia para calcular el último límite: primero escribir el logaritmo de la siguiente forma: $\log\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\, \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Después escribir la función dentro del logaritmo así: $\dfrac{1+x}{1-x} = 1 + \left(-1+\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 1 + \dfrac{2x}{1-x}$. Finalmente observar que $2x/(1-x) \to 0$ cuando $x \to 0$ y usar el límite tipo de $\log(1+f(x))$ cuando $f(x) \to 0$.

10. **Teorema del Sandwich** Sean tres funciones tales que: $f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall\, x \in D$.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ entonces $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Dicho coloquialmente: ***Si los panes tienen el mismo límite, entonces el jamón también.***

Nota: En la notación anterior la letra a y/o la letra L pueden ser números reales, o pueden ser $+\infty$ o $-\infty$.

a) Calcular $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.
Sugerencia: $\nexists \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$, pero $-1 \le \operatorname{sen}(1/x) \le 1 \ \ \forall\, x \ne 0$. Luego $-x^2 \le x^2 \operatorname{sen}(1/x) \le x^2$.

b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2\cos^2 x + (4+\operatorname{sen}^3 x^{1/2})x + 5}{x^4}$.

c) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \arctan(x^2+5)+7}{x}$.

d) Usando el teorema del sandwich, demostrar el siguiente corolario:
Propiedad importante: $\lim F(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim |F(x)| = 0$.
Sugerencia: Para demostrar el $\Rightarrow$ usar que la función $V(u) = |u|$ es continua. La continuidad de V por definición, es la siguiente propiedad: $\lim_{u\to a} V(u) = V(a) \ \ \forall\, a \in$ Dominio de V.
Para demostrar el $\Leftarrow$ recordar que $-|F(x)| \le F(x) \le |F(x)|$ y usar el teorema del sandwich.

e) Calcular $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} |x|^5)/x^3$.

f) Usando el teorema del sandwich demostrar el siguiente corolario:
Propiedad importante: ***Si*** $F(x)$ ***es una función acotada y si*** $\lim G(x) = 0$***, entonces el límite del producto*** $F(x) \cdot G(x)$ ***es cero.***
Sugerencia para demostrar este corolario: Una función $F(x)$ es acotada, por definición, si su conjunto imagen es un conjunto acotado. Luego, existen cotas superior K e inferior k respectivamente, tales que

$$k \le F(x) \le K \quad \forall\, x \in \text{Dominio de } F.$$

Multiplicar estas dos desigualdades por $|G(x)|$ y aplicar el Teorema del Sandwich.

g) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{1/3} \operatorname{sen}(1/x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{\alpha} \operatorname{sen}(1/x)$, donde $\alpha > 0$ es una constante real positiva.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 9
Continuidad y derivación de funciones reales de una variable real.
Desarrollo de Taylor y de Mac Laurin.

1. **Función continua en un punto de su dominio** Una función real $f(x)$ con dominio $D \subset \mathbb{R}$ es *continua* en el punto $a \in D$ cuando
$$\lim_{x \to a,\ \ x \in D} = f(a).$$
Es decir el valor de la función en el punto $a \in D$ es igual al límite de $f(x)$ cuando $x \to a$.

Nota: Para calcular el límite de $f(x)$ solo se consideran los puntos $x \in D$. Por ejemplo: si $D = [a, b]$, para saber si f es continua en el punto a solo calculamos el límite de $f(x)$ cuando $x \to a^+$.

La función se dice *discontinua* en el punto a *de su dominio* si no es continua en a. Es decir, si $a \in \text{Dom.}(f)$, la función f es discontinua cuando sucede alguna de las siguientes dos condiciones:

- $\nexists \lim_{x \to a,\ x \in D} f(x)$ ó
- $\exists \lim_{x \to a,\ x \in D} f(x) = L$ pero $L \neq f(a)$.

Función continua $f : D \mapsto \mathbb{R}$ se dice *continua* (a secas, sin ningún adjetivo ni complemento), cuando es continua en todos los puntos de su dominio.

a) Determinar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$. y encontrar todos los puntos del dominio donde es continua.

b) Idem para $f(x) = |x - 7|$.

c) Dado un número real x se define parte entera de x, y de denota como ent.(x) al único número entero n (positivo, negativo o nulo) tal que
$$n \leq x < n + 1.$$
Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \text{ent}(x)$ con dominio $\mathbb{R}$. Encontrar todos los puntos del dominio donde f es continua.

d) Dibujar la gráfica de $f(x) = 1/x$ y probar que es una función continua.

e) Encontrar $\alpha = f(0)$ para que la siguiente función sea continua:
$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x) \text{ si } x \neq 0, \qquad f(0) = \alpha.$$
Nota: En breve, lo que se pide hacer en esta parte del ejercicio, se redacta usualmente así: "Asignar un valor de $f(0)$ para que la siguiente función sea continua:
$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$".

f) Asignar un valor de $f(0)$ para que la siguiente función sea continua:
$f(x) = (e^x - e^{-x})/x$ si $x \neq 0$.

g) Asignar un valor de $f(0)$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$:
$f(x) = \sqrt{2}\,(\tan(x/2))/x$ si $-\pi/2 < x < \pi/2$ y $x \neq 0$.

2. a) Entontrar el dominio D de cada una de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = \dfrac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1}$, (ii) $f(x) = \dfrac{e^{x-1} - 1}{(x-1)^2}$, (iii) $f(x) = \dfrac{e^{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

b) Para cada una de las funciones dadas en la parte a), probar que no se puede asignar valor a $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus D$ tal que $f(x)$ sea continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. **Derivada de una función en un punto**

Estudiar y entender, del libro "Conceptos básicos de matemática" (ver bibliografía del curso), desde la página 81 donde dice "Derivada puntual" hasta el final de la página 82. Responder las siguientes preguntas

a) Por definición, ¿cuándo una función $f(x)$ es derivable en un punto a de su dominio?

b) Si una función es derivable en un punto a de su dominio ¿qué es la derivada $f'(a)$ de la función en el punto a?

c) **Límite del cociente incremental**

Se llama "incremento de f" a la diferencia $\Delta f = f(x) - f(a)$. Se llama "incremento de x" a la diferencia $\Delta x = x - a$. Chequear que la definición de derivada $f'(a)$, expuesta en la Definición 3.4.1 de la página 81 del texto leído, es el "límite del cociente incremental"(esto es, cociente de los incrementos $\Delta f / \Delta x$) cuando $\Delta x \to 0$. Es decir:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

d) Sean $a \neq x$ dos puntos diferentes en un intervalo de reales contenido en el dominio de f. Llamamos "cuerda" al segmento de recta con extremos en los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$. ¿Qué representación gráfica tiene la cuerda en el plano $x0y$, en relación con la gráfica de f? (Responder con un dibujo, señalando cuál es la gráfica de f y cuál es la cuerda).

e) Justificar la siguiente fórmula para calcular la pendiente de la cuerda (Ver sugerencia abajo):

$$\text{Pendiente de la cuerda } = \tan \varphi_c = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Sugerencia: Recordar que "pendiente" de una recta c o de un segmento de recta en el plano $x0y$, es la tangente $\tan \varphi_c$ del ángulo φ_c que forma esa recta c o segmento de recta, con una recta paralela al eje de las abscisas x. Se asigna signo positivo al ángulo $\varphi_c > 0$ (y por lo tanto la pendiente $\tan \varphi_c > 0$) cuando la recta "sube" al aumentar la abscisa x, y signo negativo $\varphi_c < 0$ (y por lo tanto $\tan \varphi_c < 0$) si "baja".

f) Dibujar en el plano $x0y$ algunas de las sucesivas cuerdas c cuando $x \to a$ (con el punto $(a, f(a))$ fijo). definir "recta tangente" t a la que pasa por el punto $(a, f(a))$ y tiene dirección "límite"de las direcciones de las sucesivas cuerdas c cuando $x \to a$. ¿Cuál es la recta tangente t en el dibujo?.

g) Justificar gráficamente la siguiente fórmula que permite calcular la pendiente $\tan \varphi_t$ de la recta tangente t a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = a, y = f(a)$:

$$\text{Pendiente de la recta tangente} = \tan \varphi_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(a).$$

h) **Fórmula de la recta tangente**

Recordar que la ecuación de una recta que pasa por el punto $p = (x_p, y_p)$ y tiene pendiente λ es

$$y = y_p + \lambda(x - x_p).$$

Justificar la siguiente fórmula de la recta tangente t a la curva gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a).$$

(Todas las fórmulas de este ejercicio deben recordarse)

i) Sea $f = x^2 + 2x + 1$. Dibujar la curva gráfica de f (Nota: es una parábola con vértice en el punto $(-1, 0)$).
Sea $a = 1,\ b = 2$. Encontrar la ecuación de la cuerda con extremos en $(a, f(a))$ y en $(b, f(b))$ y dibujar esta cuerda junto con el dibujo de la gráfica de f.
Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva gráfica de f por el punto $(a, f(a))$ y agregar esta recta en el dibujo anterior.

4. **Derivación y continuidad**

a) ¿Es verdadero o falso que toda función derivable es continua? Si es verdadero demostrarlo y si es falso exhibir un contraejemplo.

b) Mostrar con un contraejemplo que no toda función continua es derivable. Sugerencia: Probar que la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ pero no es derivable en $x = 0$.

5. **Ejercicio típico de parciales y exámenes sobre continuidad y derivabilidad en un punto**

a) Investigar si las siguientes funciones son continuas en el punto $x = 0$. (Justificar la respuesta)
(i) $f(x) = (e^x - 1)/x$ si $x \neq 0, \quad f(0) = 1$
(ii) $f(x) = (e^x - 1)/x$ si $x \neq 0, \quad f(0) = 0$
(iii) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2 + x^3)}{\sqrt{|9x^3 + 7x^5|}}$ si $x \neq 0, \quad f(0) = 1$
(iv) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2 + x^3)}{\sqrt{|9x^3 + 7x^5|}}$ si $x \neq 0, \quad f(0) = 0$

b) Investigar si las funciones dadas en la parte a) son derivables en el punto $x = 0$ (justificar la respuesta), y si alguna lo es calcular $f'(0)$.

6. **Cálculo de derivadas elementales**

Probar las siguientes afirmaciones:

a) Si $f(x) = k$ constante real para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $f'(a) = 0 \ \ \forall\ a \in \mathbb{R}$.

b) La derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $x = a$ es $f'(a) = 2a$.

c) Sea $n \in \mathbb{N}^+$ fijo. Entonces $(x^n)' = nx^{n-1} \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
Sugerencia: Si $f(x) = x^n$, calcular $f'(a)$ usando la definición de derivada como límite de cociente incremental, con a fijo. Observar que ese límite fue calculado en uno de los ejercicios del práctico anterior. Llegar a que $f'(a) = na^{n-1}$. Finalmente sustituir a por x.

d) $(e^x)' = e^x \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
Sugerencia: Escribir la derivada $(e^x)'$ en el punto $x = a$ como límite del cociente incremental. Luego sustituir en ese cociente incremental $e^x = e^{x-a} \cdot e^a$, sacar de factor común e^a en el numerador de ese cociente, y finalmente aplicar límite tipo $e^{h(x)} - 1 \sim h(x)$ cuando $h(x) \to 0$. Para terminar sustituir a por x.

e) $(\log x)' = \dfrac{1}{x} \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}^+$. Sugerencia: Escribir el límite del cociente incremental. Usar que $\log x - \log a = \log(x/a) = \log\Big(1 + (x/a) - 1\Big) = \log\Big(1 + (x-a)/a\Big)$. Finalmente usar límite tipo equivalente, y para terminar sustituir a por x.

f) $(\log |x|)' = \dfrac{1}{x} \ \ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

g) $(\operatorname{sen} x)' = \cos x \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Sugerencia: escribir el límite del cociente incremental. Usar que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}((x-a)+a) = \operatorname{sen}(x-a)\cos a + \cos(x-a)\operatorname{sen} a$. Finalmente usar límite tipo equivalente, y para terminar sustituir a por x.

7. **Derivada y crecimiento-decrecimiento de la función**

Una función real $f : D \mapsto \mathbb{R}$ con dominio en un intervalo $D \subset \mathbb{R}$ se dice que es "estrictamente creciente" cuando

$$x_1 < x_2 \text{ en } D \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Se dice que f es "estrictamente decreciente " cuando

$$x_1 < x_2 \text{ en } D \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

a) Chequear gráficamente que si f es continua y estrictamente creciente entonces la curva gráfica de f sube, y si es estrictamente decreciente la curva gráfica de f baja.

b) Probar que si f es derivable en todos los puntos a del intervalo D, entonces:

$$f'(a) > 0 \ \forall \ a \in D \quad \Rightarrow \quad f \text{ es estrictamente creciente,}$$

$$f'(a) < 0 \ \forall \ a \in D \quad \Rightarrow \quad f \text{ es estrictamente decreciente.}$$

(Se sugiere usar argumentos gráficos en vez de analíticos, a partir de lo estudiado sobre el cociente incremental y la pendiente de las cuerdas en el Ejercicio 1).

c) Probar que existen funciones reales f definidas en intervalo D de reales, tales que f es estrictamente creciente pero NO para todo $a \in D$ se cumple $f'(a) > 0$. (Sugerencia: estudiar el ejemplo $f(x) = x^3$.) Probar que existen funciones f estrictamente decrecientes tales que NO para todo $a \in D$ se cumple $f'(a) < 0$.

d) Se sabe que la función $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ tiene función derivada $f'(x)$ cuya gráfica se da en la Figura 1. Se sabe que $f(-1) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = -1/5$. Dibujar aproximadamente la gráfica de la función f.

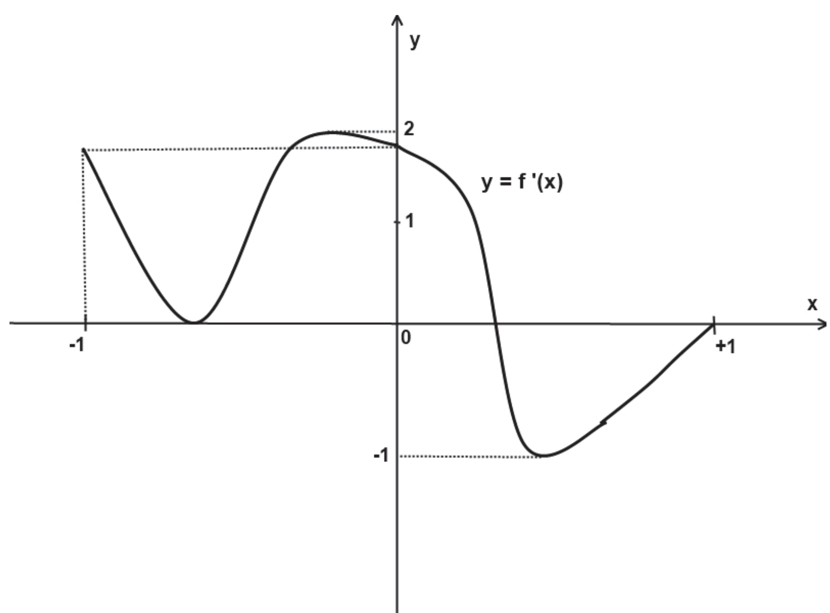

Figura 1: Gráfica de la derivada $f'(x)$ de una función $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$.

8. **Reglas para cálculo de derivadas**

   a) Estudiar y entender, del libro "Conceptos básicos de Matemática" (ver bibliografía del curso) desde el principio de la página 83 donde dice Proposición 17, hasta la página 85, donde dice Ejercicio 17 (excluido). Hacer diagrama resumen de lo estudiado, resaltando en particular la Regla de la Cadena.

   Responder las siguientes preguntas:

   b) ¿Cómo se prueba que
$$(\log x)e^x)' = \frac{e^x}{x} + (\log x)e^x?$$

   c) ¿Cómo se prueba que
$$\left(\frac{\log x}{e^x}\right)' = \frac{\frac{e^x}{x} - (\log x)e^x}{e^{2x}}?$$

   d) ¿Cómo se prueba que
$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x?$$

   Sugerencia: Usar que $\cos x = \operatorname{sen} u(x)$, donde $u(x) = (\pi/2) - x$; luego aplicar la regla de la cadena para derivar la función compuesta, recordar que $(\operatorname{sen} u)' = \cos u$, y finalmente usar que $\cos((\pi/2) - x) = \operatorname{sen} x$.

   e) ¿Cómo se prueba que
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 + (\tan x)^2}?$$

   Sugerencia: Usar que $\tan x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$, $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

   f) ¿Cómo se prueba que
$$\left((4x^2 - 6x - 5)^6\right)' = 6 \cdot (4x^2 - 6x - 5)^5 \cdot (8x - 6)?$$

   g) ¿Cómo se prueba que
$$\left(\log \sqrt{|x^2 + 2x + 1|}\right)' = \frac{1}{x + 1}?$$

   h) ¿Cómo se prueba que
$$\left(\sqrt{\log |x^2 + 2x + 1|}\right)' = \left(\frac{1}{2\sqrt{\log |x^2 + 2x + 1|}}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 1}\right) \cdot (2x + 2)?$$

9. **Tabla de derivadas**

   a) Estudiar, copiar en la carpeta, aprender y recordar para siempre, las 12 reglas de cálculo de derivadas de la Tabla I.

Tabla I de las 12 reglas de cálculo de derivadas.

	función $f(x)$		derivada $f'(x)$
0.	$f(x) = k$ constante real $\forall\ x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 0\ \forall\ x$
1.	x^{α}		$\alpha x^{\alpha-1}$ donde α es una constante real
2.	e^x		e^x
3.	$\log\lvert x\rvert\ \ \forall\ x \neq 0$		$\dfrac{1}{x}$
4.	$\operatorname{sen} x$		$\cos x$
5.	$\cos x$		$-\operatorname{sen} x$
6.	$\tan x$		$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
7.	$\lambda \cdot f(x)$		$\lambda \cdot f'(x)$ donde λ es una constante real
8.	$f(x) + g(x)$		$f'(x) + g'(x)$
9.	$f(x) \cdot g(x)$		$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
10.	$\dfrac{f(x)}{g(x)},\quad g(x) \neq 0$		$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
11.	$f(g(x))$		$f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (Regla de la Cadena: Derivada de la Función Compuesta)
12.	$y = f(x)$ función invertible y con función inversa: $x = f^{-1}(y)$	$\Rightarrow$	con derivada $f'(x) \neq 0$, $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ (Regla de la Derivada de la Función Inversa)

b) Usando la tabla (I), calcular las derivadas de:
(i) $\sqrt[3]{x}$ (Sugerencia: $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$) (ii) $\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$
(iii) $\log\lvert 4e^x + 7x^2\rvert$ (iv) $(45\operatorname{sen}(x^7) + e^{5x^3})/(2x^2 + 7)$

c) Usando la tabla (I) probar que

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + \Big(\tan(\arctan x)\Big)^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

d) Agregar a la tabla (I) y recordar para siempre que las derivadas de $\operatorname{arc\,sen} x$ y de $\arctan x$ son $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ y $\dfrac{1}{1 + x^2}$ respectivamente.

10. **Derivadas de orden superior**

Estudiar y entender, del libro "Conceptos básicos de Matemática", desde página 88 donde dice "Derivadas de orden superior", hasta página 92 donde dice "Ejemplo 3.4.7" (excluido). Responder las siguientes preguntas sobre el texto leído:

a) ¿Cómo se demuestra que si $f(x) = 3xe^{x^2+x+1}$ entonces

$$f''(x) = (12x^3 + 12x^2 + 21x + 6)e^{x^2+x+1}?$$

b) ¿Cómo se demuestra que si $g(x) = (x^2 + x)\log(x^2 + 1)$ entonces

$$g''(x) = 2\log(x^2 + 1) + \frac{(2x + 1)(2x)}{x^2 + 1} + \frac{2x^4 + 6x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2}?$$

c) ¿Cómo se demuestra que

$$(x^4)'' = 12x^2, \quad (x^4)''' = 24x, \quad (x^4)^{iv} = 24, \quad (x^5)^v = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}?$$

d) ¿Cómo se demuestra que $h(x) = -(1/2)x^2 + (14/3)x - (19/6)$ tiene concavidad negativa para todo $x \in \mathbb{R}$?

e) Se sabe que la función $g : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ tiene derivada segunda $g''(x)$ cuya gráfica es la de la Figura 1. Se sabe además que

$$g'(-1) = -1, \quad g'(0) = 0, \quad g'(1) = -1/5$$

$$g(-1) = 2, \quad g(0) = 0, \quad g(1) = 1.$$

Dibujar aproximadamente la gráfica de la función g.

Sugerencia: La derivada primera $g'(x)$ es la función $f(x)$ cuya gráfica se croquizó en el ejercicio 5 parte d). La derivada segunda $g''(x)$ tiene gráfica dibujada en la Figura 1. El signo de $g'(x)$ da el crecimiento o decrecimiento de $g(x)$, y el signo de $g''(x)$ da la concavidad de $g(x)$.

11. **Reglas de l'Hôpital**

Estudiar y entender del libro "Conceptos básicos de Matemática"(ver bibliografía del curso) las Reglas de L'Hôpital, desde la página 93 donde empieza la sección 3.4.4 hasta el final de la página 95. Responder las siguientes preguntas sobre el texto leído:

a) ¿Cómo se demuestra, usando las reglas de L'Hôpital, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 2x^2}{e^{x^2} - 1} = 2?$$

b) ¿Cómo se demuestra, usando las reglas de l'Hôpital, que si $\lim_{x\to a} h(x) = 0$ y si $h'(x)$ existe para todo x, entonces

$$\lim_{h(x)\to 0} \frac{e^{h(x)} - 1}{h(x)} = 1?$$

c) ¿Cómo se demuestra, usando las reglas de l'Hôpital, que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{\log x} = 0?$$

d) ¿Cómo se demuestra, usando las reglas de l'Hôpital, que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^2 + 2} = 0?$$

e) ¿Cómo se demuestra, usando las reglas de l'Hôpital, que

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0?$$

f) ¿Cómo se demuestra, usando las reglas de l'Hôpital, que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = 0?$$

g) ¿Cómo se calculan los siguientes límites, usando las reglas de l'Hôpital?

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\log(1+x)} - \dfrac{1}{x} \right)$, (ii) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$, (iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \log(x+1)}{e^{3x} - 3x - 1}$.

12. **Desarrollo de Taylor**

Estudiar (leer y entender) del libro "Análisis Matemático I"de Fernando Paganini (ver bibliografía del curso), desde la página 76 donde dice "Desarrollo de Taylor", hasta la página 79 en el último párrafo, donde dice "Veamos una aplicación al estudio de extremos relativos..."excluido. Responder las siguientes preguntas:

Hipótesis: Sea dada una función $f(x)$ con dominio que contiene un intervalo abierto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, tal que f tiene derivadas primera, segunda, ..., hasta la $n-$ésima en $x = a$.

a) ¿Qué es el polinomio de Taylor $P_n(f, a)$ de grado n en $(x - a)$, y cuál es la relación entre los coeficientes de este polinomio y las derivadas de f alrededor del punto a?

b) ¿Cuál es la diferencia entre el polinomio de Taylor $P_n(f, a)$ y el desarrollo de Taylor de f hasta orden n en a?

c) ¿Cómo se demuestra que el polinomio de Taylor $P(f, a)$ es único?

d) ¿Cómo se demuestra que existe el desarrollo de Taylor de f hasta orden n alrededor del punto a?

13. **Definición: Desarrollo de Mac Laurin** Se llama desarrollo de Mac Laurin hasta orden n de f al desarrollo de Taylor hasta orden n de f alrededor de $a = 0$. Análogamente, se llama polinomio de Mac Laurin hasta orden n de f al polinomio de Taylor $P_n(f, 0)$.

Entonces, el polinomio de Mac Laurin $P_n(f, 0)$ es:

$$P_n(f, 0) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n, \text{ donde}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

El desarrollo de Mac Laurin hasta orden n de f es:

$$f(x) = P_n(f, 0) + r_n(x), \text{ donde}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0.$$

Escrito extensivamente:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + r_n(x), \quad \text{donde}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0.$$

a) ¿Cuál es el polinomio de Mac Laurin $P_n(e^x, 0)$ de grado n en x ($a = 0$) de la función e^x?

b) ¿Cuál es el polinomio de Taylor $P_n(e^{(x-1)^2}, 1)$ de grado $2n$ en $(x-1)$ de la función $e^{(x-1)^2}$?

c) ¿Cómo se calcula el siguiente límite usando el desarrollo de Taylor:

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{(x-1)^2} - 1 - (x-1)^2 - (1/2)\,(x-1)^4}{10\,(x-1)^6}?$$

d) ¿Cuál es el polinomio de Mac Laurin hasta grado n de la función $\log(1 + x)$?

e) ¿Cuál es el polinomio de Mac Laurin de la función $\operatorname{sen} x$ de grado $2k + 1$?

f) ¿Cómo se calcula el siguiente límite usando el desarrollo de Taylor:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\operatorname{sen}(x-1)^3) - (x-1)^3}{7(x-1)^9}?$$

g) ¿Cual es el polinomio de Mac Laurin de la función $\cos x$ de grado $2k$?

h) ¿Cómo se calcula el siguiente límite usando el desarrollo de Mac Laurin:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2 - x^4/4!}{24\,x^6}?$$

i) ¿Cómo se demuestra que

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

y que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{1 + x^n}{1 - x}?$$

j) ¿Cuál es el desarrollo de Mac Laurin hasta orden n de $\dfrac{1}{1-x}$?. (Justificar la respuesta)

k) ¿Cuál es el desarrollo de Mac Laurin hasta orden n de $\dfrac{1}{3+2x}$?. (Justificar la respuesta)

l) ¿Cuál es el desarrollo de Taylor hasta orden n alrededor de $a = 1$ de $\dfrac{1}{3+2x}$?. (Justificar la respuesta)

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 10
Primitivas (integral indefinida) y Métodos de Integración

Estudiar del libro "Análisis Matemático I" de F. Paganini, la Definición 221 de Primitiva (final de la página 92) y desde la página 96, Cálculo de primitivas, hasta el final de la página 97.

Definición de PRIMITIVA o INTEGRAL (INDEFINIDA):
Sea I un intervalo de reales.
Si $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in I$ decimos que $f(x)$ es la función derivada de $F(x)$ y que
$F(x)$ *es la función primitiva de* $f(x)$,
o como sinónimo de primitiva, decimos que:
$F(x)$ *es la función integral (indefinida) de* $f(x)$.
La función primitiva de $f(x)$ se denota así:

$$F(x) + C = \int f(x)\, dx \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x),$$

donde C es una constante real arbitraria (pues al sumar C la derivada de $F(x)$ no cambia).

1. **Ejemplos:** $e^{x^2} + C = \int 2x\, e^{x^2}\, dx,\qquad e^u + C = \int e^u\, du,$

$$-\cos(e^t) + C = \int e^t \operatorname{sen}(e^t)\, dt, \qquad -\cos(\varphi) + C = \int \operatorname{sen}(\varphi)\, d\varphi.$$

a) Chequear que son ciertas todas las igualdades en los ejemplos de arriba.

Ejemplos: En las siguientes integrales, cuando aparece dv dentro de la integral se primitiva respecto de v siendo u una constante, y cuando aparece du dentro de la integral se primitiva respecto de u siendo v una constante.

$$\int e^{u\,v}\, v\, du = e^{u\,v} + C, \qquad \int e^{u\,v}\, v\, dv = e^{u\,v}(uv - 1)/u^2 + C.$$

b) Chequear que son correctas las dos igualdades de arriba.

Nota: Uno de los métodos de integración que veremos en este práctico, consiste en cambiar la variable independiente de integración. Para evitar confusiones en los cálculos de primitivas es necesario (por lo menos al inicio) usar la notación de Leibnitz QUE INCLUYA EL SÍMBOLO del diferencial dx ó dy ó dt ó du, etc, para saber en cada paso del método de integración, con respecto a CUÁL variable debemos primitivar nuestra función f (o derivar el resultado F).

2. **Primer método de integración:** <u>**Tabla de Primitivas Elementales**</u>

a) En cada renglón de la tabla (I), chequear que $f'(x) = F(x)$ para probar que $F(x) = \int f(x)\, dx$.

b) Estudiar y recordar las primitivas de la tabla (I).

c) Calcular las siguientes primitivas a partir de las que están en la tabla

(i) $\int \left(3\cos(2x+1) + 2e^{4x}\right) dx,\qquad$ (ii) $\int \left(\dfrac{5}{3x+2}\right) dx,$

(iii) $\int \dfrac{1}{\cos^2(3x+2)}\, dx,\qquad$ (iv) $\int \dfrac{c}{(u-a)^2 + b^2}\, du,$

(v) $\displaystyle\int \Big(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\Big)\, d\varphi$ (vi) $\displaystyle\int \Big((\cos(\varphi))^2 + (\operatorname{sen}(\theta))^2\, d\theta$

(Sugerencia: Recordar que $\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos(2t)$, $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$; sumar estas dos igualdades para despejar $\cos^2 t$; y restarlas para despejar $\operatorname{sen}^2 t$.)

(vii) $\displaystyle\int \Big(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0\Big)\, dt$

(viii) $\displaystyle\int e^{3u+5v}\, du$ (ix) $\displaystyle\int e^{3u+5v}\, dv$ (x) $\displaystyle\int e^{uv}\, du$ (xi) $\displaystyle\int e^{uv}\, dv$

(xii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-\Big((x/4)+7\Big)^2}}\, dx$ (xiii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{(x/4)+7}}\, dx$ (xiv) $\displaystyle\int \frac{1}{(4x^2+9)}\, dx$

(xv) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2+2}\, dx$ (xvi) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x-1)^2+2}\, dx$

Segundo método de integración: Método de Sustitución

Leer del libro "Análisis Matemático I"desde la página 98, Integración por sustitución, hasta la página 100 donde dice Integración por partes (excluido).

Recordar el siguiente enunciado:

Teorema de Integración por Sustitución Dadas dos funciones continuas $f(u)$ y $u(x)$, siendo $u(x)$ derivable, entonces:

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int f(u)\, du\Big|^{u=u(x)},$$

donde la barra vertical a la derecha significa que **después** de calcular la primitiva $\int f(u)\, du$ (**con respecto de la variable** u), hay que SUSTITUIR en el resultado obtenido u por $u(x)$ en todos lados donde aparezca la u.

Ejemplo:

$$\int x\, \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)(x^2)'\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \cos u\, du\Big|^{u=x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C\ \Big|^{u=x^2} = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} + C.$$

Notación de Leibnitz con diferenciales *Si $u = u(x)$ es una función dada derivable, su derivada $u'(x)$ respecto de x se denota así:*

$$u'(x) = \frac{du}{dx}, \qquad \text{lo cual significa que } u'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}.$$

$$\text{Si } u = u(x) \text{ entonces } du = u'(x)\, dx$$

y esto permite recordar que en la integral se puede sustituir $u'(x)\, dx$ por du, o alrevés, du por $u'(x)\, dx$:

$$\text{Si } u = u(x) \text{ entonces } \int f(u)\, du = \int f(u(x))\, u'(x)\, dx.$$

3. *a*) Demostrar el Teorema de Integración por Sustitución enunciado más arriba.
   Sugerencias: Denotar $F(u) = \int f(u)\, du$. Por convención $\int f(u)\, du|^{u=u(x)}$ denota a la función $F(u(x))$. Aplicar la regla de la cadena para derivar $F(u(x))$ respecto de x y concluir que $F(u(x))$ es primitiva de $f(u(x))\cdot u'(x)$.

b) Justificar cada paso en la cadena de igualdades del Ejemplo dado más arriba.

c) Utilizando la notación de Libnitz explicada arriba, calcular las siguientes primitivas por el método de sustitución:

(i) $\displaystyle\int \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t\, dt$, (ii) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$, (iii) $\displaystyle\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$,

(iv) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\, dt$, (v) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+8x^2}}\, dx$, (vi) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x\, dx$,

(vii) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$.

(viii) $\displaystyle\int x^2 \cdot \sqrt{1+x^3}\, dx$, (ix) $\displaystyle\int (x^2+x^5) \cdot \sqrt{1+x^3}\, dx$, (x) $\displaystyle\int x^5 \cdot \sqrt{1+x^3}\, dx$,

(xi) $\displaystyle\int x^2 \cdot \sqrt{x+3}\, dx$ Sugerencia: Usar $u = u(x) = \sqrt{x+3}$.

(xii) $\displaystyle\int \frac{5x+1}{(5x^2+2x)^7}\, dx$,

(xiii) $\displaystyle\int \tan x\, dx$, (ixv) $\displaystyle\int \cos x \, \operatorname{sen} x\, dx$, (xv) $\displaystyle\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$,

d) Verificar algunos de los resultados obtenidos en la parte anterior.

Tercer método de integración: Integración por Partes

Estudiar del libro "Análisis Matemático I"desde la página 100, Integración por partes (salteando el Corolario 244) hasta la página 101 donde dice "Primitivas de Funciones Racionales"(excluido)

Teorema de Integración por Partes

Si f y g son dos funciones continuas y derivables con derivadas primeras continuas, entonces

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Ejemplo: Calcular $\int x^2 e^{5x}\, dx$. Aplicamos partes una vez:

$$\int x^2 e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}\int (x^2) \cdot (5e^{5x})\, dx = \frac{1}{5}\int (x^2) \cdot (e^{5x})'\, dx =$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int (2x) e^{5x}\, dx = \frac{x^2 \cdot e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int x e^{5x}\, dx$$

Ahora, para calcular $\int x e^{5x}\, dx$ aplicamos partes otra vez:

$$\int x e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}\int x \cdot (5e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}\int x \cdot (e^{5x})'\, dx =$$

$$= \frac{x \cdot e^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int 1 \cdot e^{5x}\, dx = \frac{x \cdot e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25}.$$

Juntando los resultados obtenidos hasta aquí, llegamos a la respuesta final:

$$\int x^2 e^{5x}\, dx = \frac{x^2 \cdot e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int x e^{5x}\, dx =$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{x \cdot e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25}\right) =$$

$$= \frac{25x^2 \cdot e^{5x} - 10x \cdot e^{5x} + 2\, e^{5x}}{125} = \frac{(25x^2 - 10x + 2) \cdot e^{5x}}{125}.$$

4. *a*) Demostrar el Teorema de Integración por Partes enunciado más arriba.

   Sugerencias: Recordar la regla de derivada de un producto de funciones para probar la siguiente igualdad:

$$f(x)g(x) + C = \int \Big(f'(x)g(x)) + f(x)g'(x)\Big)\,dx$$

   Después recordar que la integral de la suma de funciones es la suma de las integrales, y despejar $\int f(x)g'(x)\,dx$. Finalmente observar que si a una primitiva se le suma una constante, se obtiene otra primitiva.

   b) Justificar cada paso en la cadena de igualdades del Ejemplo de integración por partes dado más arriba.

   c) Verificación: chequear que el resultado obtenido en el Ejemplo de integración por partes expuesto más arriba, es efectivamente una primitiva de la función dada.

   d) Calcular las siguientes primitivas por el método de integración por partes:

   (i) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$, (ii) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$, (iii) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{sen}(4x)\,dx$

   (iv) $\displaystyle\int x^3e^x\,dx$, (v) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (Sugerencia: escribir $\log x = (\log x)1$ y observar que 1 es la derivada de la función $g(x) = x$).

   (vi) $\displaystyle\int \mathrm{sen}\,x\cos x\,dx$, (vii) $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2\,x\,dx$, (viii) $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$,

   (ix) $\displaystyle\int \arctan x\,dx$ Sugerencia: Escribir $\arctan x$ como $(\arctan x)\cdot 1$. Aplicar partes. Se llegará a una nueva integral que se puede calcular aplicando el método de sustitución.

   e) Verificar algunos de los resultados obtenidos en la parte anterior (los que hayan dado más trabajo de calcular)

TABLA I - Primitivas (integrales) elementales

$\int \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx$	$=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$	$\int kf(x)\,dx$	$=k\int f(x)\,dx$
$\int f(x)\,dx$	$=F(x)$	$\int f(ax+b)\,dx$	$=\frac{1}{a}F(ax+b)$
$\int 0\,dx$	$=C$		
$\int k\,dx$	$=kx+C$		
$\int x\,dx$	$=\frac{x^2}{2}+C$	$\int (ax+b)\,dx$	$=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^2}{2}+C$
$\int x^2\,dx$	$=\frac{x^3}{3}+C$	$\int (ax+b)^2\,dx$	$=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^3}{3}+C$
$\int x^3\,dx$	$=\frac{x^4}{4}+C$	$\int (ax+b)^3\,dx$	$=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^4}{4}+C$
Si $\alpha\neq 1$ $\int x^\alpha\,dx$	$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int (ax+b)^\alpha\,dx$	$=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
Si $\alpha=1$ $\int x^{-1}\,dx=$ $=\int\frac{1}{x}\,dx$	$=\log\lvert x\rvert+C$	$\int (ax+b)^{-1}\,dx=$ $=\int\frac{1}{ax+b}\,dx$	$=\frac{1}{a}\cdot\log\lvert ax+b\rvert+C$
Ejemplo: Si $\alpha=-1/2$ $\int x^{-1/2}\,dx=$ $=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$	$=\frac{x^{1/2}}{1/2}+C=$ $=2\sqrt{x}+C$	$\int (ax+b)^{-1/2}\,dx=$ $=\int\frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx$	$=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{1/2}}{1/2}+C=$ $=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{ax+b}+C$
Ejemplo: Si $\alpha=1/3$ $\int x^{1/3}\,dx=$ $=\int\sqrt[3]{x}\,dx$	$=\frac{x^{4/3}}{4/3}+C=$ $=\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}+C$	$\int (ax+b)^{1/3}\,dx=$ $=\int\sqrt[3]{ax+b}\,dx$	$=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{4/3}}{4/3}+C=$ $=\frac{1}{a}\cdot\frac{3\sqrt[3]{(ax+b)^4}}{4}+C$

continúa...

Continuación de la TABLA I - Primitivas (integrales) elementales

$\int f(x)\,dx$	$= F(x)$	$\int f(ax+b)\,dx$	$= \frac{1}{a}\,F(ax+b)$
$\int e^x\,dx$	$= e^x + C$	$\int e^{ax+b}\,dx$	$= \frac{1}{a}\cdot e^{ax+b} + C$
$\int \cos x\,dx$	$= \operatorname{sen} x + C$	$= \int \cos(ax+b)\,dx$	$= \frac{1}{a}\cdot \operatorname{sen}(ax+b) + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx$	$= -\cos x + C$	$\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx$	$= -\frac{1}{a}\cdot \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$= \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\,dx$	$= \frac{1}{a}\cdot \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$	$= \arctan x + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2+1}\,dx$	$= \frac{1}{a}\cdot \arctan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$= \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}\,dx$	$= \frac{1}{a}\cdot \operatorname{arc\,sen}(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$	$= \frac{1}{\beta}\cdot \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$		
$\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$	$= \log\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + C$		

Cuarto método de integración: **Integración por Descomposición de Fracciones Simples**

Estudiar del libro "Análisis Matemático I" desde la página 101, Primitivas de Funciones Racionales, hasta la página 104 donde dice Métodos numéricos, excluido.

Definición de Función Racional *Una función $f(x)$ se llama Función Racional cuando:*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{donde} \quad P(x),\ Q(x) \quad \text{son polinomios.}$$

Ejemplos:

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx, \qquad \int \frac{3x+2}{(x-1)(x+1)^3}\,dx, \qquad \int \frac{2x^5-4x^4-7x^3-x^2+6x+1}{x^4-x^3-3x^2+x+2}\,dx.$$

El método de **Descomposición en Fracciones Simples** *solo es aplicable a funciones racionales.*

CUATRO CASOS Distinguiremos 4 casos, para cada caso aplicaremos un teorema diferente, según el grado del polinomio en el numerador sea menor estrictamente, o no lo sea, que el grado del polinomio en el denominador; según las raíces del denominador sean todas reales o haya algunas complejas conjugadas; y según sean la multiplicidades de las raíces del denominador.

Teorema 1 de Descomposición en Fracciones Simples.
1er. caso: Raíces del denominador todas reales y con multiplicidad 1

Sea dada la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)}$ *tal que:*

• *El polinomio $P(x)$ en el numerador tiene grado ESTRICTAMENTE MENOR que el grado k del denominador*

• *El polinomio $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$ en el denominador tiene sus raíces $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que:*

son todas reales (es decir, $Q(x)$ no tiene raíces complejas conjugadas), y

todas tienen multiplicidad 1 (es decir, $Q(x)$ no tiene raíces dobles, triples, etc).

Entonces existe la siguiente descomposición, llamada "descomposición en fracciones simples ":

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_k}{x-a_k} \qquad (*)$$

donde A_i son constantes reales.

Luego:

$$\int \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)}\,dx = A_1 \log|x-a_1| + \log A_2|x-a_2| + \ldots + \log A_k|x-a_k| + C$$

Ejemplo 1: $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \dfrac{-3/2}{x-1} + \dfrac{1/6}{x+1} + \dfrac{7/3}{x-2}.$

Luego

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-3/2}{x-1} + \frac{1/6}{x+1} + \frac{7/3}{x-2}\,dx =$$
$$= -\frac{3}{2}\log|x-1| + \frac{1}{6}\log|x+1| + \frac{7}{3}\log|x-2| + C.$$

Método de la tapadita ¿Cómo encontramos los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de las fracciones simples que cumplen la igualdad (*)?

¡OJO! El teorema de descomposición en fracciones simples y este método de la tapadita, solo valen cuando el numerador $P(x)$ es un polinomio con grado MENOR ESTRICTO que el grado del polinomio $Q(x)$ en el denominador.

Para hallar $A_i =$ el coeficiente de la fracción simple $A_i/(x-a_i)$ que cumple la igualdad (*), en la función racional DADA:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)},$$

TAPAMOS el factor $x - a_i$ que corresponde a la raíz a_i en el denominador:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{i-1})(\text{Factor TAPADO})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_k)},$$

y REEMPLAZAMOS $x = a_i$:

$$A_i = \left.\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{i-1})(\text{Factor TAPADO})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_k)}\right|^{x=a_i}.$$

Ejemplo 1. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx.$

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-2}$$

$$A_1 = \left.\frac{x^2+x+1}{(\text{Factor TAPADO})(x+1)(x-2)}\right|^{x=1} = \frac{1^2+1+1}{(1+1)(1-2)} = -\frac{3}{2}.$$

$$A_2 = \left.\frac{x^2+x+1}{(x-1)(\text{Factor TAPADO})(x-2)}\right|^{x=-1} = \frac{(-1)^2+(-1)+1}{(-1-1)(-1-2)} = +\frac{1}{6}.$$

$$A_3 = \left.\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(\text{Factor TAPADO})}\right|^{x=2} = \frac{(2)^2+2+1}{(2-1)(2+1)} = +\frac{7}{3}.$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-3/2}{x-1} + \frac{1/6}{x+1} + \frac{7/3}{x-2}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\log|x-1| + \frac{1}{6}\log|x+1| + \frac{7}{3}\log|x-2| + C.$$

5. *a*) En el Ejemplo 1 expuesto más arriba, explicar cada paso del proceso de cálculo.

   b) Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

   (i) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-x-2}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx,$ (iii) $\displaystyle\int \frac{x}{7x^3-42x^2+77x-42}\,dx.$

Teorema 2 de Descomposición en Fracciones Simples.
2do. caso: Raíces del denominador todas reales y alguna(s) con multiplicidad ≥ 1.

Sea dada la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_r)^{k_r}}$ *tal que:*

• *El polinomio $P(x)$ en el numerador tiene grado ESTRICTAMENTE MENOR que el grado $k_1 + k_2 + \ldots + k_r$ del denominador*

• *El polinomio $Q(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_r)^{k_r}$ en el denominador tiene todas sus r raíces $a_1, a_2, \ldots, a_r$ reales* (es decir, $Q(x)$ no tiene raíces complejas conjugadas)

Entonces existe la siguiente descomposición, llamada "descomposición en fracciones simples":

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_r)^{k_r}} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{H_1}{(x-a_1)^2} + \frac{J_1}{(x-a_1)} +$$

$$+\frac{A_2}{(x-a_2)^{k_2}} + \frac{B_2}{(x-a_2)^{k_2-1}} + \ldots + \frac{H_2}{(x-a_2)^2} + \frac{J_2}{(x-a_2)} +$$

$$+ \ldots + \frac{A_r}{(x-a_r)^{k_r}} + \frac{B_r}{(x-a_r)^{k_r-1}} + \ldots + \frac{H_r}{(x-a_r)^2} + \frac{J_r}{(x-a_r)} \qquad (**)$$

donde $A_i, B_i, \ldots, H_i, J_i$ son constantes reales.

Luego $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ *es la suma de las integrales de sus fracciones simples.*

Ejemplo 2: $\dfrac{3x+2}{(x-1)(x+1)^3} = \dfrac{5/8}{x-1} + \dfrac{1/2}{(x+1)^3} + \dfrac{-5/4}{(x+1)^2} + \dfrac{-5/8}{x+1}$.

Luego

$$\int \frac{3x+2}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{5}{8}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx - \frac{5}{4}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \frac{5}{8}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$\frac{5}{8}\log|x-1| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)} - \frac{5}{8}\log|x+1| + C.$$

¿Cómo encontramos los coeficientes

$A_1, A_2, \ldots, A_r, B_1, B_2, \ldots, B_r, \ldots, H_1, H_2, \ldots, H_r, J_1, J_2, \ldots, J_r$

de las fracciones simples que cumplen la igualdad (**)?

•Para los coeficientes $A_1, \ldots, A_r$ (que corresponden a los denominadores que TIENEN grado igual a la multiplicidad de cada raíz), usamos el método de la tapadita (ver caso 1 y ejemplo más abajo).

•Para los demás coeficientes $B_1, B_2, \ldots, J_1, J_2, \ldots, J_r$, en la igualdad (*) damos a la x tantos valores numéricos diferentes como coeficientes nos falta determinar, valores numéricos cualesquiera que NO anulen ningún denominador (ver ejemplo más abajo).

Nos quedará un sistema lineal de ecuaciones cuyas incógnitas son los coeficientes $B_1, \ldots, J_r$ que queremos determinar, y que tiene igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas (y que si no se cometen errores siempre queda compatible y determinado.)

Resolviendo ese sistema lineal de ecuaciones obtenemos los coeficientes $B_1, \ldots, J_r$ que nos faltaban de la descomposición en fracciones simples (**).

Ejemplo 2. Calcular $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x-1)(x+1)^3}\,dx$.

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{J}{x+1} \qquad (**)$$

$$A_1 = \left.\frac{3x+2}{(\text{Factor TAPADO})(x+1)^3}\right|^{x=1} = \frac{3\cdot 1+2}{(1+1)^3} = +\frac{5}{8}.$$
$$A_2 = \left.\frac{3x+2}{(x-1)(\text{Factor TAPADO})}\right|^{x=-1} = \frac{3\cdot(-1)+2}{(-1-1)} = +\frac{1}{2}.$$

De la igualdad (**) sustituyendo los valores hallados de A_1 y A_2, obtenemos:

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+1)^3} - \frac{5/8}{x-1} - \frac{1/2}{(x+1)^3} = \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{J}{x+1}.$$

En la última igualdad le damos dos valores numéricos cualesquiera a x, que NO anulen el denominador:

$$x = 0: \qquad \frac{2}{(-1)(+1)^3} - \frac{5/8}{-1} - \frac{1/2}{(+1)^3} = \frac{B}{(+1)^2} + \frac{J}{+1}$$
$$x = -2: \qquad \frac{3\cdot(-2)+2}{(-2-1)(-2+1)^3} - \frac{5/8}{-2-1} - \frac{1/2}{(-2+1)^3} = \frac{B}{(-2+1)^2} + \frac{J}{-2+1}$$

Nos queda el siguiente sistema lineal de ecuaciones cuyas incógnitas son las constantes B y J que queremos determinar:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2+\frac{5}{8}-\frac{1}{2} & = & B+J \\ \\ -\frac{4}{3}+\frac{5}{24}+\frac{1}{2} & = & B-J \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} B+J & = & -15/8 \\ B-J & = & -5/8 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} B & = & -5/4 \\ J & = & -5/8 \end{array}\right.$$

Concluimos el cálculo del desarrollo en fracciones simples:

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{5/8}{x-1} + \frac{1/2}{(x+1)^3} + \frac{-5/4}{(x+1)^2} + \frac{-5/8}{x+1}.$$

Finalmente, integrando obtenemos:

$$\int \frac{3x+2}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{5}{8}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx - \frac{5}{4}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \frac{5}{8}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$
$$\frac{5}{8}\log|x-1| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)} - \frac{5}{8}\log|x+1| + C.$$

6. *a*) En el Ejemplo 2 expuesto más arriba explicar cada paso del proceso de cálculo y verificar que el resultado obtenido es efectivamente la primitiva de la función dada.

   b) Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

   (i) $\displaystyle\int \frac{3x^3+4}{x^4-2x^2+1}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^3+7x^2+15x+9}\,dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+9}\,dx.$

   c) Test de autocontrol: chequear que los resultados obtenidos en la parte anterior sean efectivamente primitivas de las funciones dadas.

Teorema 3 de Descomposición en Fracciones Simples
3er. caso: Algunas raíces complejas conjugadas simples

Sea dada la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_r)^{k_r}(x^2+ax+b)}$ *tal que:*

• *El polinomio $P(x)$ en el numerador tiene grado ESTRICTAMENTE MENOR que el grado $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2$ del denominador*

• *El polinomio $Q(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_r)^{k_r}(x^2+ax+b)$ en el denominador tiene r raíces reales $a_1, a_2, \dots, a_r$ y además dos raíces complejas conjugadas simples y no reales*

$$\alpha \pm i\beta,$$

que son las que anulan el factor cuadrático x^2+ax+b. (Es decir, el discriminante de este polinomio de segundo grado es negativo.)

Entonces existe la siguiente descomposición, llamada "descomposición en fracciones simples":

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_r)^{k_r}(x^2+ax+b)} = \frac{C_0x+D_0}{(x-\alpha)^2+\beta^2} +$$

$$+ \frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{J_1}{(x-a_1)} + \dots + \frac{A_r}{(x-a_r)^{k_r}} + \dots + \frac{J_r}{(x-a_r)} \qquad (***)$$

donde $C_0, D_0, A_i, \dots, J_i$ son constantes reales.

Luego $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ *es la suma de las integrales de sus fracciones simples.*

Ejemplo 3: Calcular $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,dx$. Las raíces del polinomio de segundo grado $x^2 - 2x+5$ son complejas conjugadas: $1\pm 2i$. Entonces, la igualdad (***) del Teorema de Descomposición en Fracciones Simples (3er. caso), obtenemos:

$$\frac{3x+2}{(x+1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Cx+D}{(x-1)^2+2^2} \qquad (***).$$

Ahora determinaremos A por el método de la tapadita, y después C y D dando a x dos valores numéricos reales cualesquiera que no anulen ningún denominador.

$$A = \left.\frac{3x+2}{(\text{Factor TAPADO})(x^2-2x+5)}\right|^{x=-1} = \frac{3\cdot(-1)+2}{(-1)^2-2\cdot(-1)+5} = -\frac{1}{8}.$$

De la igualdad (***) sustituyendo el valor hallado de A, deducimos:

$$\frac{3x+2}{(x+1)(x^2-2x+5)} + \frac{1/8}{x+1} = \frac{Cx+D}{(x-1)^2+2^2}.$$

En esta última igualdad le damos dos valores numéricos cualesquiera a x, que NO anulen el denominador:

$$x=0: \qquad \frac{3\cdot 0+2}{(0+1)\cdot(0^2-2\cdot 0+5)} + \frac{1/8}{0+1} = \frac{D}{(0-1)^2+2^2}$$

$$x=1: \qquad \frac{3\cdot 1+2}{(1+1)(1^2-2\cdot 1+5)} + \frac{1/8}{1+1} = \frac{C+D}{(1-1)^2+2^2}.$$

Nos queda el siguiente sistema lineal de ecuaciones cuyas incógnitas son las constantes C y D que queremos determinar:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}+\frac{1}{8} &= \frac{D}{5} \\ \frac{5}{8}+\frac{1}{16} &= \frac{C+D}{4}. \end{cases} \qquad \begin{cases} D &= 21/8 \\ C+D &= 11/4 \end{cases} \qquad \begin{cases} D &= 21/8 \\ C &= 1/8 \end{cases}$$

Concluimos el cálculo del desarrollo en fracciones simples de la función dada dentro de la integral:

$$\frac{3x+2}{(x+1)(x^2-2x+5)} = \frac{-1/8}{x+1} + \frac{(1/8)x+(21/8)}{(x-1)^2+2^2}.$$

Finalmente, integrando obtenemos:

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{(1/8)x+(21/8)}{(x-1)^2+2^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left|x+1\right| + \frac{1}{8}\int \frac{x-1}{(x-1)^2+4}\,dx + \left(\frac{21}{8}+\frac{1}{8}\right)\int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left|x+1\right| + \frac{1}{16}\log\left|(x-1)^2+4\right| + \frac{11}{8}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

7. *a*) En el Ejemplo 3 expuesto más arriba explicar cada paso del proceso de cálculo.

   b) Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

   (i) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3+3x^2+12x+10}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{8x}{x^3+3x^2+12x+10}\,dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{2x^2+x+5}\,dx$

   (iv) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$ (v) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{3x^2+3x+2}\,dx$ (vi) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x^2+1)(x-1)}\,dx$

Notas sobre la Descomposición en Fracciones Simples: Recordar que SOLO SE PUEDE APLICAR CUANDO Grado de $P(x) <$ Grado de $Q(x)$. Faltaría estudiar el caso, que omitiremos, en que $Q(x)$ tiene raíces no reales (complejas conjugadas) con multiplicidad ≥ 2.

Teorema 4 de Integración de Funciones Racionales
4to. caso: grado del numerador mayor o igual que grado del denominador

Sea dada la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *tal que:*

• *El polinomio $P(x)$ en el numerador tiene grado MAYOR O IGUAL que el grado del polinomio $Q(x)$ del denominador.*

Entonces existen los polinomios cociente $C(x)$ y resto $R(x)$ tales que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad \textit{grado de } R(x) < \textit{ grado de } Q(x).$$

Luego

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx,$$

donde $\int C(x)\,dx$ se puede calcular fácilmente pues es la integral de un polinomio, y $\int R(x)/Q(x)\,dx$ se puede calcular como vimos antes, mediante descomposición en fracciones simples, pues grado de $R(x) <$ grado de $Q(x)$.

Ejemplo 4: Calcular

$$\int \frac{2x^5-x^4-7x^3-x^2+6x+1}{x^4-x^3-3x^2+x+2}\,dx$$

¿Cómo es encuentran el polinomio cociente $C(x)$ y el polinomio resto $R(x)$? Veamos el ejemplo 4: Dividimos el primer monomio $2x^5$ de $P(x)$ entre el primer monomio x^4 de $Q(x)$. El resultado cociente es el monomio $2x$ será el primer término del polinomio cociente $C(x)$ que estamos buscando.

$$
\begin{array}{lll}
P(x) & & Q(x) \\
2x^5 - 1x^4 - 7x^3 - 1x^2 + 6x + 1 & | & x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = Q(x) \\
 & -- & ------------------------ \\
 & & 2x+
\end{array}
$$

Ahora multiplicamos el monomio cociente $2x$ que recién obtuvimos por $Q(x)$, y colocamos el resultado CAMBIADO de SIGNO abajo del polinomio $P(x)$:

$$
\begin{array}{lll}
P(x) & & Q(x) \\
+2x^5 - 1x^4 - 7x^3 - 1x^2 + 6x + 1 & | & x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 \\
 & -- & ---------------- \\
-2x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 4x & | & 2x+
\end{array}
$$

A continuación sumamos el polinomio $P(x)$ con el que está abajo, obteniendo un polinomio que se llama primer resto $R_1(x)$:

$$
\begin{array}{rlll}
 & P(x) & & Q(x) \\
 & +2x^5 - 1x^4 - 7x^3 - 1x^2 + 6x + 1 & | & x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 \\
 & & -- & ---------------- \\
 & -2x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 4x & | & 2x+ \\
 & --------------- & & \\
R_1(x) = & 0x^5 + \ 1x^4 - 1x^3 - 3x^2 + 2x + 1 & &
\end{array}
$$

Discutimos:

O bien el polinomio $R_1(x)$ es de grado menor estricto que el polinomio divisor $Q(x)$, o bien es de grado mayor o igual que este (en este ejemplo grado de $R_1(x) \geq$ grado de $Q(x)$.)

• 1er caso) Grado de $R_1(x) \geq$ grado de $Q(x)$: Repetimos el procedimiento anterior, usando $R_1(x)$ en lugar de $P(x)$. Obtendremos así un segundo resto $R_2(x)$. Y así seguimos hasta obtener un resto que sea de grado menor estricto que el polinomio divisor $Q(x)$.

• 2do. caso) Grado de $R_1(x) <$ grado de $Q(x)$: Terminó el proceso de división entera. El resto $R(x)$ que buscamos es el último $R_i(x)$ obtenido, y el polinomio cociente $C(x)$ es el que haya quedado a la derecha abajo de la raya de división.

$$
\begin{array}{rlll}
 & P(x) & & Q(x) \\
 & +2x^5 - 1x^4 - 7x^3 - 1x^2 + 6x + 1 & | & x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 \\
 & & -- & ---------------- \\
 & -2x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 4x & | & 2x + 1 \\
 & ---------------- & & \\
R_1(x) = & 0x^5 + \ 1x^4 - 1x^3 - 3x^2 + 2x + 1 & & \\
 & 0x^5 - \ 1x^4 + 1x^3 + 3x^2 - 1x - 2 & | & \\
 & ---------------- & & \\
R_2(x) = & 0x^5 + \ 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 1x - 1 & &
\end{array}
$$

Concluimos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x + 1 + \frac{x-1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int (2x+1)\,dx + \int \frac{x-1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}\,dx =$$

$$= x^2 + x + \int \frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)(x-2)}\,dx =$$

$$= x^2 + x + \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx$$

La integral a la derecha se resuelve mediante fracciones simples como se vio antes, pues el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

8. *a*) En el Ejemplo 4 expuesto más arriba terminar de calcular la integral.

   b) Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

   (i) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{2x + 1}\,dx$

   (iii) $\displaystyle\int \frac{x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 8x - x + 2}{x^3 - 3x + 2}\,dx$, (iv) $\displaystyle\int \frac{(x-2)(x^2 - 2x + 1) + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1}\,dx$

   Sugerencia para la integral (iv): no sacar los paréntesis en el numerador.

Combinación de varios métodos de integración: Para calcular algunas integrales, puede ser necesario combinar varios de los métodos de integración vistos. Por ejemplo, primero aplicar algún cambio de variables para modificar la expresión de la integral. Luego, para resolver la integral obtenida, aplicar partes o sustitución o fracciones simples.

9. *a*) Calcular las siguientes integrales aplicando primero el método de sustitución (o un cambio de variable adecuado):

   (i) $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}(\arctan t)^2 - 4\,dt$ Sugerencia: Recordar que $1/(1+t^2) = (\arctan t)'$.

   (ii) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 9}\,dx$ (iii) (optativo) $\displaystyle\int \frac{(\log x)\,\mathrm{sen}(\log x)}{x}\,dx$

   (iv) (optativo) $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{4 + x^2}}\,dx$. Sugerencia: Cambio de variable $u = u(x) = \sqrt{4 + x^2}$.

   b) (optativo) Chequear que son verdaderas las siguientes fórmulas y usarlas para calcular las integrales dadas más abajo:

   $$\text{Si} \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{entonces} \quad \mathrm{sen}\,x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

   Calcular las siguientes integrales mediante el cambio de variable $t = \tan(x/2)$.

   (i) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sen}\,x + \cos x}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{1 + \mathrm{sen}\,x + \cos x}\,dx$

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 11

Integrales definidas, Sumas de Riemann, Cálculo de Áreas
Teorema Fundamental del Cálculo y Valor Medio

Notación de la Integral Definida: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

REGLA DE BARROW: Sea $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ una función continua en el intervalo compacto $[a,b]$. Sea $F(x)=\int f(x)\,dx$ primitiva de f para todo $x\in(a,b)$. Adoptaremos la siguiente igualdad, llamada REGLA DE BARROW, como definición de "integral definida":
La integral definida de f en el intervalo en $[a,b]$ es:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a).$$

Los números a y b se llaman *extremos del intervalo de integración,* o también *límites de integración.*

CAMBIO DEL ORDEN DE LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN Se define

$$\int_b^a f(x)\,dx \;=\; -\int_a^b f(x)\,dx.$$

¡ATENCIÓN!: La integral definida NO es una función de la variable x de integración.

1. *a*) Calcular las siguientes integrales:
   (i) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,dx,$ (ii) $\displaystyle\int_0^a x^2\,dx$ (iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(4-x^2)}\,dx.$

   b) Probar las siguientes fórmulas a partir de las correspondientes para la integral indefinida vistas en el práctico anterior:

   Sustitución: $\displaystyle\int_a^b f(u(x))\,u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$

   Cambio de variables: $x=x(t)$ con inversa $t=t(x)$:
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{t(a)}^{t(b)} f(x(t))\cdot x'(t)\,dt=\int_{t(a)}^{t(b)}\frac{f(x(t)}{t'(x(t)}\,dt$$

   Integración por partes: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx=\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$

   c) Hacer una TABLA de fórmulas y propiedades de INTEGRAL DEFINIDA, que incluya la regla de Barrow y las tres fórmulas de la parte anterior.

2. *a*) Calcular las siguientes integrales aplicando el cambio de variable que se indica:

$$\text{(i)} \int_2^5 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}, \quad x = t^2+1 \qquad\qquad \text{(ii)} \int_0^2 \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\, dx, \quad x = 4\operatorname{sen}^2 t - 2.$$

b) Haciendo un cambio de variable adecuado $u = u(x)$, probar que para todos $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente igualdad

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\, dx$$

c) Calcular $\int_0^1 x^2(1-x)^{99}\, dx$.

d) Demostrar que para cualquier función continua $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_0^\pi x \cdot f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

Sugerencia: en la integral de la izquierda hacer el cambio de variable $u = \pi - x$.

e) Calcular $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

3. *a*) Probar, usando la regla de Barrow, la siguiente fórmula llamada "Propiedad de Aditividad del Intervalo de Integración":

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

b) Agregar esta última fórmula de Aditividad del Intervalo a la Tabla de Propiedades de la Integral Definida (parte c) del ejercicio 1).

CÁLCULO DE ÁREAS Y SUMAS DE RIEMANN

4. Estudiar del libro "Análisis Matemático I"de F. Paganini, desde la página 84, Integrales, hasta el final de la página 85. Hacer el siguiente ejercicio sobre el texto estudiado:

a) Sea $a > 0$ una constante real. Sea $n \in \mathbb{N}^+$. Se parte el intervalo $[0, a]$ en n subintervalitos iguales de longitud a/n cada uno. Verificar que para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, el i-ésimo intervalito de esa partición es

$$I_i = \left[\frac{i-1}{n}\,a, \quad \frac{i}{n}\,a\right]$$

b) Sea la función $f(x) = 5 + x^2$ con dominio en el intervalo $[0, a]$:
(i) Graficar f.
(ii) Dibujar en el intervalo $[0, a]$ los subintervalitos I_i de la parte a) para algún valor de $n \geq 10$ fijo.
(iii) Elegir un valor $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y pintar de verde el rectángulo R_i (flaco y alto) que tiene base (horizontal) el intervalito I_i y altura (vertical):

$$\text{altura del rectángulo } R_i = f(x_i), \text{ donde}$$

donde

$$x_i = \text{ extremo derecho del subintervalo } I_i.$$

(iv) Denotar

$$\Delta x_i = \text{ longitud del subintervalo } I_i.$$

Calcular el área de R_i (base $\times$ altura) en función de n y de a.

(v) En el dibujo realizado, pintar de gris la suma de las áreas encerradas por todos los rectangulitos R_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$.

(vi) En el dibujo realizado, pintar de rojo el "error" ϵ (la diferencia) entre la suma de las áreas de todos los rectangulitos R_i y el área total comprendida abajo de la curva gráfica de la función f (arriba del intervalo $[0, a]$).

(vii) Chequear gráficamente e intuitivamente que el error ϵ definido en la parte (vi) debe tender a cero cuando la cantidad n de subintervalos I_i de la partición tiende a $+\infty$. Explicar por qué.

c) Sea el área gris pintada en la parte anterior de este ejercicio. Probar las siguientes igualdades (para la última igualdad ver la sugerencia abajo):

$$\text{Area gris } = \sum_{i=1}^{n} \text{área}(R_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{5a}{n} + \frac{a^3}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = 5a + a^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

Sugerencia: Se puede probar por inducción completa (ver Práctico 2) que para todo $n \in \mathbb{N}^+$ vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

d) A partir del resultado de la parte anterior, haciendo $n \to +\infty$, demostrar que el área A abajo de la parábola $y = f(x) = 5 + x^2,\ x \in [0, a]$ es

$$A = 5a + \frac{a^3}{3} = \int_0^a f(x)\,dx.$$

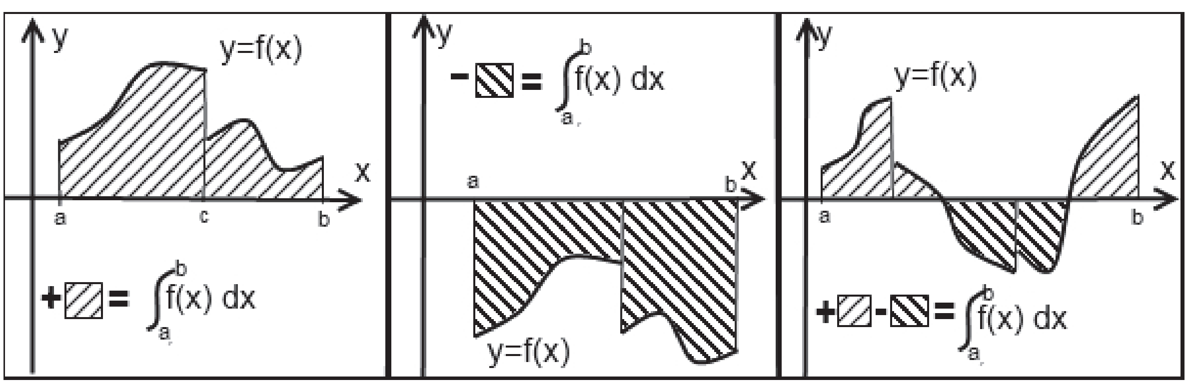

Figura 1: Cuadro izquierdo: El área rayada abajo de la gráfica de una función continua a trozos $y = f(x) \geq 0,\ x \in [a, b]$ es $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Cuadro del medio: Para $y = f(x) \leq 0,\ x \in [a, b]$, la integral definida en $[a, b]$ es $-$ el área rayada. Cuadro derecho: Si f cambia de signo, su integral definida es la suma algebraica de las áreas rayadas con signo $+$ donde $f > 0$ y con signo $-$ donde $f < 0$.

Al final del curso, al definir Integral de Riemann, demostraremos el siguiente teorema:

TEOREMA del límite de las SUMAS de RIEMANN (Integral de Cauchy)

Sean $a < b$ reales fijos. Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua, o seccionalmente continua (i.e. "continua a trozos", ver Figura 1).

Entonces existe el siguiente límite y es igual a la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx,$$

donde Δ_{x_i} es la longitud del intervalito i-ésimo I_i de una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalitos iguales, y x_i es un punto *cualquiera* del intervalo $[a, b]$ tal que $x_i \in I_i$.

Definición de Suma de Riemann:

La sumatoria en el Teorema anterior se llama *SUMA DE RIEMANN,* y se denota $S(n, f)$:

$$S(n, f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

El Teorema de la Suma de Riemann establece que cuando f es seccionalmente continua

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} S(n, f).$$

Si $x_i \in I_i$ se elije, en cada subintervalito, tal que $f(x_i) = \sup\{f(x) : \ x \in I_i\}$ entonces la suma de Riemann se llama *Suma de Riemann Superior,* y se denota $\overline{S}(n, f)$.

Si $x_i \in I_i$ se elije en cada subintervalito tal que $f(x_i) = \inf\{f(x) : \ x \in I_i\}$ entonces la suma de Riemann se llama *Suma de Riemann Inferior,* y se denota $\underline{S}(n, f)$.

Entonces, por definición de supremo y de ínfimo de una función en un intervalo I_i, tenemos

$$\underline{S}(n, f) \leq S(n, f) \leq \overline{S}(n, f).$$

Corolario de CÁLCULO DE ÁREAS

Sean $a < b$ números reales fijos.

• Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función no negativa $f \geq 0$, seccionalmente continua como la de la Figura 1, cuadro izquierdo. Entonces, el área rayada abajo de la curva gráfica de $f(x)$ y arriba del eje de las x, es $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$a < b, \quad f \geq 0 : \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \text{Area rayada} \geq 0.$$

• Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función no positiva $f \leq 0$, seccionalmente continua (o "continua a trozos") como la de la Figura 1, cuadro del centro. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual, con signo cambiado, al área rayada arriba de la curva gráfica de $f(x)$ y abajo del eje de las x:

$$a < b, \quad f \leq 0 : \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\text{Area rayada} \leq 0.$$

• Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función seccionalmente continua (o "continua a trozos") como la de la Figura 1 cuadro derecho. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual a la suma algebraica de las área A_i rayadas que quedan abajo de la gráfica de f donde $f \geq 0$, menos las áreas A_j rayadas que quedan arriba de la gráfica de f donde $f \leq 0$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area rayada (donde } f \geq 0) - \text{Area rayada (donde } f \leq 0).$$

¡ATENCIÓN! El área de cualquier región es siempre POSITIVA o cero. Lo que puede dar negativo es la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Supongamos $a < b$. La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ será positiva si el área rayada donde $f \geq 0$ es mayor que el área rayada donde $f \leq 0$. La integral da cero si ambas áreas rayadas son iguales. Y da negativa si el área donde $f \geq 0$ es menor que el área donde $f \leq 0$.

5. Calcular las áreas de las regiones abajo de las curvas gráficas de las siguientes funciones (chequear primero que son funciones seccionalmente continuas y no negativas en los intervalos dados)

   a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{4 - x^2}, \quad x \in [-1, 1],$

   b) $f : [0, 2] \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1, \quad f(x) = 1 + \cos(\pi(x - 1))$ si $1 \leq x \leq 2$.

6. Calcular el área encerrada entre:

   a) la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x + 3$.

   b) (i) la curva $y = e^x$, la curva $y = e^{-x}$ y la recta vertical $x = 1$.
   (iii) la curva $y = e^x$, la curva $y = e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e^2$.

   c) las curvas $y = 1/x^2, \ y = -1/x^2$ y las rectas verticales $x = 1$ y $x = a$ donde a es una constante fija mayor que 1.

   d) las curvas $y = 1/x^2, \ y = -1/x^2$ para $x \geq 1$. Nota: por definición esta área A es el límite cuando $a \to +\infty$ del área hallada en la parte anterior, cuando este límite existe y da finito; y por convención se dice que el área A es infinita si ese límite da infinito.

   Deducir que el área de una región no acotada del plano puede ser finita.

7. **Área del círculo y de la elipse**

   a) Demostrar que el área de un círculo de radio R es igual a πR^2. (Sugerencia: despejar y de la inecuación $x^2 + y^2 \leq R^2$.)

   b) Sean $a, b > 0$ constantes reales. Se llama elipse de semiejes a y b, al lugar geométrico de los puntos en el plano que verifican la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

   Demostrar que el área de la región encerrada por la elipse de semiejes a, b es igual a πab.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea $f(x)$ continua. Se dan dos números reales t_0 y t tal que el intervalo $[t_0, t]$ está contenido en el dominio de f. Denotamos:

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} f(x)\, dx$$

porque el resultado numérico G de la integral calculada a la derecha depende del número real dado t (y también depende de t_0).

Entonces

$$G(t) \text{ es derivable respecto de } t \text{ y además } G'(t) = f(t).$$

En otras palabras, G es primitiva de f.

8. *a*) Agregar la fórmula del teorema fundamental del Cálculo a la Tabla de Propiedades de Integral Definida (ejercicio 1 parte c).

   b) Calcular la derivada respecto de t de las siguientes integrales:

$$\int_0^t e^{-x^2}\, dx, \qquad \int_0^{t^2} e^{-x^2}\, dx, \qquad \int_{-1}^{t} e^{-x^2}\, dx, \qquad \int_t^2 e^{-x^2}\, dx, \qquad \int_{-t^2}^{3} e^{-x^2}\, dx$$

   c) Sea $H(t) = \displaystyle\int_t^{t_0} f(x)\, dx$ donde t_0 es constante, y f es continua en el intervalo comprendido entre t_0 y t Demostrar que $H'(t) = -f(t)$.

   d) Agregar la fórmula de la parte anterior a la Tabla de Propiedades de la Integral Definida.

   e) Sea f función continua, y sean u y v funciones derivables. Sea

$$H(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} f(x)\, dx.$$

   Usando el Teorema Fundamental del Cálculo y usando la regla de la cadena, probar que:

$$H'(x) = f(u(t)) \cdot u'(t) - f(v(t)) \cdot v'(t).$$

   f) Agregar la fórmula de la parte anterior a la Tabla de Propiedades de la Integral Definida (ejercicio 1 parte c).

   g) Calcular la derivada respecto de t de las siguientes integrales:

   (i) $\displaystyle\int_{t^2}^{\log t} e^{-x^2}\, dx$ (ii) $\displaystyle\int_{-\cos t}^{+\operatorname{sen} t} \cos(x^2)\, dx$ (iii) $\displaystyle\int_{e^{-t}}^{e^{t^2}} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$

9. **Valor Medio de una función y Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral**

Estudiar en el libro "Análisis Matemático I"de F. Paganini desde la página 91, Teoremas Fundamentales, omitiendo las demostraciones, hasta la página 96 donde dice "Cálculo de Primitivas". Hacer los siguientes ejercicios sobre el texto leído:

a) Sea, como en el ejemplo 225 del libro (pág. 94), la función $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$, $g(x) = 0$ si $x \notin [0, 1]$. Graficar g, calcular la función $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ y graficar G. Chequear que $G'(x)$ existe para todo punto $x \notin \{0, 1\}$ y que donde existe se cumple $G'(x) = g(x)$.

b) Sea, como en el ejemplo 230 del libro (pág. 96), una función continua $f(t)$ y una constante c real tales que

$$\int_c^x f(t) = \cos x - (1/2).$$

Hallar la función $f(t)$ y la constante c.

c) Agregar a la Tabla de Propiedades de integral definida (ejercicio 1 parte c) la definición de Valor Medio de una función f en el intervalo $[a, b]$ (Definición 219, página 92 del libro), y el enunciado del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral (Teorema 32, página 92 del libro).

d) Hallar el valor medio de la función $|\operatorname{sen} x|$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

e) Dar un ejemplo de una función $f : [0, 2] \mapsto \mathbb{R}$ no continua pero seccionalmente continua tal que su valor medio en el intervalo $[0, 2]$ no sea alcanzado por f en ningún punto $x \in [0, 2]$.

f) Hallar los valores medios de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

(i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ en el intervalo $[1, 2]$

(ii) $g(x) = \cos^2 3x$ en el intervalo $[0, \pi/12]$.

(iii) $h(x) = \sqrt[n]{x}$ en el intervalo $[0, 1]$ donde n es un número natural positivo fijo.

g) Para cada una de las funciones de la parte anterior, encontrar algún valor de x_0 en el respectivo intervalo, donde se alcanza su valor medio.

NOTA IMPORTANTE: El orden en que enunciamos algunos de los teoremas en el Repartido 11, NO es el orden lógico de sus demostraciones, sino que es un orden establecido nada más que por razones pedagógicas. Las demostraciones están en uno de los repartidos al final del curso.

El procedimiento clásico de demostración de los teoremas es en cadena, uno tras otro, usando los teoremas anteriores en la demostración del siguiente. **Pero en lo que respecta a los teoremas enunciados en este Repartido 11, el orden de sus demostraciones es totalmente diferente del que aparecen enunciados aquí**.

Por ejemplo el Teorema I es el de Límite de Suma de Riemann: es el primero que se demuestra usando nada más que propiedades de continuidad de funciones. Y el último Teorema en poder ser demostrado será la Regla de Barrow.

Sin embargo en este Repartido 11 lo primero que enunciamos y usamos para hacer ejercicios, fue la Regla de Barrow.

En resumen en este repartido, asumimos como verdaderos todos los teoremas enunciados sin haber demostrado ninguno, tomándonos la libertad de enunciarlos en un orden diferente del de la lógica de sus demostraciones, para poder plantear y realizar ejercicios desde el principio.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 12
Integrales Impropias

Integrales Impropias de 1a. especie (*)

- $\displaystyle\int_k^{+\infty} f(x)\,dx =$ (por definición) $= \lim_{X\to+\infty} \int_k^X f(x)\,dx$ (Ver Figura 1, cuadro izquierdo arriba)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx =$ (por definición) $= \lim_{X\to-\infty} \int_X^k f(x)\,dx$ (Ver Figura 1, cuadro derecho arriba)

Integrales Impropias de 2a. especie (**)

- Cuando $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ y $k > a$:

$\displaystyle\int_a^k f(x)\,dx =$ (por definición) $= \lim_{X\to a^+} \int_X^k f(x)\,dx$ (Ver Figura 1, cuadro izquierdo abajo)

- Cuando $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ y $k < a$:

$\displaystyle\int_k^a f(x)\,dx =$ (por definición) $= \lim_{X\to a^-} \int_k^X f(x)\,dx$ (Ver Figura 1, cuadro derecho abajo)

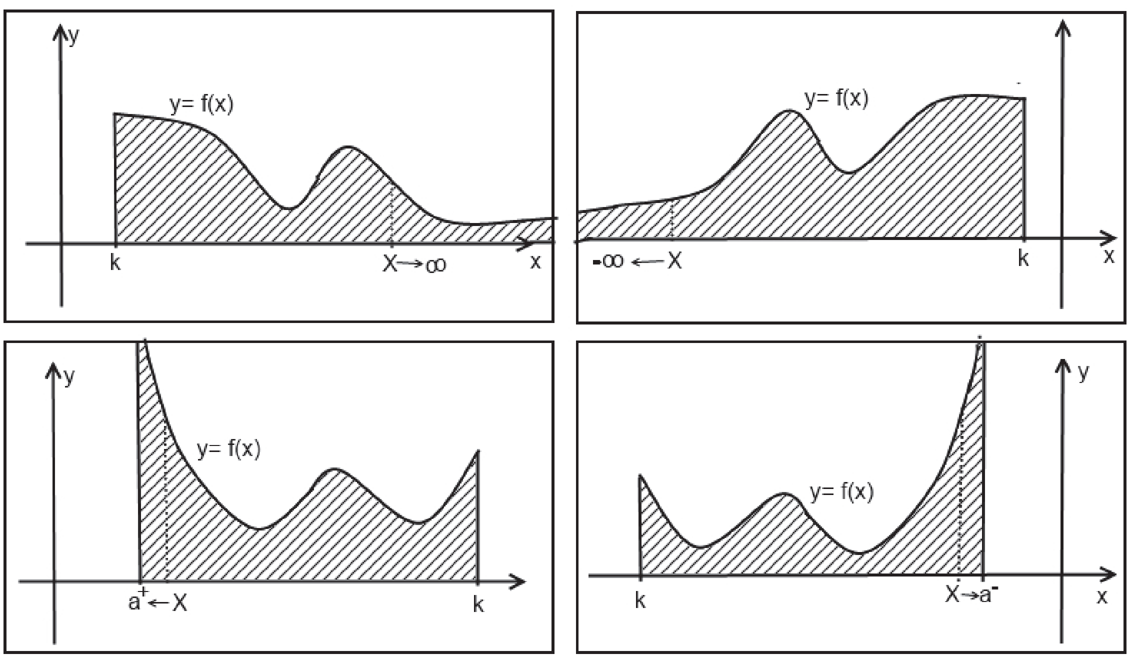

Figura 1: Las áreas rayadas son integrales impropias. Arriba: integrales impropias de 1a. especie. Abajo: integrales impropias de 2da. especie.

Convergencia de la integral impropia de 1a. o 2a. especie

Una integral impropia se llama convergente si existe (real finito) el límite que la define en la igualdad que le corresponda de la Definición (*), si es de 1ra especie, o en la Definición (**), si es de 2da. especie.

Observar que aquí la palabra "integral" de está utilizada abusando del significado de la palabra, pues una integral impropia no es en realidad una integral, sino un *límite (de integrales que dependen de un parámetro X):*

No Convergencia de la integral impropia de 1a. o 2da. especie

Cuando no existe el límite en la igualdad (*) ó (**), o cuando ese límite es infinito, se dice que la integral impropia es no convergente.

Dentro de la clase de integrales impropias no convergentes, una clase especial es la de las integrales impropias "Divergentes". Estas son aquellas tales que la igualdad que la define en (*) o (**) es la de una integral definida que tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ o a ∞ (+ o -) al variar el límite de integración X. En este caso la integral impropia en realidad no existe, pero abusando del lenguaje, decimos que la integral impropia es igual a ∞.

1. Estudiar del libro "Análisis Matemático I" de F. Paganini, desde la página 115, Integrales Impropias, hasta el final de la página 117; y desde la página 123, Integrales impropias de segunda especie, hasta el final de la página 124.

   Resolver los siguientes ejercicios sobre el texto leído:

   a) **Integrales "referentes" de 1a. especie.** Sea α constante real.
   Probar que:
   $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge} & \Leftrightarrow \quad \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \Leftrightarrow \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

   b) **Integrales "referentes" de 2a. especie** Sea α constante real.
   (i) Probar que:
   $$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge} & \Leftrightarrow \quad \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \Leftrightarrow \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$
   (ii) Sean $h < b < k, \quad \alpha \in \mathbb{R}$. Probar que:
   $$\int_h^{b} \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx, \qquad \int_b^{k} \frac{1}{(x-b)^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{convergen} & \Leftrightarrow \quad \alpha < 1 \\ \text{divergen} & \Leftrightarrow \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

   c) Clasificar en convergentes o no convergentes las siguientes integrales impropias de 1a. especie, y si son convergentes calcularlas:
   (i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$.
   (iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (ver primero la Definición 260 en la página 116 del libro).
   (v) (optativo) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{5x+2}{4(x+1)^2+1}\,dx$, (vi)(optativo) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+5}}$
   (vii) (optativo) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(3x+2)^{3/2}}$.
   Sugerencia: Encontrar primero las primitivas de las funciones dentro de las integrales.

   d) Clasificar en convergentes o no convergentes las siguientes integrales de 2da. especie, y si son convergentes calcularlas:
   (i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$, (iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$.
   Sugerencia: En el repartido 10 ver cómo se calculan las primitivas de las funciones dentro de las integrales.

   e) (optativo) Sea α un número real cualquiera fijo. Clasificar en convergente o no convergente cada una de las siguientes integrales de 1a. o 2a. especie, discutiendo según α, y cuando es convergente calcularla:
   (i) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot (\log x)^\alpha}$. (ii) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x \cdot (\log x)^\alpha}$.

2. (optativo)

   a) Sea
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [n, n + (1/2^n)] \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
   Graficar f, demostrar que la integral impropia $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente, y calcularla.
   Sugerencia: Puede ser útil usar la siguiente igualdad, que se prueba por inducción completa en n: $\sum_{n=0}^{N}(1/2)^n = 2 - (1/2)^N \quad \forall\, N \in \mathbb{N}^+$.

   b) Demostrar que si existe el límite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y si $\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente entonces $L = 0$.

   c) Demostrar que la siguiente integral impropia es divergente: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{7x^3 + 2x + 5}{\sqrt{2x^6 + x^2 + 1}}\,dx$

   d) Dar un ejemplo de integral impropia de 1a. especie $\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$ que sea convergente y tal que NO exista el límite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. (Sugerencia: usar la parte a.)

INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIÓN NO NEGATIVA

Son las integrales impropias tales que la función integrando f es ≥ 0.

Importante: Las integrales impropias de funciones no negativas o bien convergen o bien divergen a $+\infty$ (nunca oscilan).

En la Tabla (I) se dan métodos y criterios para clasificar en convergentes o divergentes las integrales impropias de funciones no negativas. Estos métodos se pueden aplicar siempre que se verifiquen las condiciones en la columna "Condición a chequear" de la Tabla.

Los métodos de la tabla (I) son particularmente útiles cuando no se puede calcular directamente en forma explícita una fórmula de las integrales a la derecha en las igualdades de las definiciones (*) y (**). Con los criterios de la tabla (I) se pueden clasificar muchas integrales impropias sin necesidad de calcularlas.

Integral impropia de función no positiva: Es aquella para la cual la función en el integrando es $f \leq 0$.

Para clasificar una integral impropia de función no positiva, podemos usar los mismos criterios que para clasificar una de función no negativa, así:

Primero cambiamos de signo a la función dada (no positiva) dentro de la integral. La nueva integral impropia es de función no negativa.

Después a la nueva integral impropia le aplicamos los criterios de la Tabla (I).

Si la nueva integral (de función no negativa) converge entonces la integral dada (de función no positiva) converge. Y si la nueva integral diverge a $+\infty$ entonces la integral impropia dada diverge a $-\infty$.

Además, cuando una de estas dos integrales impropias (y por lo tanto ambas) convergen, el valor de la integral dada es igual al de la integral nueva cambiada de signo.

TABLA I - Métodos de clasificación de integrales impropias de funciones no negativas

Método	Integral impropia dada	Condición a chequear ADEMÁS de $f \geq 0$	Resultado
Límite de f	1a. especie $\int_k^{+\infty} f$	$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$	
		$L \neq 0 \Rightarrow$	$\int_k^{+\infty} f$ DIVERGE
		$L = 0$	Este método no clasifica
		$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$	$\int_k^{+\infty} f$ DIVERGE
		$\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$	Este método no clasifica
Comparación por desigualdades:	1a. especie $\int_k^{+\infty} f$	construyo $g \geq 0$ tal que $f \leq g,$ y $\int_h^{+\infty} g$ CONVERGE $\Rightarrow$	$\int_k^{+\infty} f$ CONVERGE
Comparación por desigualdades:	2a. especie $\int_a^k f$	construyo $g \geq 0$ tal que $f \leq g,$ y $\int_a^h g$ CONVERGE $\Rightarrow$	$\int_a^k f$ CONVERGE
Comparación por desigualdades:	1a. especie $\int_k^{+\infty} f$	construyo $g \geq 0$ tal que $f \geq g,$ y $\int_h^{+\infty} g$ DIVERGE $\Rightarrow$	$\int_k^{+\infty} f$ DIVERGE
Comparación por desigualdades:	2a. especie $\int_a^k f$	construyo $g \geq 0$ tal que $f \geq g,$ y $\int_a^h g$ DIVERGE $\Rightarrow$	$\int_a^k f$ DIVERGE

Continúa...

Continuación de la TABLA I - Métodos de clasificación de integrales impropias de funciones no negativas

Método	Integral	Condición a chequear ADEMÁS de $f \geq 0$	Resultado
Comparación por límites:	1a. especie $\int_k^{+\infty} f$	construyo $g \geq 0$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f/g = L \in \mathbb{R}, \quad L \neq 0$ Si $\int_h^{+\infty} g$ CONVERGE, entonces Si $\int_h^{+\infty} g$ DIVERGE, entonces	 $\int_k^{+\infty} f$ CONVERGE $\int_k^{+\infty} f$ DIVERGE
Comparación por límites:	2a. especie $\int_a^k f$	construyo $g \geq 0$ tal que $\lim_{x\to a^+} f/g = L \in \mathbb{R}, \; L \neq 0$ Si $\int_a^h g$ CONVERGE, entonces Si $\int_a^h g$ DIVERGE, entonces	 $\int_a^k f$ CONVERGE $\int_a^k f$ DIVERGE
Comparación por límites:	1a. especie $\int_k^{+\infty} f$	construyo $g \geq 0$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f/g = 0$ Si $\int_h^{+\infty} g$ CONVERGE, entonces	 $\int_k^{+\infty} f$ CONVERGE
Comparación por límites:	2a. especie $\int_a^k f$	construyo $g \geq 0$ tal que $\lim_{x\to a^+} f/g = 0$ Si $\int_a^h g$ CONVERGE, entonces	 $\int_a^k f$ CONVERGE
Comparación por límites:	1a. especie $\int_k^{+\infty} f$	construyo $g \geq 0$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f/g = +\infty$ Si $\int_h^{+\infty} g$ DIVERGE, entonces	 $\int_k^{+\infty} f$ DIVERGE
Comparación por límites:	2a. especie $\int_a^k f$	construyo $g \geq 0$ tal que $\lim_{x\to a^+} f/g = +\infty$ Si $\int_a^h g$ DIVERGE, entonces	 $\int_a^k f$ DIVERGE

3. Clasificar en convergentes o divergentes las siguientes integrales impropias de funciones positivas:

   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, dt$ donde $n \in \mathbb{N}^+$.
   Sugerencia: ver Ejemplo 270 del libro "Análisis Matemático I".

   b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1/\sqrt{x^3+1})\, dx$.

   Sugerencia: aplicar comparación por desigualdades probando que $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leq \dfrac{1}{x^{3/2}}$.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1/\sqrt{x^2+1})\,dx$. Sugerencia: aplicar comparación por límites usando $g(x) = 1/x$ y recordando que $\int_1^{+\infty}(1/x)\,dx$ diverge.

d) Demostrar, sin calcular, que la siguiente integral impropia es divergente

$$\int_0^1 \frac{x}{(x-1)^2}\,dx.$$

Sugerencia: comparar por límites con $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$. Notar que es impropia cuando $x \to 1$; no es impropia cuando $x = 0$. Por lo tanto el límite por comparación debe calcularse cuando $x \to 1$.

e) (optativo) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(e^{1/t} - 1 - (1/t)\Big)\,dt$. Sugerencia: Comparar por límites con $\int_1^{+\infty}(1/t^2)\,dt$. Para calcular el límite del cociente adecuado de funciones, usar L'Hôpital.

f) Clasificar las siguientes integrales impropias de funciones de signo constante:

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, (ii) (optativo) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x + e^{-x}}\,dx$, (iii) (optativo) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$,

(iv) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2-1}$, (v) (optativo) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$, (vi) (optativo) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

4. (optativo)

a) Se define la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \lim_{N\to+\infty} \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{N}\Big).$$

(i) Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\,dx$. (ii) Usando que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} (1/x)\,dx$ es divergente, demostrar que la serie armónica es divergente.

b) Demostrar que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx$ diverge.

Sugerencia: Probar que $\dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x} \geq \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{\pi \cdot n(x)}$ donde para cada real $x \geq 1$, $n(x)$ es el único natural positivo tal que $n(x) - 1 < \dfrac{x}{\pi} \leq n(x)$.

Después demostrar que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \geq \frac{1}{\pi} \cdot \Big(\int_\pi^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx\Big)\Big(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\Big)$.

Finalmente usar la parte a) para deducir que la integral impropia dada es divergente.

INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIÓN QUE CAMBIA DE SIGNO

Son las integrales impropias tales que para todo x suficientemente grande la función integrando $f(x)$ cambia de signo.

En la Tabla (II) se dan métodos y criterios para clasificar en convergentes o no convergentes las integrales impropias de funciones que cambian de signo. Estos métodos se pueden aplicar siempre que se verifiquen las condiciones en la columna "Condición a chequear" de la Tabla.

TABLA II - Métodos de clasificación de integrales impropias de funciones que cambian de signo

Método	Integral impropia dada	Condición a chequear ADEMÁS de $f \geq 0$	Resultado
Límite de f	1a. especie $\int_k^{+\infty} f$	$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$	
		$L \neq 0 \Rightarrow$	$\int_k^{+\infty} f$ DIVERGE
		$L = 0 \Rightarrow$	Este método no clasifica
		$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$	$\int_k^{+\infty} f$ DIVERGE
		$\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x) \Rightarrow$	Este método no clasifica
Convergencia absoluta:	1a. especie $\int_k^{+\infty} f$	Estudio $\lvert f\rvert \geq 0$ $\int_h^{+\infty} \lvert f\rvert$ CONVERGE $\Rightarrow$	$\int_k^{+\infty} f$ CONVERGE y además CONVERGE ABSOLUTAM.
Convergencia absoluta:	1a. especie $\int_k^{+\infty} f$	Estudio $\lvert f\rvert \geq 0$ $\int_h^{+\infty} \lvert f\rvert$ DIVERGE	Este método no clasifica
Convergencia absoluta:	2a. especie $\int_a^k f$	estudio $\lvert f\rvert \geq 0$ $\int_a^h \lvert f\rvert$ CONVERGE $\Rightarrow$	$\int_a^k f$ CONVERGE y además CONVERGE ABSOLUTAM.
Convergencia absoluta:	2a. especie $\int_a^k f$	estudio $\lvert f\rvert \geq 0$ $\int_a^h \lvert f\rvert$ DIVERGE	Este método no clasifica

5. Estudiar del libro "Análisis Matemático I "desde la página 121, Integrales con signo cualquiera, hasta el final de la página 122. Solucionar los siguientes ejercicios sobre el texto leído:

   a) Demostrar que $\int_1^{+\infty} (\operatorname{sen} t)/t^2\, dt$ converge absolutamente. Deducir que converge.

   b) (optativo) Demostrar que $\int_1^{+\infty} (\operatorname{sen} t)/t\, dt$ NO converge absolutamente, pero sin embargo converge. (Sugerencia: Usar el resultado del Ejercicio 4 parte b) y ver Ejemplo 277 del libro).

   c) (optativo) Clasificar la siguiente integral impropia, llamada integral de Fresnel:

   $$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(t^2)\, dt.$$

   (Sugerencia: integrar por partes, ver ejemplo 279 del libro).

   d) (optativo) Probar que $\int_0^{+\infty} t\cos(t^4)\, dt$ converge. (Sugerencia: integrar por partes, en forma similar a la integral de la parte anterior.)

   e) (optativo) Exhibir un contraejemplo que muestre que lo siguiente:

   $$\int_k^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge } \not\Rightarrow \; f \text{ acotada} .$$

6. Demostrar, en el caso de integrales impropias de 1a. especie, el siguiente Teorema:

   Teorema: *Si una integral impropia converge absolutamente entonces es convergente.*

   Sugerencia: estudiar, consultar hasta entenderla, y tratar de reproducirla tantas veces como sea necesaria hasta poder escribirla sin mirar el libro, la demostración de la página 121 del libro "Análisis Matemático I".

   Definición:

   Se llama **integral impropia de 3ra. especie** cuando es la suma de una integral de 1a. especie con una de 2da. especie. Un integral de 3a. especie se dice convergente, por definición, cuando las de 1a. y 2da. especie (de las cuales es suma), son **ambas convergentes.** Se dice no convergente en caso contrario, es decir cuando una de las dos de 1a. y 2a. especie es convergente pero no la otra, o cuando ninguna de las dos es convergente.

   Ejemplo: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ es una integral de 3a. especie porque es la suma de

   $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

   El primer sumando es una integral de 2da. especie no convergente, y el segundo sumando es una integral de 1a. especie convergente. Por lo tanto la integral impropia dada de 3a. especie es NO CONVERGENTE.

7. *a*) (i) Probar que las siguientes integrales impropias son convergentes y relacionarlas entre sí:

   $$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\, dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx.$$

   Sugerencia: Usar comparación por límites para clasificar la segunda integral. Aplicar a la primera integral el cambio de variable $u = 1/x$.

   (ii) Deducir que la siguiente integral converge y deducir su valor:

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx.$$

   Sugerencia: Usar la parte (i).

b) Hallar el valor real positivo de k para que la siguiente integral sea convergente, y calcularla:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1}\right) dx.$$

8. (optativo) Para cada valor de $n \in \mathbb{N}^+$ se dan dos números reales no negativos $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$.

   Se construye la siguiente función $f : [1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} n^{1/2}(x-n) & \text{si } n \leq x < n + n^{-1} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+ \\ b_n \cdot (n+1-n^{-1}-x) & \text{si } n+1-n^{-1} \leq x < n+1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+ \\ a_n & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) Graficar f y probar que f es continua a trozos (es decir, seccionalmente continua) en cualquier intervalo acotado contenido en su dominio.

   b) Hallar a_n y b_n para que f sea continua para todo $x \geq 1$.

   c) Con los valores de a_n y b_n hallados en la parte anterior, calcular

$$\int_1^N f(x)\, dx$$

   para todo $N \in \mathbb{N}^+$. (Nota: la integral debe quedar dependiendo solamente de N.)

   d) Para cada $N \in \mathbb{N}^+$ fijo, se denota $S(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{3/2}}$. Sabiendo que existe el siguiente límite

$$L = \lim_{N \to +\infty} S(N) = L \in \mathbb{R}^+,$$

   demostrar que la siguiente integral impropia es convergente y calcularla:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx.$$

   (Nota: el valor de la integral impropia debe quedar en función de L solamente.)

   e) Demostrar con un ejemplo que una integral impropia de 1a. especie de una función continua no negativa puede ser convergente y la función en el integrando puede no estar acotada superiormente.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 13
Sucesiones y subsucesiones de reales.
Teorema de Bolzano-Weierstrass (para sucesiones y para conjuntos)
Teorema de compacidad secuencial.

Estudiar del libro "Análisis Matemático I"de F. Paganini, desde la página 33, Sucesiones hasta el final de la página 35.

Nota importante: Se observa que cuando se escribe $\lim a_n = L$, siendo a_n una sucesión de reales, se debe entender que el límite se toma para n natural, $n \to +\infty$.

Definición: Una sucesión es convergente si existe su límite real (finito). Una sucesión es no convergente si no existe su límite real (finito). Por ejemplo, si $\lim a_n = +\infty$ entonces a_n es no convergente. Otro ejemplo, si no existe $\lim a_n$ (ni finito ni infinito), la sucesión es no convergente.

Resolver los siguientes ejercicios sobre el texto leído:

1. *a*) Usando solamente la definición de límite demostrar las siguientes propiedades:
   (i) $\lim a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim(a_n - L) = 0$,
   (ii) $\lim a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim |a_n| = 0$.
   (iii) $\lim a_n = L \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim |a_n| = |L|$
   (Observación: el recíproco de la parte (iii) es falso).

   b) (optativo) Del libro "Análisis Matemático I ", página 38, leer el enunciado del Teorema 2 (Propiedades Algebraicas de Límites). Usando ese teorema, probar las siguientes afirmaciones:
   (i) $\lim a_n = L, \;\; \lim(a_n - b_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim b_n = L$.
   (ii) $\lim a_n = 1, \;\; \lim(a_n \cdot b_n) = L \quad \Rightarrow \quad \lim b_n = L$.

2. *a*) **Sobre la definición de límite. Estrategia de cálculo de n_0 en función de $\epsilon > 0$**
   Sea $a_n = \dfrac{n+3}{n+4}$.
   Usando las reglas de cálculo de límites de funciones del repartido 8, sabemos que $\lim a_n = 1$.
   Usar la definición de límite de una sucesión, y la sugerencia que está más abajo para resolver lo siguiente:
   Dado $\epsilon > 0$ cualquiera arbitrario, encontrar n_0 (que depende de ϵ) tal que:

   $$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \epsilon \qquad \text{(T)}$$

   Nota importante: La afirmación (T) es un **Teoremita** metido dentro de la definición de límite.
   Sugerencia: Imaginar que ya se conoce n_0 en función de ϵ que hace que uno pueda demostrar el teoremita (T). Entonces demostrar el teoremita así:
   Hipótesis: $n > n_0$
   Tesis: $\left|\Big((n+3)/(n+4)\Big) - 1\right| < \epsilon$.
   Demostración: Mirando y operando con el primer miembro de la tesis (sin usar la desigualdad de la tesis, o sea sin usar la afirmación que hay que probar como tesis), tenemos

   $$\left|\frac{n+3}{n+4} - 1\right| = \left|\frac{(n+3)-(n+4)}{n+4}\right| = \left|\frac{-1}{n+4}\right| = \frac{1}{n+4}.$$

   Usando la hipótesis

   $$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad n+4 > n_0+4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+4} < \frac{1}{n_0+4}$$

Juntando la igualdad obtenida al principio con la desigualdad obtenida recién, obtenemos:

$$\left|\frac{n+3}{n+4} - 1\right| < \frac{1}{n_0+4}$$

Entonces hemos probado la tesis, con la condición de que hayamos elegido n_0 de modo que:

$$\frac{1}{n_0+4} \leq \epsilon.$$

Fin de la demostración del teoremita (T).

Conclusión: Para que sea cierto el teoremita (T), y por lo tanto la definición de límite, basta elegir n_0 en función de ϵ de modo que $\dfrac{1}{n_0+4} = \epsilon$. Finalmente despejamos n_0 en función de ϵ, y hemos encontrado la fórmula que se pedía en este ejercicio.

b) Para la misma sucesión a_n de la parte anterior, y para el mismo valor de $\epsilon > 0$ encontrar otros dos valores $n_1, n_2 \neq n_0$, ambos diferentes entre sí, tales que:

$$n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \epsilon,$$

$$n \geq n_2 \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \epsilon.$$

(Sugerencia: no hacer cuentas, solo analizar la definición de límite y responderse a uno mismo la siguiente pregunta: ¿Para un valor fijo $\epsilon > 0$, es único el valor de n_0?)

c) (optativo) Sea $b_n = n^2 - 13$.

Usando las reglas de cálculo de límites de funciones del repartido 8, sabemos que $\lim a_n = +\infty$.

Usando la definición de de una sucesión tendiendo a $+\infty$, dado $K > 0$ cualquiera arbitrario, encontrar n_0 (que depende de K) tal que:

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |b_n| > K.$$

d) (optativo) Para la misma sucesión b_n de la parte anterior, y para la misma constante dada K, encontrar otros dos valores $n_1, n_2 \neq n_0$, ambos diferentes entre sí, tales que

$$n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |b_n| > K,$$

$$n \geq n_2 \quad \Rightarrow \quad |b_n| > K.$$

e) (optativo) Usando el mismo procedimiento que en la parte a) aplicar la definición de límite y encontrar n_0 en función de ϵ para demostrar directamente las siguientes afirmaciones:

(i) $\lim \sqrt[n]{3} = 1$, (ii) $\lim \log\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 0$.

3. *a*) Usando la definición de límite demostrar el siguiente teorema:

Teorema de acotación de sucesiones convergentes

Hipótesis: La sucesión de reales a_n tiene límite L real.

Tesis: la sucesión a_n está acotada (es decir a_n está acotada superiormente e inferiormente).

Sugerencia: Ver la demostración de la proposición 76 en la página 35 del libro.

b) (optativo) Usando la definición de límite, probar que la sucesión $a_n = (-1)^n$ no tiene límite real.

Sugerencia: Primer paso, probar que $|a_n - a_{n+1}| = 2 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Segundo paso, por absurdo suponer que existe el real $L = \lim a_n$. Aplicar la definición de límite de una sucesión. Como la definición de límite vale para todo ϵ, en particular vale para $\epsilon = 1/2$. Aplicar la definición de límite en el caso particular $\epsilon = 1/2$

Tercer paso: A partir de lo obtenido en el segundo paso deducir que $|a_n - a_{n+1}| < 1$ para todo $n > n_0$.

Cuarto paso: A partir de lo obtenido en el primer y tercer pasos, deducir una contradicción que termine de demostrar por absurdo la afirmación dada (que $a_n = (-1)^n$ no tiene límite real).

c) Mostrar con un contraejemplo que el recíproco del Teorema de Acotación de Sucesiones Convergentes es FALSO.

d) Mostrar con ejemplos que existen sucesiones de los siguientes tres tipos:
- Convergentes y por lo tanto acotadas.
- Acotadas y no convergentes.
- No acotadas y no convergentes.

e) Mostrar con un contraejemplo que el recíproco de la propiedad (iii) del Ejercicio 1a) es FALSO.

4. Sin necesidad de usar directamente la definición de límite de una sucesión, y empleando solamente los mismos métodos de cálculo de límites de funciones de variable real (Práctico 8), calcular los siguientes límites

a) $\lim \dfrac{2n-5}{n+3+5^{1/n}}$.

b) $\lim \sqrt[n]{\alpha}$, donde α es una constante real positiva. Sugerencia: $\sqrt[n]{\alpha} = e^{\log \sqrt[n]{\alpha}} = e^{(\log \alpha)/n}$.

c) (optativo) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

d) $\lim \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$.

e) (optativo) $\lim \dfrac{n^\alpha}{e^n}$ donde $\alpha > 0$ es una constante real. (Sugerencia: Considerar la función $f(x) = \dfrac{x^\alpha}{e^x}$ para $x \in \mathbb{R}^+$, y calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ usando L'Hôpital varias veces hasta que el numerador tienda a una constante real.)

f) (optativo) $\lim(\alpha \log n - n)$ donde $\alpha > 0$ es una constante real cualquiera. Discutir según el valor de α. (Sugerencia: Tomar logaritmo de la sucesión dada en la parte anterior de este ejercicio.)

g) (optativo) $\lim(\log n)/n$. (Sugerencia: definir $f(x) = (\log x)/x$ para $x \in \mathbb{R}^+$ y usar un procedimiento similar al de la parte e.)

h) (optativo) $\lim \sqrt[n]{n}$. (Sugerencia: Escribir $a_n = e^{\log a_n}$ y calcular primero el límite de $\log a_n$.)

i) (optativo) $\lim \sqrt[n]{n^\beta}$ donde β es una constante real.

5. • **Teorema de Monotonía del Límite**

$$a_n \leq b_n \ \ \forall\, n, \ \exists \ \lim a_n, \ \ \exists \lim b_n \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim a_n \leq \lim b_n$$

• **Teorema del sandwich**

$$a_n \leq b_n \leq c_n \ \ \forall\, n, \ \ \exists \ \lim a_n, \lim c_n \in \mathbb{R}, \ \ \lim a_n = \lim c_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim b_n = L.$$

• **Teorema de producto de límite 0 por sucesión acotada**

$$a_n \to 0, \ \ b_n \text{ sucesión acotada} \quad \Rightarrow \quad \lim(a_n b_n) = 0.$$

a) Usando la definición de límite, demostrar el Teorema de Monotonía del Límite.

Sugerencia: Paso 1) Si $A = \lim a_n, B = \lim b_n$, usar la definición de límite para explicar por qué vale la siguiente afirmación:

Para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - A| < \epsilon, \quad |b_n - B| < \epsilon$.

Paso 2) Usando la hipótesis y la afirmación obtenida en el paso 1, explicar cómo se deduce que $0 \leq b_n - a_n \leq B - A + 2\epsilon \quad \forall\ n > n_0$.

Paso 3) Del paso 2) deducir que $B - A \geq -2\epsilon \quad \forall\ \epsilon > 0$, y de esta desigualdad concluir que $A \leq B$.

b) (optativo) Demostrar el Teorema del sandwich.

c) Demostrar el Teorema del producto de límite 0 por sucesión acotada.(Sugerencia: usar el Teorema de sandwich)

d) Calcular $\lim \dfrac{n^2 \operatorname{sen}(n^3+n+1)}{n^3+n+1}$.

e) (optativo) Sean α y β dos constantes reales positivas. Probar que si a_n es una sucesión de reales tal que $\alpha < a_n < n^\beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. (Sugerencia: primero usar los resultados obtenidos en el ejercicio 4, partes b), i). Luego usar el teorema del sandwich.)

6. **Sucesiones monótonas.**

a) Estudiar en el libro "Análisis Matemático I" desde el principio de la página 36 hasta el Ejemplo 84 excluido.

b) Definir sucesión monótona decreciente y definir sucesión monótona creciente.

c) Dar un ejemplo de sucesión monótona creciente no acotada superiormente. ¿Existen sucesiones monótonas crecientes no acotadas inferiormente?

d) Dar un ejemplo de sucesión monótona decreciente acotada.

e) Dar un ejemplo de sucesión no monótona que sea convergente.

f) Dar un ejemplo de sucesión no monótona que tienda a $+\infty$.

g) Investigar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones. Si es verdadera demostrarla y si es falsa refutarla con un contraejemplo:

(i) Si a_n es acotada entonces, ¿es a_n necesariamente convergente?

(ii) Si a_n es no acotada superiormente, ¿tiende a_n necesariamente a $+\infty$?

(iii) Si $a_n \to +\infty$, ¿es a_n necesariamente no acotada superiormente?

(iv) Si $a_n \to +\infty$, ¿es a_n necesariamente acotada inferiormente?

7. **Teorema de sucesiones monótonas**

• (i) Si a_n es una sucesión monótona creciente y acotada superiormente, entonces existe el real $\lim a_n$ y este límite es igual al supremo de a_n.

•(ii) Si a_n es una sucesión monótona creciente y no acotada superiormente, entonces $\lim a_n = +\infty$.

•(iii) Si a_n es una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente, entonces existe el real $\lim a_n$ y este límite es igual al ínfimo de a_n.

•(iv) Si a_n es una sucesión monótona decreciente y no acotada inferiormente, entonces $\lim a_n = -\infty$.

a) Llenar los blancos "....." en la siguiente argumentación para que sea una demostración de la parte (i) del Teorema de sucesiones monótonas.

Hipótesis: .....

Tesis:......

Demostración: Sea $L = \sup a_n$. Tal supremo existe (y es un número real) porque ....
Por el teorema de caracterización con ϵ del supremo de un conjunto, sabemos lo siguiente:
Para todo $\epsilon > 0$ existe a_{n_0} perteneciente a la sucesión tal que ....
Entonces, por los siguientes motivos ....., deducimos que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n \geq a_{n_0} > L - \epsilon.$$

Además, por los siguientes motivos ...... sabemos que

$$a_n \leq L < L + \epsilon \ \ \forall \ n > n_0.$$

Ahora, juntando las siguientes desigualdades .... deducimos que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad L - \epsilon < a_n < L + \epsilon.$$

Hemos demostrado que para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que .... Usando la definición de límite de una sucesión, concluimos que $\lim a_n = L$ como queríamos demostrar. □

b) Demostrar la parte (iii) del Teorema de sucesiones monótonas. Sugerencia: repetir, adaptándola adecuadamente, la demostración de la parte (i).

8. **Sucesiones dadas por recurrencia (o inducción)**

a) Sea a_n la sucesión de reales dada por las siguiente condiciones (dato inicial y relación de recurrencia):

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{6 + a_n}{6 - a_n} \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

(i) Probar que $0 \leq a_n < 2 \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. (Sugerencia: usar inducción completa)
(ii) Probar que a_n es monótona creciente.
(iii) Probar que a_n es convergente y hallar $\lim a_n$.

b) Sea b_n la sucesión de reales dada por:

$$b_1 = \sqrt{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}^+.$$

(i) Probar que $0 < b_n < 2 \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}^+$.
(ii) Probar que b_n es monótona creciente.
(iii) Probar que b_n es convergente y hallar $\lim b_n$.

c) Sea c_n la sucesión de reales dada por:

$$c_0 = 1, \quad c_{n+1} = +\sqrt{2c_n^2 + 1}.$$

(i) Probar que c_n es monótona creciente.
(ii) Probar que c_n no es convergente. (Sugerencia: Por absurdo).
(iii) Deducir que c_n es no acotada y que $\lim c_n = +\infty$.
(iv) Calcular $\lim \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$.

9. **Subsucesiones** Estudiar del libro "Análisis Matemático I" desde la página 42 donde dice Subsucesiones, hasta la página 43, donde está el enunciado del Teorema 4 incluido (Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos de reales); y además el enunciado del Teorema 5 en la página 44 (Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones de reales).

a) Demostrar que si una sucesión a_n tiene límite L real, entonces toda subsucesión a_{n_k} de ella también tiene límite L. (Sugerencia: ver página 43 del libro.)

b) Demostrar que si una sucesión a_n tiende a $+\infty$ entonces toda subsucesión a_{n_k} de ella también tiende a $+\infty$.

c) Probar que la sucesión $b_n = 2^{n \cdot (-1)^n}$ no tiene límite finito ni infinito. (Observación: la expresión $n \cdot (-1)^n$ está toda en el exponente de 2. Sugerencia: usar los contrarrecíprocos de las afirmaciones probadas en las partes a y b.)

d) (optativo) Sea a_n una sucesión de reales. Demostrar que si las subsucesiones a_{2k} y a_{2k+1} tienen ambas el mismo límite L entonces existe $\lim a_n = L$.

10. *a*) **Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones** *Si a_n es una sucesión acotada de números reales, entonces existe(n) subsucesión(es) de a_n que son convergentes.*

Llenar los blancos en el siguiente argumento para transformarlo en una demostración completa del Teorema enunciado:

Hipótesis: a_n acotada (superiormente e inferiormente)

Tesis: $\exists$ subsucesión a_{n_k} convergente.

Demostración:

Sea $k \in \mathbb{N}^+$, y sea la siguiente sucesión auxiliar

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+j}, \dots\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}^+$ fijo, existe el real b_k porque ......

Afirmamos que la sucesión auxiliar b_k es acotada inferiormente porque ....

Además afirmamos que la sucesión auxiliar b_k es monótona decreciente, es decir $b_{k+1} \leq b_k$ porque ....

Entonces, usando el Teorema de Sucesiones Monótonas, existe el número real

$$L = \lim b_k.$$

Como b_k es el supremo de un conjunto, aplicando el teorema de ϵ-caracterización del supremo, obtenemos lo siguiente:

Para todo $\epsilon > 0$ existe un elemento x del conjunto $\{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+j}, \dots\}$ tal que

$$b_k - \epsilon < x \leq b_k.$$

Como esta afirmación vale para cualquier $\epsilon > 0$, en particular vale en el caso particular que elijamos

$$\epsilon = \frac{1}{k}.$$

Como $x \in \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+j}, \dots\}$, el elemento x es igual a un término de la sucesión a_n para cierto valor de $n \geq k$. Denoto este término así:

$$x = a_{n_k}, \qquad \text{con } n_k \geq k.$$

Entonces juntando las afirmaciones ...., ... y ..... obtenidas antes (llenar con precisión: ¿cuáles tres afirmaciones?), obtenemos

$$b_k - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq b_k \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}^+.$$

Finalmente, aplicaremos el Teorema del Sandwich. Verificamos primero que se cumplen las hipótesis del Teorema del Sandwich. Verificación aquí: ....

Concluimos que $\lim a_{n_k} = L$. Hemos encontrado una subsucesión a_{n_k} convergente, como queríamos demostrar. $\square$

b) (optativo) Sea a_n una sucesión acotada de reales. Para cada $h \in \mathbb{N}^+$ definir

$$c_h = \text{ínf}\{a_h, a_{h+1}, \dots, a_{h+j}\}.$$

(i) Demostrar que la sucesión auxiliar c_h es convergente.

(ii) Llame α al límite (real) de c_h. Demostrar que existe una subsucesión a_{n_h} que converge a α.

c) Sea

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n+2} + (-1)^{\text{ent}(n/2)},$$

donde "ent($n/2$)"denota la parte entera inferior del número $n/2$. Esto es el mayor entero que es menor o igual que $n/2$.

(i) Verificar que a_n es acotada.

(ii) Encontrar tres subsucesiones de a_n que sean convergentes y tengan límites los tres diferentes.

(iii) Deducir que la sucesión a_n no es convergente.

d) Dar un ejemplo de una sucesión que no cumpla las hipótesis del Teorema de Bolzano pero que cumpla la tesis.

e) Dar un ejemplo de una sucesión que no cumpla las hipótesis del Teorema de Bolzano y que tampoco cumpla la tesis.

11. **Teorema de Bolzano Weierstrass para conjuntos de reales**

Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío ACOTADO de reales que tiene infinitos elementos, entonces existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ (x_0 puede pertenecer o no pertenecer al conjunto A) *tal que x_0 es punto de acumulación de A.*

a) (optativo) Demostrar este Teorema.

Sugerencias: Primero, construir una sucesión a_n de reales tal que $a_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que no tenga puntos repetidos (es decir para valores diferentes del subíndice n los reales a_n son todos diferentes).

Segundo, aplicar a la sucesión a_n el Teorema de Bolzano Weierstrass para sucesiones.

Tercero, probar que si a_{n_k} es una subsucesión convergente de a_n entonces su límite L es un punto de acumulación del conjunto A.

b) Dar un ejemplo de un conjunto de reales que ilustre el enunciado del Teorema de Bolzano Weierstrass para conjuntos.

c) (optativo) Dar un ejemplo de un conjunto no vacío de reales que contenga infinitos elementos, que no cumpla todas las hipótesis del Teorema de Bolzano, pero que cumpla la tesis.

d) (optativo) Dar un ejemplo de un conjunto no vacío de reales que tenga infinitos elementos, que no cumpla todas las hipótesis del Teorema de Bolzano y que tampoco cumpla la Tesis.

12. **Teorema de límites de sucesiones en conjuntos cerrados**

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y CERRADO de reales. Sea a_n una sucesión de reales tal que

$$a_n \in A \;\forall\; n \in \mathbb{N}.$$

Si la sucesión a_n es convergente, entonces su límite L pertenece al conjunto A.

a) (optativo) Demostrar este Teorema.

Sugerencias: Primero, usando que A es cerrado, deducir que si $x_0 \notin A$ entonces existe un entorno $E_\epsilon(x_0) \subset A^c$.

Segundo, suponer por absurdo que $L \notin A$ y del primer paso, deducir que existe un entorno $E_\epsilon(L)$ que no intersecta a A.

Tercero: Del paso anterior y de la hipótesis $a_n \in A$, deducir que existe $\epsilon > 0$ tal que ningún punto de la sucesión a_n pertenece a $E_\epsilon(L)$.

Cuarto y último: aplicar la definición de límite L a la sucesión a_n y llegar a una contradicción con lo obtenido en el tercer paso.

b) Dar un ejemplo que ilustre el teorema de límites de sucesiones en conjuntos cerrados.

c) (optativo) Dar un ejemplo de conjunto A no vacío de reales que no sea cerrado ni acotado y de una sucesión $a_n \in A$ convergente cuyo límite no pertenezca a A.

d) (optativo) Dar un ejemplo de conjunto A no vacío de reales que no sea cerrado ni acotado y de una sucesión $a_n \in A$ convergente cuyo límite pertenezca a A

13. **Teorema de compacidad secuencial**

Sea $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto COMPACTO no vacío de reales (se recuerda que compacto significa cerrado y acotado). *Sea a_n una sucesión de reales tal que $a_n \in A \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.*

Entonces existe una subsucesión a_{n_k} tal que:

- *a_{n_k} es convergente, y*
- *$\lim a_{n_k} = L$ es un punto que pertenece al conjunto A.*

a) (optativo) Demostrar este Teorema.

Sugerencia: Aplicar a la sucesión a_n el teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones, y luego aplicar a la subsucesión convergente obtenida el Teorema de límite de sucesiones en conjuntos cerrados.

b) Dar un ejemplo que ilustre el enunciado del Teorema de compacidad secuencial.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 14
Sucesiones de Cauchy
Series de números reales.

Estudiar del libro "Análisis Matemático I" de F. Paganini, desde la página 34, Sucesiones de Cauchy hasta la página 46 donde dice "Sucesiones complejas" (excluido).

Resolver el siguiente ejercicio usando el texto leído.

Recordemos primero las definiciones de límite y de sucesión de Cauchy:

Definición de límite de una sucesión: Una sucesión a_n es convergente si tiene límite L real (finito). Tiene límite L real (finito) cuando para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

Definición de sucesión de Cauchy: Una sucesión a_n se llama "sucesión de Cauchy" cuando para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$m \geq n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_m - a_n| < \epsilon.$$

1. Usando la definición de límite y la definición de sucesión de Cauchy resolver lo siguiente:

   a) Comparar entre sí las dos definiciones anteriores y describir cuáles son las diferencias entre ambas.

   b) Demostrar el siguiente teorema:
   Si a_n es una sucesión convergente entonces es una sucesión de Cauchy.
   (Sugerencia: ver en la página 43 del libro la demostración del Teorema 6)

   c) Demostrar el siguiente teorema:
   Sea a_n es una sucesión de reales. Si a_n es una sucesión de Cauchy, entonces es una sucesión convergente.
   (Sugerencia: ver en la página 43 del libro la demostración del Teorema 7 y completarla con las explicaciones necesarias para que quede totalmente explícito el proceso deductivo en esa demostración).

   d) (optativo) Sea la sucesión $a_n = \dfrac{n+1}{5n}$.
   (i) Dado $\epsilon > 0$ hallar n_0 (en función de ϵ) tal que: $m \geq n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_m - a_n| < \epsilon$.
   (ii) Encontrar n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ la sucesión a_n difiera de la constante a_{n_0} menos que 10^{-3}.
   (iii) Con el valor de n_0 hallado en la parte (ii) calcular a_{n_0} y a_{n_0+100} y chequear que difieren entre sí manos que 10^{-3}.

2. **Series** Leer toda la siguiente exposición teórica y hacer un diagrama-resumen.

   Definición de Serie Dada una SUCESIÓN a_n de reales, se llama *SERIE de término general a_n*a la "SUMA" de los infinitos términos a_n, en el orden dado de estos términos. Es decir, si el primer término de la sucesión es a_0 entonces:

   $$\text{SERIE de término } a_n \text{ es } a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

   Los tres puntitos al final son esenciales, porque indican que la suma continúa incluyendo los infinitos sumandos. La serie NO es entonces una suma (común y corriente en su sentido habitual), pues para serlo debería tener solo una cantidad finita de sumandos.

Observación: Si el primer término de la sucesión es a_1 en vez de a_0, o si es a_2 o si es a_{27} o en general a_k con k fijo dado, se define la serie empezando con su primer sumando en a_k en vez de a_0.

Notación Se usa la siguiente notación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots,$$

o en general, para k fijo dado:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

¡Ojo! El símbolo $\sum_{n=0}^{\infty}$ es insignificante en sí mismo. Solo es una abreviatura para indicar el verdadero significado de la serie que es el desarrollo que está a la derecha como suma con infinitos sumandos.

En general, operar a ciegas de manera puramente formal con el símbolo $\sum_{n=0}^{\infty}$ como si fuera una suma común y corriente, puede conducir a errores. Por eso al principio en los razonamientos y demostraciones, conviene sustituir la abreviatura $\sum_{n=0}^{\infty}$ por el desarrollo extendido de la suma con infinitos sumandos.

Definiciones importantes

Suma acumulada o Reducida N-ésima de una serie. Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, se llama Suma acumulada hasta el sumando N-ésimo, o Reducida N-ésima, a la suma S_N siguiente (con finitos sumandos, esta sí es una suma común y corriente):

$$S_N = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_1} + a_N.$$

Observar que tiene un punto al final, para indicar que el último sumando es a_N y la suma no sigue.

Convergencia y suma de una serie. Una serie se llama convergente si existe (real finito) el límite de la reducida N-ésima cuando $N \to +\infty$. Cuando la serie es convergente, este límite se llama "suma" de la serie, y la serie se dice que es igual a este límite.

Observar que aquí la palabra "suma" de la serie está utilizada abusando del significado de la palabra suma, pues no es una suma común y corriente con una cantidad finita de sumandos, sino un *límite:*

La "suma" de la serie es (cuando existe) el LÍMITE de las sumas acumuladas, o sea el límite de las reducidas N-ésimas.

No Convergencia o no existencia de la suma de una serie. Cuando la serie no es convergente, decimos que la suma de la serie no existe.

Dentro de las series no convergentes, una clase especial es la de las series "Divergentes". Estas son aquellas series cuyas sumas acumuladas o reducidas N-ésimas S_N tienden a $+\infty$ o a $-\infty$ o a ∞ (+ o -) cuando $N \to +\infty$. En este caso la "suma" de la serie no existe, pero abusando del lenguaje, decimos que la serie es igual a ∞.

3. **Serie geométrica**

   a) Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$. Esta suma se llama "geométrica de razón 2" porque cada término es igual al anterior multiplicado por 2.
   (i) Para cualquier $N \in \mathbb{N}$ fijo demostrar que la suma acumulada hasta el término N (o reducida enésima S_N) es $S_N = 2^{N+1} - 1$.

   (ii) Deducir que la serie es divergente, es decir $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = +\infty$.

b) Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Esta suma se llama "geométrica de razón 1/2" porque cada término es igual al anterior multiplicado por 1/2.

(i) Para cualquier $N \in \mathbb{N}$ fijo demostrar que la suma acumulada hasta el término N (o reducida enésima S_N) es $S_N = \dfrac{1-(1/2)^{N+1}}{1-(1/2)} = 2-(1/2)^N$.

(ii) Deducir que la serie es convergente y que su "suma" es $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-(1/2)} = 2.$

c) Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_0(\lambda)^n$, donde $a_0 \neq 0$ y $\lambda > 0$ son constantes reales. Esta suma se llama "geométrica de razón λ" porque cada término es igual al anterior multiplicado por λ.

(i) Si $\lambda \neq 1$, demostrar que para cualquier $N \in \mathbb{N}$ fijo, la suma acumulada hasta el término N (o reducida enésima S_N) es $S_N = \dfrac{a_0(1-\lambda^{N+1})}{1-\lambda}$.

(ii) Hallar la reducida $N-$ésima S_N cuando $\lambda = 1$.

(ii) Deducir el siguiente criterio:

• Cuando $\lambda > 1$ la serie geométrica es divergente, es decir $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = +\infty$ (si $a_0 > 0$), ó $= -\infty$ (si $a_0 < 0$).

• Cuando $0 < \lambda < 1$ la serie geométrica es convergente, y su "suma"es $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{a_0}{1-\lambda}$.

• Cuando $\lambda = 1$ la serie geométrica es divergente, es decir $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = +\infty$ (si $a_0 > 0$) ó $= -\infty$ (si $a_0 < 0$)

4. Leer en el libro "Análisis Matemático I" desde la página 47 Series, hasta la página 51, donde dice Ejemplo 135 excluido. Resolver los siguientes ejercicios, sobre el texto leído.

Series telescópicas

a) Definir cuándo una serie es telescópica.

b) Encontrar la suma acumulada o reducida N-ésima de las siguientes series telescópicas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right). \qquad \text{Optativos: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)^2-n^2\right).$$

c) Para las dos primeras series telescópicas dadas arriba, determinar si convergen o no convergen, y cuando convergen hallar su "suma".

5. **Teorema - Condición necesaria de convergencia**

   Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim a_n \to 0$.

   Observaciones importantes: Este teorema establece que para que una serie sea convergente es necesario antes que nada que su término general a_n tienda a cero. Pero el recíproco de este teorema es FALSO. Es decir, hay series que tienen término general que tiende a cero pero que no son convergentes (por ejemplo la serie armónica). Dicho de otra forma, la condición $\lim a_n = 0$ es necesaria pero NO SUFICIENTE para que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sea convergente.

   a) Demostrar el teorema enunciado arriba. (Sugerencia: Ver demostración de la proposición 123 en la página 40 del libro).

   b) Probar que no son convergentes las siguientes series:

   (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-3} n$ (iii) $\sum_{n=29}^{+\infty} \cos(1/n)$.

SERIES DE TÉRMINOS NO NEGATIVOS

Son las series $\sum_{n}^{+\infty} a_n$ tales que $a_n \geq 0 \ \ \forall \ n$.

Importante: Las series de términos no negativos o bien convergen o bien divergen a $+\infty$.

En la Tabla (I) se dan métodos y criterios para clasificar series de términos no negativos. Estos métodos se pueden aplicar siempre que se verifiquen las hipótesis en la columna "Condición a chequear" de la Tabla.

Los métodos de la tabla (I) son particularmente útiles para clasificar la serie cuando no se puede calcular directamente en forma explícita una fórmula para la reducida enésima, (y sin ella no podemos calcular directamente el límite de las reducidas enésimas para saber si la serie es convergente o divergente).

Series de términos no positivos Las series de términos no positivos son aquellas para las cuales $a_n \leq 0 \ \ \forall \ n$.

Para clasificar una serie de términos no positivos, podemos usar los mismos criterios que para clasificar una serie de términos no negativos, del siguiente modo:

Primero cambiamos de signo A TODOS los términos de la serie dada (de términos no positivos). La nueva serie que se obtiene es de términos no negativos.

Después a la nueva serie obtenida aplicamos los criterios de la Tabla (I).

Si la nueva serie (de términos no negativos) converge entonces la serie dada (de términos no positivos) converge. Y si la nueva serie diverge a $+\infty$ entonces la serie dada diverge a $-\infty$.

Además, cuando una de estas dos series (y por lo tanto ambas) convergen, la suma de la serie dada es igual a la suma de la serie nueva cambiada de signo.

TABLA I - Métodos de clasificación de series de términos no negativos

Nombre del método	Serie dada	Condición a chequear **ADEMÁS de** $a_n \geq 0$	Resultado
Límite del término a_n	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\nexists \lim a_n$ ó $\lim a_n = +\infty \Rightarrow$	$\sum_n^{+\infty} a_n$ DIVERGE
Límite del término a_n	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\lim a_n \neq 0 \Rightarrow$	$\sum_n^{+\infty} a_n$ DIVERGE
Límite del término a_n	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\lim a_n = 0$	Este método no la clasifica
Comparación por desigualdades:	$\sum_n^{+\infty} a_n$	construyo $b_n \geq 0$ tal que $a_n \leq b_n$, y $\sum_n^{+\infty} b_n$ CONVERGE $\Rightarrow$	$\sum_n^{+\infty} a_n$ CONVERGE
Comparación por desigualdades:	$\sum_n^{+\infty} a_n$	construyo $b_n \geq 0$ tal que $b_n \leq a_n$, y $\sum_n^{+\infty} b_n$ DIVERGE $\Rightarrow$	$\sum_n^{+\infty} a_n$ DIVERGE
Comparación por límites:	$\sum_n^{+\infty} a_n$	construyo $b_n \geq 0$ tal que $\lim(a_n/b_n) = L$ $L \in \mathbb{R}, L \neq 0$ $\sum_n^{+\infty} b_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum_n^{+\infty} b_n$ DIVERGE $\Rightarrow$	 $\sum_n^{+\infty} a_n$ CONVERGE $\sum_n^{+\infty} a_n$ DIVERGE
Comparación por límites:	$\sum_n^{+\infty} a_n$	construyo $b_n \geq 0$ tal que $\lim(a_n/b_n) = 0$, $\sum_n^{+\infty} b_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\lim(a_n/b_n) = +\infty$, $\sum_n^{+\infty} b_n$ DIVERGE $\Rightarrow$	 $\sum_n^{+\infty} a_n$ CONVERGE $\sum_n^{+\infty} a_n$ DIVERGE

La tabla continúa ...

Continuación de la TABLA I - Métodos de clasificación de series de términos no negativos

Nombre del método	Serie dada	Condición a chequear ADEMÁS de $a_n \geq 0$	Resultado
Criterio de la Raíz ó Criterio de Cauchy	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\lim \sqrt[n]{a_n} = L < 1$	$\sum_n^{+\infty} a_n$ CONVERGE
Criterio de la Raíz ó Criterio de Cauchy	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\lim \sqrt[n]{a_n} = L > 1$	$\sum_n^{+\infty} a_n$ DIVERGE
Criterio de la Raíz ó Criterio de Cauchy	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\lim \sqrt[n]{a_n} = +\infty$	$\sum_n^{+\infty} a_n$ DIVERGE
Criterio de la Raíz ó Criterio de Cauchy	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$	Este método no la clasifica
Criterio del Cociente ó Crit. de D'Alembert	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\lim(a_{n+1}/a_n) = L < 1$	$\sum_n^{+\infty} a_n$ CONVERGE
Criterio del Cociente ó Crit. de D'Alembert	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\lim(a_{n+1}/a_n) = L > 1$	$\sum_n^{+\infty} a_n$ DIVERGE
Criterio del Cociente ó Crit. de D'Alembert	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\lim(a_{n+1}/a_n) = +\infty$	$\sum_n^{+\infty} a_n$ DIVERGE
Criterio del Cociente ó Crit. de D'Alembert	$\sum_n^{+\infty} a_n$	$\lim(a_{n+1}/a_n) = 1$	Este método no la clasifica
CRITERIO INTEGRAL	$\sum_n^{+\infty} a_n$	construyo $f(x) \geq 0$, tal que $a_n = f(n)$ y $f(x)$ es decreciente $\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE $\Rightarrow$	 $\sum_n^{+\infty} a_n$ CONVERGE $\sum_n^{+\infty} a_n$ DIVERGE

6. *a*) **Serie armónica**

   Se da la siguiente serie, llamada serie armónica: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Demostrar que diverge a $+\infty$ usando el criterio integral. (Sugerencia: Considerar la función $f(x) = 1/x$ definida para x real, $x \geq 1$. ¿Cumple esta función todas las hipótesis del criterio integral?)

   b) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, usando el criterio integral.

   c) Sea $\alpha > 0$ constante real positiva. Usando el criterio integral clasificar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ en convergente o divergente, discutiendo según el valor de la constante α.

   Nota importante: El siguiente resultado debe recordarse:

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CONVERGE si y solo si } \alpha > 1, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ DIVERGE si y solo si } \alpha \leq 1.$$

   d) Estudiar del libro "Análisis Matemático I"desde la página 120, Criterio integral para series, hasta el final de esa página.
   Enunciar y demostrar detalladamente el Criterio Integral para clasificar series (justificar y completar cada paso del proceso deductivo en la demostración del libro).

   e) (optativo) Usando el criterio integral, clasificar la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^\alpha}$ en convergente o divergente, discutiendo según sea el valor de la constante real α.

7. *a*) Usando el criterio de comparación por desigualdades clasificar en convergente o divergente la siguiente serie de términos positivos: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.
   (Sugerencia: comparar el término general con $1/n^2$.)

   b) Usando el criterio de la Raíz (de Cauchy), clasificar en convergentes o divergentes las siguientes series de términos positivos: (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{n/2}$, (ii) (optativo) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$.

   c) Usando el criterio del Cociente (de D'Alembert), clasificar en convergentes o divergentes las siguientes series de términos positivos: (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, (ii) (optativo) $\sum_{n=1}^{+\infty} n\,\lambda^n\,e^{-\sqrt{n}}$, donde λ es una constante real positiva. Discutir según λ.

   d) (optativo) Verificar que ni el criterio de la Raíz ni el criterio del Cociente permiten clasificar las series siguientes: (i) $\sum_{n=1}^{+\infty}(1/n^3)$, (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty}(1/\sqrt{n})$.

   e) Usando el criterio de comparación por límites, y comparando con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ para algún valor adecuado de α, clasificar las siguientes series de términos positivos:

   (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$

   Optativos: (iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1) - \log(n)}{7\sqrt{n}+1}$ iv) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen}(1/\sqrt{n})|}{\sqrt{n}+7}$

8. **Series de términos con signos cualesquiera**

   Leer del libro "Análisis Matemático I" desde la página 54, Series Alternadas, hasta el final de la página 56 y resolver los siguientes ejercicios sobre el texto leído:

   a) **Series Alternadas y Criterio de Leibnitz**
   Enunciar y demostrar el Criterio de Leibnitz sobre series alternadas.

   b) Usando el criterio de Leibnitz clasificar en convergentes o no convergentes las siguientes series:

   (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, n}{6n-5}$,

9. **Convergencia absoluta**

   a) Definir cuando una serie es absolutamente convergente.

   b) Demostrar que si una serie converge absolutamente, entonces converge.

   c) Dar un ejemplo de una serie convergente que no sea absolutamente convergente.

   d) Clasificar en convergente o no convergente cada una de las series siguientes, y a las que son convergentes clasificarlas en absolutamente convergente o no absolutamente convergentes:

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^3}$, (iii)(optativo) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}\Big((-1)^n/n\Big)$

10. (optativo)

    a) Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabiendo que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, averiguar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones. Si es verdadera probarla y si es falsa refutarla con un contraejemplo:

    (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ necesariamente diverge. (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ necesariamente converge.

    (iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ necesariamente converge. (iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ necesariamente diverge.

    (v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \log(1 + a_n)$ en algunos ejemplos converge y en otros diverge.

    b) Sea a_n definida por $a_{2k} = 1/2^k, \quad a_{2k+1} = 1/2^{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es convergente y hallar su suma.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 15
Teoremas básicos del Cálculo

Sea D un conjunto no vacío de reales que no tiene puntos aislados (por ejemplo D es un intervalo de reales, otro ejemplo D es la unión de dos intervalos abiertos disjuntos). Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$ una función real con dominio en el conjunto D, y sea $x_0 \in \overline{D}$ un punto de la clausura de D.

• **Definición de límite de una función real**

Se dice que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ cuando

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$x \in D, \quad 0 \neq |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Se llama entorno reducido de x_0 de radio $\delta > 0$ al conjunto

$$E^*_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0\} = E_\delta(x_0) \setminus \{x_0\},$$

donde $E_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ es el entorno (abierto) de centro x_0 y radio $\delta > 0$ definido al principio del curso.

Entonces la definición anterior de límite también puede escribirse de la siguiente forma (es en realidad la misma definición): $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ cuando

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$x \in D, \quad x \in E^*_\delta(x_0)\ \Rightarrow\ f(x) \in E_\epsilon(L).$$

• **Definición de función continua en el punto x_0**

Sea ahora $x_0 \in D$ un punto del dominio D de f. Se dice que f es continua en el punto $x_0 \in D$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

• **Definición ϵ δ de función continua en un punto x_0.**

$f : D \mapsto \mathbb{R}$ es continua en el punto $x_0 \in D$ si y solo si se cumple la siguiente condición:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$x \in D,\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Nota importante: Se puede demostrar que las dos definiciones de función continua en el punto x_0 son equivalentes. Entonces podemos tomar cualquiera de ellas en forma indistinta, según sea más conveniente para resolver cada ejercicio particular o demostrar cada enunciado.

• **Ley de Conservación del Signo**.

(I) Si el límite L de una función $f(x)$ cuando $x \to x_0$ es $L > 0$, entonces $f(x) > 0$ en todos los puntos x ***de algún entorno reducido de*** x_0 que estén en el dominio D de f.

Si el límite L de una función $f(x)$ cuando $x \to x_0$ es $L < 0$, entonces $f(x) < 0$ en todos los puntos x ***de algún entorno reducido de*** x_0 que estén en el dominio D de f.

(II) Si f es continua en el punto x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces $f(x) > 0$ en todos los puntos x ***de un entorno de*** x_0 que estén en el dominio D de f.

Si f es continua en el punto x_0 y $f(x_0) < 0$, entonces $f(x) < 0$ en todos los puntos x ***de un entorno de*** x_0 que estén en el dominio D de f.

1. *a*) Llenar los blancos en el siguiente argumento y explicar cada paso del proceso deductivo, para que sea una demostración de la primera parte de la Ley (I) de Conservación del Signo.

   Hipótesis: Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D$ tal que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$.

   Tesis: Existe un entorno reducido $E^*_\delta(x_0)$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in E^*_\delta(x_0) \cap D$.

   Demostración: Por definición de límite se cumple que $\forall$ .... $\exists$ .... tal que

   $$x \in E^*_\delta(x_0) \cap D \;\Rightarrow\; f(x) \in E_\epsilon(L).$$

   Como la condición anterior vale para todo $\epsilon > 0$ y $L > 0$, entonces en particular vale para $\epsilon = L/2$. Concluimos que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E^*_\delta(x_0) \cap D$ entonces:

   $$f(x) > L - \epsilon = L - L/2 = L/2 > 0.$$

   Hemos probado que existe un entorno reducido $E^*_\delta(x_0)$ tal que $f(x)$...... para todo $x \in$......., como queríamos demostrar. $\square$

   b) (optativo) Demostrar la Ley (II) de Conservación del Signo.

2. • **Teorema de Límite y Continuidad de Funciones por Límite de Sucesiones.**

   (I) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si para toda sucesión de reales a_n tal que $\lim a_n = a$ se cumple $\lim f(a_n) = L$.

   (II) f es continua en el punto a si y solo si para toda sucesión de reales a_n tal que $\lim a_n = a$ se cumple $\lim f(a_n) = f(a)$.

   a) Demostrar el Teorema (I) de Límite de Funciones por Sucesiones. Sugerencia: Estudiar del libro “Análisis Matemático I” de F. Paganini, la demostración del Teorema 17 en la página 63. Completar las explicaciones que faltan y/o consultar hasta entender bien todos los detalles de esa demostración.

   b) (optativo) Demostrar el Teorema (II) de Continuidad de Funciones por Límite de Sucesiones.

3. • **Definición de función continua en un conjunto A**

   Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$. La función f se llama *continua* (continua “a secas”, continua sin agregar ningún complemento) cuando es continua en cada uno y todos los puntos x_0 de su dominio D. (Ver al principio de este repartido y también en la parte a) del Ejercicio 1, la definición de continuidad de una función en un punto x_0).

   Sea A un conjunto no vacío de reales. Se dice que la función f es *continua en el conjunto A* cuando A está contenido en el dominio de la función y la función es continua en cada uno y todos los puntos x_0 del conjunto A.

   a) Chequear que es verdadera la siguiente propiedad ϵ δ de la continuidad de la función f en un conjunto A no vacío de reales:

   Sea una función $f : D \mapsto \mathbb{R}$. Sea A un conjunto no vacío de reales contenido en D. Entonces f es continua en el conjunto A si y solo si se cumple la siguiente condición:

   Para todo $\epsilon > 0$ y para todo $x_0 \in D$ existe $\delta > 0$ (que puede depender de ϵ y de x_0) tal que

   $$|x - x_0| < \delta, \quad x \in D \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

   • **Definición de función uniformemente continua en un conjunto A**

   Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$. Sea A un conjunto no vacío de reales contenido en D. La función f se llama *uniformemente continua* en el conjunto A cuando

   Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que puede depender de ϵ pero que NO depende de ningún x_0) tal que

   $$|x - x_0| < \delta, \quad x \in A, \quad x_0 \in A \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

b) Explicar la diferencia entre los conceptos de "función continua en el conjunto A" y "función uniformemente continua en el conjunto A". (Sugerencia: comparar la propiedad $\epsilon \;\; \delta$ de la parte a) con la última definición, para explicar por qué toda función uniformemente continua en un conjunto A es continua en A, pero el recíproco no es, a priori, necesariamente cierto).

c) (importante) Demostrar que si f es uniformemente continua en A y si $B \subset A$ entonces f es uniformemente continua en B.

d) Demostrar que si f es uniformemente continua en A y en B entonces f es uniformemente continua en $A \cup B$. (Advertencia: también es cierto este resultado para la unión de una cantidad finita de conjuntos en vez de solo dos conjuntos, pero ES FALSO si se pretende unir una cantidad infinita de conjuntos).

e) Probar que la función $f(x) = 3x$ es uniformemente continua en el conjunto $\mathbb{R}$. (Sugerencia: Dado $\epsilon > 0$ encontrar $\delta > 0$ que dependa solo de ϵ y que verifique la definición de continuidad uniforme).

f) (importante) Recordar en la siguiente lista de ejemplos de funciones (todas continuas), cuáles son uniformemente continuas en el conjunto indicado, y cuáles no lo son:

(i)	$f(x)$	$=$	$\lambda \cdot x$	es uniformemente continua en $\mathbb{R}$
(ii)	$f(x)$	$=$	x^2	NO es uniformemente continua en $\mathbb{R}$
(iii)	$f(x)$	$=$	x^3	NO es uniformemente continua $\mathbb{R}$
(iv)	$f(x)$	$=$	x^α donde $\alpha > 1$	NO es uniformemente continua en $\mathbb{R}$
(v)	$f(x)$	$=$	$\sqrt{x}$	es uniformemente continua en $\mathbb{R}^+$
(vi)	$f(x)$	$=$	$\sqrt[3]{x}$	es uniformemente continua en $\mathbb{R}$
(vii)	$f(x)$	$=$	x^α donde $0 < \alpha < 1$	es uniformemente continua en el conjunto $\mathbb{R}^+$

g) (optativo) Demostrar todas las afirmaciones (i) y (ii) de la parte anterior. Sugerencia: Para la afirmación (i) argumentar como en la parte e) de este ejercicio. Para la afirmación (ii) ver Ejemplo 170 en la página 67 del libro "Análisis Matemático I"de F. Paganini.

h) (importante) Interpretar y recordar el enunciado del teorema siguiente:

• **<u>Teorema de Heine-Cantor (continuidad uniforme)</u>**

Sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$. Sea $A \subset D$ un subconjunto no vacío contenido en D. Si f es continua en A y si A es COMPACTO, entonces f es uniformemente continua en A.

i) (optativo) Demostrar el Teorema de Heine-Cantor (Sugerencia: Ver demostración del Teorema 21 en la página 69 del libro "Análisis Matemático I".)

j) Admitiendo el Teorema de Heine-Cantor, deducir que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en el intervalo $[-\sqrt{2}, \sqrt{901}]$.

k) (importante) Admitiendo el Teorema de Heine-Cantor, probar que la función $f(x) = 7x^3$ es uniformemente continua en el intervalo abierto $(3, 7)$.

4. **Teorema de Bolzano**

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y si $f(a)<0$ y $f(b)>0$ entonces existe por lo menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

a) Hacer un dibujo interpretando el enunciado del Teorema de Bolzano.

b) Admitiendo el Teorema de Bolzano probar el siguiente corolario:

Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y si $f(a)\neq f(b)$, entonces para todo número real r entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=r$.

Sugerencia: Si $f(a)<r<f(b)$ considerar la función auxiliar $g(x)=f(x)-r$. Y si $f(a)>r>f(b)$ considerar la función auxiliar $h(x)=r-f(x)$. Aplicar el Teorema de Bolzano a la función auxiliar.

c) Hacer un dibujo para interpretar el enunciado del corolario de la parte anterior.

d) Probar que existe por lo menos una solución real x de la siguiente ecuación:

$$x^{179}+\frac{163}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x}=119.$$

Sugerencia: Evaluar en $x=0$ y en $x=-2$ y usar el Teorema de Bolzano.

e) (optativo) Sea $f:[0,1]\mapsto[0,1]$. Demostrar que existe por lo menos un punto fijo de f, es decir, existe algún punto $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=c$.

Sugerencia: Aplicar el Teorema de Bolzano a la función $x-f(x)$. ¡OJO! Antes de aplicar el Teorema debe probarse que se cumplen sus hipótesis.

5. **Teorema de Weierstrass**

Estudiar del libro "Análisis Matemático I" de F. Paganini, en la página 66, desde el Teorema 20 (Weierstrass) hasta el Ejercicio 169 excluido. Responder las siguientes preguntas sobre el texto estudiado.

a) ¿Cuál es el enunciado del Teorema de Weierstrass?

b) ¿Cómo se puede interpretar gráficamente el enunciado del Teorema de Weierstrass?

c) Leer la siguiente demostración, entender cada paso deductivo de la misma, y reproducirla en la carpeta:

Demostración de *existencia del máximo* (absoluto) del enunciado del Teorema de Weierstrass.

Hipótesis: f es continua en $[a,b]$ (intervalo cerrado y acotado).

Tesis: Existe $\alpha\in[a,b]$ tal que $f(\alpha)=\max\{f(x):\ x\in[a,b]\}$.

Demostración: Esta demostración tiene dos pasos. En el primer paso se demuestra que $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ es acotada superiormente. En el segundo paso se demuestra que el supremo de f en $[a,b]$ es un máximo: es decir existe $L\in[a,b]$ tal que $f(L)$ es igual al supremo de f en $[a,b]$.

Paso 1. Demostración de que f es acotada superiormente en $[a,b]$. Es decir existe un número real s que es el supremo del conjunto imagen $f([a,b])$.

Por absurdo supongamos que f NO es acotada superiormente en $[a,b]$. Entonces ningún número real es cota superior del conjunto imagen $f([a,b])$. En particular, ningún número natural $n\in\mathbb{N}$ es cota superior de $f([a,b])$. Es decir, para todo $n\in\mathbb{N}$ NO es cierto que $f(x)\leq n$ para todo $x\in[a,b]$. Equivalentemente, para todo $n\in\mathbb{N}$ existe

$$x_n\in[a,b]$$

tal que

$$f(x_n) > n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty.$$

Entonces cualquier subsucesión $\{f(x_{n_j})\}$ de $f(x_n)$ tiende a $+\infty$:

$$\lim f(x_{n_j}) = +\infty \qquad\qquad (*)$$

Como $[a,b]$ es compacto (cerrado y acotado), y como $x_n \in [a,b]$, por el Teorema de Bolzano Weierstrass (ás precisamente por el Teorema de Compacidad Secuencial de compactos- ver práctico 13), existe una subsucesión x_{n_j} convergente cuyo límite pertenece a $[a,b]$:

$$\lim x_{n_j} = L \in [a,b].$$

Como f es continua en $[a,b]$, usando el Teorema de Continuidad de Funciones mediante Límite de Sucesiones (Ej. 1 parte e), deducimos que:

$$\lim f(x_{n_j}) = f(L) \in \mathbb{R} \qquad\qquad (**)$$

Las afirmaciones (*) y (**) se contradicen, absurdo. Hemos terminado el Paso 1:

$$\exists\ \sup\{f(x) : \quad x \in [a,b]\} = s.$$

Paso 2. Demostración de que el supremo s se alcanza para algún punto $L \in [a,b]$. Es decir, tenemos que probar que existe $L \in [a,b]$ tal que $s = f(L)$

Tenemos

$$s = \sup(f([a,b]).$$

Usando el teorema de caracterización del supremo, sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $y \in f([a,b])$ tal que $s \leq y < s + \epsilon$. Como esa propiedad vale para todo $\epsilon > 0$, en particular vale para $\epsilon = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}^+$. Entonces

$$\exists\ y_n \in f([a,b]) \text{ tal que}$$

$$s \leq y_n < s + \frac{1}{n} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+.$$

Usamos el Teorema de Sandwich: como s es una constante real (independiente de n), podemos verlo como una sucesión constante, que por lo tanto tiende a s. Como $s + (1/n)$ también tiende a s, deducimos

$$\lim y_n = s.$$

Pero $y_n \in f([a,b])$. Por lo tanto

$$y_n = f(x_n), \quad x_n \in [a,b], \qquad \lim y_n = \lim f(x_n) = s.$$

Como $f(x_n)$ es una sucesión convergente, cualquier subsucesión de ella tiene el mismo límite s:

$$\lim f(x_{n_j}) = s \text{ para cualquier subsucesión } f(x_{n_j}) \qquad (***)$$

Ahora usamos el Teorema de Bolzano-Weiertrass para sucesiones (más precisamente el Teorema de Compacidad secuencial- ver práctico 13). Como el intervalo $[a,b]$ es compacto, y la sucesión $x_n \in [a,b]$, existe una subsucesión x_{n_j} convergente cuyo límite $L \in [a,b]$:

$$\lim x_{n_j} = L \in [a,b].$$

Por el teorema de Continuidad de Funciones mediante límite de sucesiones (ejercicio 1, parte e), tenemos:

$$\lim f(x_{n_j}) = f(L), \qquad L \in [a,b] \qquad (****)$$

De las igualdades (***) y (****) deducimos que $f(L) = s$, y como $L \in [a,b]$ hemos encontrado un punto $L \in [a,b]$ tal que

$$f(L) = s = \sup f([a,b]),$$

como queríamos demostrar.

Concluimos que el supremo s de $f([a,b])$ es igual a $f(L)$, o sea pertenece al conjunto imagen $f([a,b])$. Por lo tanto es máximo, terminando de demostrar la existencia de máximo de la función f en el intervalo $[a,b]$. □

d) Demostrar la *existencia del mínimo* (absoluto) del enunciado del Teorema de Weierstrass.

Hipótesis: f es continua en $[a,b]$ (intervalo cerrado y acotado).
Tesis: Existe $\beta \in [a,b]$ tal que $f(\beta) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Sugerencia: Adaptar la demostración de la parte anterior, haciendo las modificaciones que sean necesarias para demostrar la existencia del mínimo en vez de la existencia del máximo.

6. Exhibir contraejemplos de funciones que muestren que:

a) $f : (a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua $\not\Rightarrow$ f es necesariamente acotada en $(a,b]$.

b) $f : (a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua y acotada $\not\Rightarrow$ existen necesariamente el máximo y el mínimo de f en $(a,b]$.

c) $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ continua y acotada $\not\Rightarrow$ el máximo o el mínimo de f en (a,b) no existen.

d) $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo en $[a,b]$ $\not\Rightarrow$ f es necesariamente continua en $[a,b]$.

e) I intervalo de reales, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ es continua y tiene máximo y mínimo en I
$\not\Rightarrow$ I es necesariamente un intervalo cerrado y acotado.

7. **Teoremas de Rolle y de Lagrange**

También llamados: **Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial**

a) Interpretar y estudiar los enunciados de los siguientes teoremas:
(I) **Teorema de Rolle:** *, Si $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.* (Ver cuadro izquierdo de la Figura 1.)
(II) **Teorema de Lagrange:** *Si $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(Ver cuadro derecho de la Figura 1.)

b) Usando el Teorema de Lagrange, mostrar que en las hipótesis de ese teorema, existe por lo menos un punto c en el intervalo (a,b) tal que la recta tangente a la curva gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ es paralela a la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (ver Figura 1, cuadro derecho).

c) Chequear que el Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema de Lagrange cuando $f(a) = f(b)$.

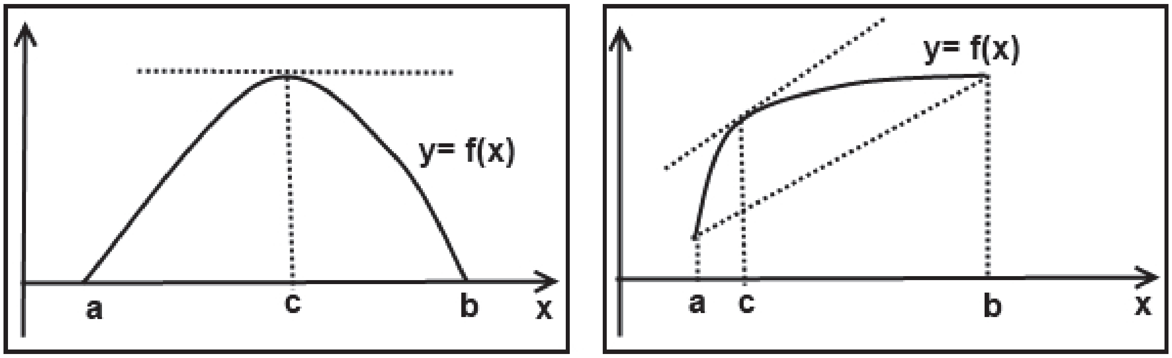

Figura 1: Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Cuadro izquierdo: El Teorema de Rolle. Cuadro derecho: El Teorema de Lagrange. La recta tangente a la gráfica por el punto $(c, f(c))$ es paralela a la cuerda.

d) Usando únicamente el Teorema de Lagrange demostrar que si una función derivable $f(x)$ cumple que su derivada es nula para todo x entonces $f(x)$ es constante. Sugerencia: Tomar dos puntos cualesquiera $a \neq b$. Usar el teorema de Lagrange y la hipótesis $f' = 0$ para deducir que $f(a) = f(b)$. Concluir que f es constante.

e) (optativo) Estudiar en el libro "Análisis Matemático I" el Teorema 23, página 72 con su demostración. Usando el texto leído hacer las siguientes partes de este ejercicio:

(i) Demostrar el Teorema de Rolle.

(ii) Demostrar el Teorema de Lagrange.

8. *a*) Sea la ecuación cúbica $x^3 - 3x + (1/\pi) = 0$. Demostrar que existe una única raíz en el intervalo $(-1, 1)$.

Sugerencia: Para la existencia usar el Teorema de Bolzano. Para la unicidad, primero probar que la derivada de la función cúbica es estrictamente negativa en el intervalo $(-1, 1)$. Después usar el Teorema de Rolle.

b) Sea la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$, donde b es una constante real cualquiera. Probar que a lo sumo existe una sola raíz c de la ecuación en el intervalo $[-1, 1]$.

c) (optativo) Demostrar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos raíces reales diferentes.

Sugerencia: Evaluar en $x = 0, x = \pi, x = -\pi$. Usando el Teorema de Bolzano probar que la ecuación tiene por lo menos dos raíces reales diferentes. Después suponer por absurdo que tiene tres o más raíces reales diferentes. Aplicar el Teorema de Rolle y deducir que entonces la derivada primera tiene dos o más raíces reales. Calcular la derivada primera y llegar a un absurdo para terminar la demostración.

d) (optativo) Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por la fórmula $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Mostrar que $f(1) = f(-1)$ pero que no existe ningún punto $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Explicar por qué esta función no contradice el Teorema de Rolle.

e) (optativo) ¿Satisfacen las siguientes funciones las hipótesis del Teorema de Lagrange en los intervalos indicados? En caso afirmativo, hallar algún valor intermedio c que verifique la igualdad en la tesis del Teorema de Lagrange:

(i) $x + (1/x),\ x \in [1/2,\ 1]$, (ii) $x \log x,\ x \in [1, e]$, (iii) $\sqrt[3]{x},\ x \in [-1, 1]$,

(iv) $\sqrt[3]{x},\ x \in [0, 1]$, (v) $\sqrt{x-1},\ x \in [1, 3]$, (vi) $\sqrt{|x-1|},\ x \in [-2, 3]$.

9. *a*) (Muy importante) Interpretar y recordar los enunciados de los siguientes cinco teoremas:

I. Teorema del límite de sumas de Riemann (integral de Cauchy)

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ es integrable Riemann.

Es decir, existe el límite de las sumas de Riemann de la función f cuando $n \to +\infty$, siendo n la cantidad de subintervalitos iguales en que se parte al intervalo $[a,b]$ para calcular las sumas de Riemann. Este límite de las sumas de Riemann de f en el intervalo $[a,b]$ se denota (sin usar la regla de Barrow) como $\int_a^b f(x)\,dx$ (Recordar del repartido 11 la definición y construcción de las sumas de Riemann)

II. Teorema de Acotación de la Integral de Cauchy *Si $a < b$ y f es continua en $[a,b]$ entonces*

(i) $$(b-a)\cdot\Big(\min_{x\in[a,b]} f(x)\Big) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\cdot\Big(\max_{x\in[a,b]} f(x)\Big).$$

(ii) $$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int |f(x)|\,dx.$$

III. Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe $\eta \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\eta).$$

IV. Teorema Fundamental del Cálculo

Si f es continua en $[a,b]$ y si $x \in [a,b]$ se define la función integral

$$I(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

Entonces $I(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Es decir, existe $I'(x)$ y cumple

$$I'(x) = f(x)$$

V. Regla de Barrow

Si f es continua en $[a,b]$ y si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ para todo $x \in (a,b)$ entonces

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a).$$

NOTA IMPORTANTE: El orden en que enunciamos algunos de estos teoremas en el Repartido 11, no es el orden lógico de sus demostraciones, sino que era un orden establecido nada más que por razones pedagógicas, para poder usar esos teoremas aún antes de demostrarlos. El procedimiento clásico de demostración de los 5 teoremas enunciados antes es en cadena **en el mismo orden que están ahora enunciados**, y no en el orden en que se enunciaron en el Repartido 11. En efecto, el Teorema I se demuestra usando el teorema de Heine-Cantor visto antes; el II se demuestra usando el Teorema I (y por eso hay que demostrar el I antes que el II y sin usar el II); el III se demuestra usando el II y el Teorema de Bolzano visto antes; el IV se demuestra usando el III; y el finalmente el V usando el IV. Sin embargo observamos que en el Repartido 11 lo primero que enunciamos sin demostración, y usamos, fue el Teorema V, el último en poder ser demostrado.

b) Admitiendo los dos teoremas I y IV anteriores, deducir que **existe la siguiente primitiva, llamada primitiva de la función "Campana de Gauss"**:

$$P(x) = \int_0^x e^{-x^2}\, dx.$$

Consecuencia: **La función e^{-x^2}, llamada Campana de Gauss, ES INTEGRABLE.** Es integrable porque es continua, y toda función continua es integrable por el teorema del límite de las sumas de Riemann (integral de Cauchy).

Sin embargo, la primitiva $P(x)$ de e^{-x^2} a pesar de que existe, no se puede expresar usando únicamente operaciones algebraicas con funciones logarítmicas, exponenciales, polinómicas y trigonométricas.

c) Usando la definición de suma de Riemann y el Teorema de Heine-Cantor de continuidad uniforme, demostrar el Teorema I del Límite de las Sumas de Riemann enunciado en la parte a). Sugerencia: ver en el libro "Análisis Matemático I"la demostración del Teorema 30 desde el final de la página 86 hasta el renglón 4 de la página 87. Completar todos los detalles para transformar ese argumento del libro en una demostración completa.

d) (optativo) (i) Usando el Teorema de Wierstrass y el Teorema I de Límite de las Sumas de Riemann, demostrar el Teorema II parte (i) de Acotación de Integrales enunciado en la parte a). Sugerencia: Escribir la suma de Riemann para cualquier cantidad n de intervalitos iguales de la partición de $[a, b]$ y probar que esta suma de Riemann está acotadas por constantes independientes de n. Luego tomar límite cuando $n \to +\infty$.

(ii) Usando el Teorema I de Límite de las Sumas de Riemann demostrar el Teorema II parte (ii) de Acotación de Integrales. Sugerencia: Ver en el libro "Análisis Matemático I"la demostración de la Proposición 208 partes 3, 4 y 5 en la página 88.

e) Usando el Teorema de Bolzano para funciones continuas, y el Teorema II parte (i) de Acotación de Integrales, demostrar el Teorema III del Valor Medio del Cálculo Integral enunciado en la parte a).

f) (importante) Usando el Teorema III del Valor Medio del Cálculo Integral, demostrar el Teorema IV Fundamental del Cálculo enunciado en la parte a). Sugerencia: Ver en el libro "Análisis Matemático I"la demostración del Teorema 33 desde la página 93 hasta la página 94.

g) (optativo) Usando el Teorema IV Fundamental del Cálculo, demostrar el Teorema V (la Regla de Barrow) enunciada en la parte a). Sugerencia: ver en el libro la demostración del Corolario 224 en la página 94.

Cálculo 1 Anual Año 2014.
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República.
Práctico 16
Cálculo de extremos absolutos y relativos.

1. *a*) Interpretar, estudiar y recordar las siguientes Definiciones de Extremos Relativos y de Puntos Críticos, y el enunciado del Teorema de Criticalidad de Extremos Relativos que está después. Hacer un diagrama-resumen de todos ellos.

DEFINICIÓN DE EXTREMO RELATIVO

Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Se llaman extremos relativos, cuando existen, a los máximos relativos y a los mínimos relativos, de acuerdo a la siguiente definición:

Máximo relativo: $f(c_1)$ se llama *máximo relativo* o también *máximo local* de la función f si

• $c_1 \in (a, b)$

• Existe un entorno $E_\delta(c_1) \subset (a, b)$ tal que

$$f(x) \leq f(c_1) \ \ \forall\, x \in E_\delta(c_1).$$

Ver figura 1: En el ejemplo de esa figura hay varios máximos relativos todos diferentes, y ninguno es el máximo (absoluto) de f en el intervalo $[a, b]$. El máximo absoluto, en ese ejemplo, es $f(b)$.

¡OJO! El máximo relativo no es el punto c_1 sino el valor de f en ese punto c_1, es decir $f(c_1)$. El punto c_1 se llama *lugar del máximo relativo,* o también, se dice que *en c hay un máximo relativo.*

Mínimo relativo: $f(c_2)$ se llama *mínimo relativo* o también *mínimo local* de la función f si

• $c_2 \in (a, b)$

• Existe un entorno $E_\delta(c_2) \subset (a, b)$ tal que

$$f(x) \geq f(c_2) \ \ \forall\, x \in E_\delta(c_2).$$

Ver figura 1: En el ejemplo de esa figura, hay varios máximos relativos todos diferentes, y ninguno es el máximo (absoluto) de f en el intervalo $[a, b]$. El máximo absoluto, en ese ejemplo, es $f(a)$.

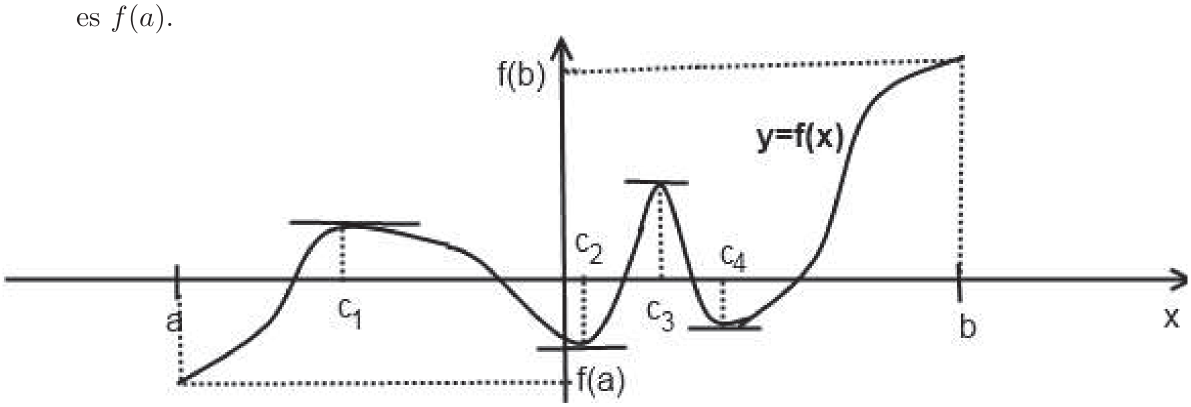

Figura 1: El máximo (absoluto) de esta función f en el intervalo $[a, b]$ es $f(b)$. Los máximos relativos son $f(c_1)$ y $f(c_3)$. En este ejemplo ninguno de los máximos relativos es máximo absoluto. El mínimo (absoluto) es $f(a)$. Los mínimos relativos son $f(c_2)$ y $f(c_4)$. En este ejemplo ninguno de los mínimos relativos es mínimo absoluto.

<u>DEFINICIÓN DE PUNTO CRÍTICO O ESTACIONARIO</u>

Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ derivable en el intervalo abierto (a, b).

Se llama punto estacionario o punto crítico de la función f a un punto c tal que

• $c \in (a, b)$,

• $f'(c) = 0$.

<u>TEOREMA DE CRITICALIDAD</u> (de los puntos donde hay extremos relativos)

Si f es derivable en (a, b), si $c \in (a, b)$ es tal que $f(c)$ es un extremo relativo, entonces c es punto crítico.

Dicho de otra forma:

Si en c hay máximo relativo o mínimo relativo entonces $f'(c) = 0$.

¡Cuidado! Lo anterior vale solo bajo la hipótesis de que f es derivable en todos los puntos del intervalo (a, b). La función $f(x) = |x|$, por ejemplo, tiene mínimo relativo en $x = 0$, y sin embargo no es cierto que $f'(0)$ sea cero, porque ni siquiera existe la derivada de f en $x = 0$.

b) Completar los blancos del siguiente argumento y explicar cada paso del proceso deductivo para que sea una demostración:

Hipótesis:

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua y derivable en (a, b).

$c \in (a, b)$ es un punto tal que $f(c)$ es máximo relativo.

Tesis: $f'(c) = 0$.

Demostración: Existe $f'(c)$ porque ......

Usando la definición de ......, obtenemos:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como por hipótesis $f(c)$ es máximo relativo, entonces $f(c) \geq$ ..... para todo $x \in$........ Luego cuando $c < x < c + \delta$, el cociente incremental $(f(x) - f(c))/(x - c)$ tiene numerador ≤ 0 y denominador > 0. Deducimos que el siguiente límite lateral es ≤ 0 porque ....:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Análogamente, cuando $c - \delta < x < c$, el cociente incremental $(f(x) - f(c))/(x - c)$ tiene numerador de signo .... y denominador de signo .... Deducimos que el siguiente límite lateral es ≥ 0:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Ambos límites laterales son iguales a $f'(c)$ porque ...... Concluimos que $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$, de donde $f'(c) = 0$, como queríamos demostrar. □

c) Demostrar que si f es derivable en (a, b) y si en $c \in (a, b)$ hay mínimo relativo de f, entonces $f'(c) = 0$.

d) Dar un ejemplo de función derivable en un intervalo (a, b) que muestre que el recíproco del Teorema de Criticalidad es falso.

Nota importante: Vimos que si una función es derivable en (a, b), entonces los extremos relativos son puntos críticos. Pero no todos los puntos críticos tienen por qué ser extremos relativos. Ahora veamos condiciones suficientes para poder clasificar los puntos críticos en:

i) puntos críticos que son máximos relativos,

ii) puntos críticos que son mínimos relativos,

iii) puntos críticos que no son ni máximo relativo ni mínimo relativo.

Los puntos críticos del tipo iii) se llaman **"puntos silla".**

2. *a*) Interpretar y recordar el enunciado de los dos criterios dados en el siguiente Teorema, y las dos notas importantes: la que antes de este ejercicio, y la que está al final de este ejercicio.

TEOREMA: CRITERIOS DE CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Hipótesis: *Sea* $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ *función derivable. Sea* $c \in (a, b)$ *un punto crítico de* f. (Es decir, $f'(c) = 0$.)

Entonces:

I) El criterio de la derivada segunda establece lo siguiente:

i) *Si existe* $f"(c)$ *y es* $f"(c) < 0$, $f(c)$ *es un máximo relativo.*

ii) *Si existe* $f"(c)$ *y es* $f"(c) > 0$, $f(c)$ *es un mínimo relativo.*

iii) *Si existe* $f"(c)$ *y es* $f"(c) = 0$, *el criterio de la derivada segunda no clasifica.*

(Es decir, hay ejemplos con $f'(c) = 0$ y $f"(c) = 0$ en que $f(c)$ es mínimo relativo, otros ejemplos en que $f(c)$ es máximo relativo, y otros ejemplos en que $f(c)$ no es ni máximo ni mínimo relativo.)

Bajo las mismas hipótesis del principio (exista o no la derivada segunda $f"(c)$):

II) El criterio de estudio directo del signo establece lo siguiente:

i) *Si el signo de* $f(x) - f(c)$ *es menor o igual a cero en algún entorno de* $x = c$, *entonces* $f(c)$ *es máximo relativo.*

ii) *Si el signo de* $f(x) - f(c)$ *es mayor o igual a cero en algún entorno de* $x = c$, *entonces* $f(c)$ *es mínimo relativo.*

iii) *Si para cualquier entorno de* $x = c$ *el signo de* $f(x) - f(c)$ *es positivo en algunos puntos y negativo en otros, entonces* $f(c)$ *no es ni máximo relativo ni mínimo relativo.*

b) Encontrar todos los puntos críticos de las siguientes funciones y clasificarlos (Nota: si se usa el método de la derivada segunda y ésta queda cero, habrá que clasificar el punto crítico de otra manera; por ejemplo estudiando directamente el signo de $f(x) - f(c)$.)

(i) $e^{2x^2} - 1$, $x \in (-1, 1)$, (ii) $e^{(1-x)(x-2)} - 1$, $x \in (0, 3)$,

(iii) $(x-1)^2$, $x \in (0, 2)$, (iv) $(x-1)^2(x-2)^2(x+1)^2$, $x \in (-3, 3)$,

(v) $(x-1)^3$, $x \in (0, 2)$, (vi) $(x-1)^4(x-2)^3(x+1)^2$, $x \in (-3, 3)$.

Nota importante: Usualmente un máximo relativo no es máximo absoluto, y aunque existan máximos relativos no tiene por qué existir máximo absoluto.

Por otra parte, si existe máximo absoluto no tiene por qué este máximo absoluto ser máximo relativo, y pueden existir o no máximos relativos.

Análogamente sucede para los mínimos relativos y absoluto.

3. **Teorema ¿cuándo un extremo absoluto es también extremo relativo?**

   Sea I un intervalo de reales (acotado o no acotado, cerrado o no cerrado). Sea $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Entonces:

   i) *Si existe máximo (absoluto) de la función f en el intervalo I y si algún punto c donde se alcanza este máximo (absoluto) pertenece al interior de I entonces el máximo absoluto es también máximo relativo.*

   ii) *Si existe mínimo (absoluto) de la función f en el intervalo I y si algún punto c donde se alcanza este mínimo (absoluto) pertenece al interior de I entonces el mínimo absoluto es también mínimo relativo.*

   a) Demostrar el enunciado (i) del Teorema anterior.

   b) Demostrar el enunciado (ii) del Teorema anterior.

   c) Exhibir la gráfica de alguna función acotada en un intervalo $[a, b)$ que tenga máximos relativos pero no tenga máximo absoluto.

   d) Exhibir la gráfica de alguna función acotada en un intervalo $[a, b)$ que tenga máximos relativos y máximo absoluto, pero que el máximo absoluto no sea máximo relativo.

   e) Exhibir la gráfica de alguna función acotada en un intervalo $[a, b)$ que tenga máximo absoluto y no tenga máximos relativos.

   f) Exhibir la gráfica de alguna función acotada en el intervalo $[a, b)$ que tenga máximo absoluto que sea a la vez máximo relativo.

   g) Idem a la partes c) a f), pero tomando como intervalo la semirrecta $[a, +\infty)$ en vez del intervalo $[a, b)$.

4. *a*) (i) Chequear todas las cuentas y afirmaciones en el siguiente ejemplo de cálculo y clasificación de extremos relativos.

   (ii) Graficar aproximadamente la función de este ejemplo en el intervalo I dado.

   (iii) Estudiar las observaciones importantes que están al final del ejemplo.

   EJEMPLO DE CÁLCULO Y CLASIFICACIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

   Sea $f = x^4 - 3x^2 - 1$ definida en el intervalo $I = [-1, 5)$. Encontrar, si existen, los extremos relativos de f en I (es decir, los máximos y mínimos relativos) y clasificarlos (es decir, decir para cada extremo relativo, si es máximo relativo o mínimo relativo).

   Recordar que los extremos relativos de f, si existen, por definición están contenidos en el INTERIOR de I, es decir en $(-1, 5)$.

   PASO 1 *Encontrar, si existen, los puntos críticos de f en el interior de I, es decir los puntos $x \in (-1, 5)$ tales que $f'(x) = 0$*

   Observaciones importantes: Si f es diferenciable y no existen puntos críticos en el interior de I, entonces no hay extremos relativos en I. Si f es diferenciable y existen puntos críticos en el interior de I, entonces, puede haber o no extremos relativos en I, pero si hay, estos extremos se alcanzan en algunos de los puntos críticos (debido al Teorema de Criticalidad del Ejercicio 5 del práctico 15).

En el ejemplo $f'(x) = 4x^3 - 6x$. Puntos críticos, si existen, verifican $4x^3 - 6x = 0, \quad x \in (-1, 5)$. Como conclusión, los puntos críticos (en el interior del intervalo I) son dos: $x_1 = 0$ y $x = \sqrt{(3/2)}$. (Observar que el punto $-\sqrt{(3/2)}$ anula la derivada pero no pertenece al interior del intervalo dado porque $-\sqrt{(3/2)} < -1$. Entonces $-\sqrt{(3/2)}$ no es punto crítico de la función en el intervalo dado. (Sería punto crítico si el intervalo fuera por ejemplo $(-2, 5)$).

PASO 2 *Clasificar cada uno de los puntos críticos de f (en el interior de I) en máximo relativo, mínimo relativo o punto silla.*

Recordamos que hay dos métodos de Clasificación de los puntos críticos: el criterio de clasificación por la derivada segunda, y el criterio de clasificación por estudio directo del signo.

En este ejemplo usaremos el **criterio de clasificación por la derivada segunda.**

En el ejemplo existe $f''(x)$ para todo $x \in \text{int}(I)$: $f''(x) = 12x^2 - 6$.

En el punto crítico $x = 0$ tenemos $f''(0) = -6 < 0$. El criterio de la derivada segunda entonces afirma que $x = 0$ es un punto crítico donde hay un máximo relativo de f. Por lo tanto $f(0) = -1$ es un máximo relativo de f en el intervalo $I = [-1, 5)$ (ver cuadro izquierdo de la Figura 2).

En el punto crítico $x = \sqrt{(3/2)}$ tenemos $f''(\sqrt{(3/2)}) = 12(\sqrt{(3/2)})^2 - 6 = 12 \cdot (3/2) - 6 = 18 - 6 = 12 > 0$. El criterio de la derivada segunda entonces afirma que $x = \sqrt{(3/2)}$ es un punto crítico donde hay un mínimo relativo de f. Por lo tanto $f(\sqrt{(3/2)}) = -13/4$ es un mínimo relativo de f en el intervalo $I = [-1, 5)$ (ver cuadro del medio de la Figura 2).

Respuesta: En el intervalo $I = [-1, 5)$ la función $f(x) = x^4 - 3x^2 - 1$ tiene solo dos extremos relativos que son $f(0) = -1$, el cual es máximo relativo, y $f(\sqrt{3/2}) = -13/4$ el cual es mínimo relativo.

OBSERVACIONES IMPORTANTES:

• En general, aunque haya muchos puntos críticos, puede no haber máximos relativos, o puede haber uno solo (como en el ejemplo anterior), o puede haber muchos máximos relativos. Análogamente para los mínimos relativos. Los puntos críticos que no son máximos ni mínimos relativos, se llaman puntos silla.

• El criterio de la derivada segunda no permite clasificar el punto crítico c cuando $f''(c) = 0$ (ver Ejercicio 6 del práctico 10). Esto significa que ESE CRITERIO no permite sacar conclusión, pero de todas formas, LA CLASIFICACIÓN EXISTE (el punto crítico es o bien máximo relativo, o bien mínimo relativo, o bien punto silla). Para descubrirla HAY que aplicar algún otro criterio de clasificación (el criterio de clasificación por estudio del signo).

b) Encontrar si existen todos los máximos y mínimos relativos de la función

$$f(x) = x^5 - x^2 + 2 \text{ en el intervalo } [-1, 1].$$

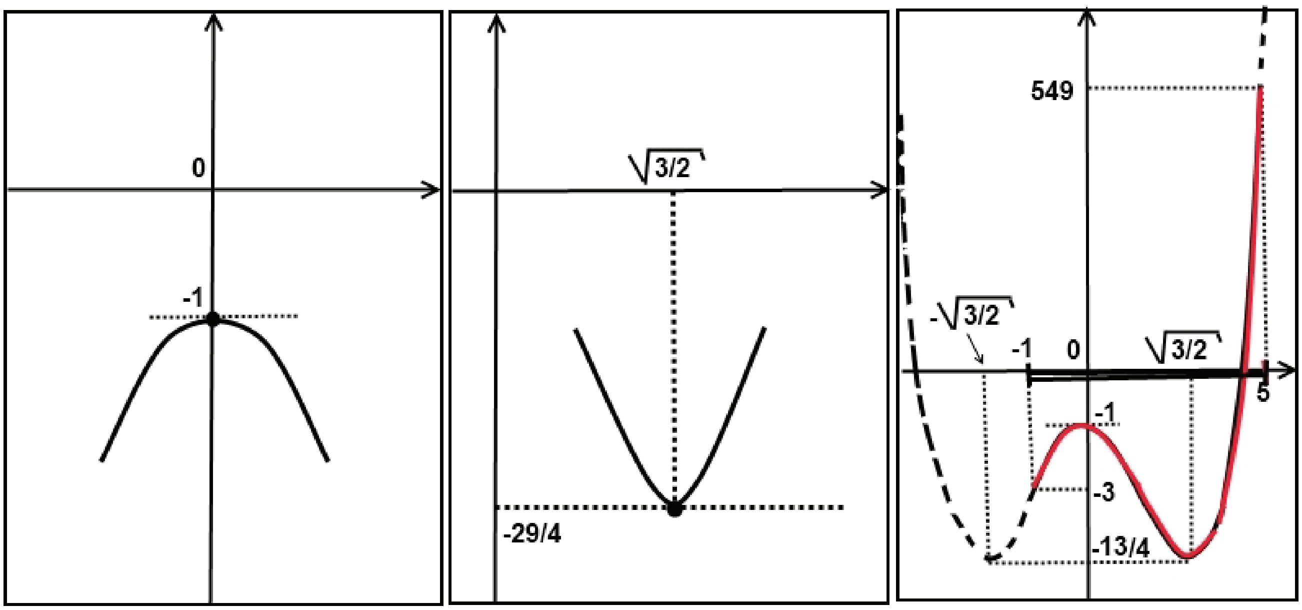

Figura 2: Cuadro izquierdo: máximo relativo. Cuadro medio: mínimo relativo. Cuadro derecho: el trazo continuo en rojo es la curva gráfica de la función $f(x) = x^4 - 3x^2 - 1$ en el intervalo $[-1, 5]$.

5. *a*) (i) Estudiar el siguiente ejemplo y en particular la parte final del mismo sobre el criterio de clasificación de puntos críticos por estudio directo del signo.

(ii) Hacer un diagrama resumen sobre el procedimiento aplicado en ese ejemplo.

(iii) Chequear todas las cuentas y afirmaciones sobre ese ejemplo.

(iv) Graficar aproximadamente la función del ejemplo en el intervalo dado.

EJEMPLO: Encontrar si existen los extremos relativos de la función $f(x) = \operatorname{sen}^5 x$ en el intervalo $I = [-3\pi/4, \pi/4]$.

Primer paso: Hallemos los puntos críticos, si existen en el interior de I, o sea en $(-3\pi/4, \pi/4)$. $f'(x) = 5\operatorname{sen}^4 x \cdot \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} x = 0$ ó $\cos x = 0$. Entonces $x = k\pi$ ó $x = \pi/2 + k\pi$, donde k es cualquier número entero (para deducir esto último graficar las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$). En el intervalo abierto $(-3\pi/4, \pi/4)$ caen solo dos puntos críticos: $x_1 = -\pi/2$ y $x_2 = 0$.

Segundo paso: Clasificar cada uno de los puntos críticos encontrados en máximo relativo, mínimo relativo o punto silla.

Vamos a intentar aplicar el criterio de la derivada segunda $f''(x) = 20\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x - 5\operatorname{sen}^5 x$.

Punto crítico $x_1 = -\pi/2$: obtenemos $f''(-\pi/2) = 5$. El criterio de la derivada segunda afirma entonces que en $-\pi/2$ hay un mínimo relativo que es $f(-\pi/2) = \operatorname{sen}^5(-\pi/2) = -1$.

Punto crítico $x_2 = 0$: obtenemos $f''(0) = 0$. El criterio de la derivada segunda no permite clasificar el punto crítico $x_2 = 0$. Aplicamos pues el otro criterio como sigue:

En este ejemplo aplicaremos el **Criterio de clasificación por estudio directo del signo.** Tenemos que estudiar el signo de $f(x) - f(c)$ en un entorno del punto crítico $c = x_2 = 0$. O sea, el signo de

$$f(x) - f(0) = \operatorname{sen}^5 x - \operatorname{sen}^5(0) = \operatorname{sen}^5 x \quad \text{en un entorno de } x = 0.$$

Pero el signo de $\operatorname{sen}^5 x$ es el mismo que el signo de $\operatorname{sen} x$, y en un entorno suficientemente pequeño de $x = 0$, la función $\operatorname{sen} x$ es positiva a la derecha de 0 y negativa a la izquierda de 0. El criterio de estudio directo del signo (ver antes del ejercicio 7 del práctico 15) afirma que en este punto crítico no hay ni máximo relativo ni mínimo relativo. Es decir en $x_2 = 0$ la función f tiene un punto silla.

Respuesta: En el intervalo $[-3\pi/4, \pi/4]$ la función $f(x) = \operatorname{sen}^5 x$ tiene un único mínimo relativo en el punto $x = -\pi/2$ que vale $f(-\pi/2) = -1$ y no tiene máximos relativos.

b) (i) Encontrar si existen todos los extremos relativos de la siguiente función en el intervalo I clasificándolos en máximos o mínimos relativos:

$$f(x) = \frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + 2 \quad x \in I = (-2, 2).$$

(ii) ¿Existen en el intervalo I puntos críticos de f donde no hay extremos relativos? (Es decir ¿existen puntos silla de f en el intervalo I?).
(iii) Graficar aproximadamente la función f en el intervalo I.

c) Idem parte b) para la función

$$f(x) = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)^4 - 1 \text{ en toda la recta real}$$

Sugerencia: para calcular la derivada $f'(x)$ no sacar los paréntesis y aplicar la regla de derivada de un producto y la regla de la cadena.

d) Idem parte b) para la función

$$f(x) = (e^x - 1)^3 + 2 \text{ en toda la recta real}$$

6. **EXTREMOS ABSOLUTOS**

a) Estudiar el siguiente texto sobre la definición y la unicidad (cuando existen) de los extremos absolutos. Hacer un diagrama resumen de lo esencial del mismo.
•**DEFINICIÓN DE EXTREMOS ABSOLUTOS**
Extremos absolutos f en $I \subset \mathbb{R}$ son, cuando existen, el máximo absoluto (en breve, el "máximo") y el mínimo absoluto (en breve, el "mínimo") de f en I.
Cuando se dice, en breve, "extremos", "máximo" ó "mínimo", se refiere a los extremos, máximo ó mínimo ABSOLUTOS. O sea, cuando no se agrega adjetivo es porque se refiere a los absolutos y no a los relativos.
El máximo absoluto puede existir o no. Independientemente, el mínimo absoluto puede existir o no.
• **UNICIDAD DE LOS EXTREMOS ABSOLUTOS** *Si existe máximo absoluto entonces es único. Si existe mínimo absoluto entonces es único.*
Observamos que en cambio, la propiedad de unicidad NO vale para los extremos relativos .
Observamos que si existe el máximo absoluto $f(x_0)$ de una función f en un dominio I de reales, aunque es único este máximo (o sea el mayor valor de f en el dominio I), *puede haber muchos puntos $x_0 \in I$ donde se alcanza* (que se llaman "lugares del máximo absoluto").

b) Dibujar gráficas de tres funciones continuas f, g y h en un intervalo I de reales acotado pero no compacto, que cumplan respectivamente lo siguiente:
(i) Existe máximo absoluto de f en I, no existe mínimo absoluto de f en I, no existen máximos ni mínimos relativos de f en I.
(ii) Existe mínimo absoluto de g en I que se alcanza en un solo punto, existe máximo absoluto de g en I que se alcanza en exactamente tres puntos, existen exactamente dos máximos relativos diferentes de g en I.
(iii) No existe máximo absoluto de h en I pero existen tres máximos relativos diferentes de h en I

7. **EXISTENCIA Y CÁLCULO DE EXTREMOS ABSOLUTOS EN INTERVALOS ACOTADOS Y CERRADOS (COMPACTOS)**

Recordemos del repartido 15, el siguiente teorema:

Teorema de Weierstrass *Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ es continua y si I es compacto (es decir, cerrado y acotado), entonces existe el máximo absoluto de f en I y también existe el mínimo absoluto de f en I.*

Importante: El recíproco del teorema de Weierstrass es FALSO. Por ejemplo, existen funciones continuas que tienen máximo absoluto en I y también mínimo absoluto en I, pero I no es compacto (no es cerrado, o no es acotado). Entonces, el contrario del teorema de Weierstrass es FALSO. Es decir si f no es continua, o si es continua pero I no es compacto, no podemos concluir nada (usando solo el teorema de Weierstrass) sobre la existencia de los extremos absolutos de f en I.

a) Recordar y volver a graficar aquí, todos los contra-ejemplos del ejercicio 5 del repartido 15 que muestran que el recíproco y el contrario del Teorema de Weierstrass son falsos.

b) Estudiar la siguiente exposición teórica. Dibujar la gráfica de una función que sirva de ejemplo. Explicar por qué es válido el método descripto. Hacer un diagrama-resumen de lo esencial del método:

MÉTODO DE CÁLCULO DE MÁXIMO ABSOLUTO CUANDO SE SABE DE ANTEMANO (O SE PROBÓ ANTES) QUE EXISTE

Sea $f : I \mapsto \mathbb{R}$ continua y derivable en un intervalo $[a, b]$ cerrado y acotado. Por el Teorema de Weierstrass existe máximo absoluto de f en $[a, b]$ (y por ser máximo absoluto, es único) y existe mínimo absoluto de f en $[a, b]$ (también único). ¿Cómo encontrar el máximo absoluto?

Paso 1 Haber probado previamente, o saber de antemano, que existe el máximo absoluto de f en el dominio dado (por ejemplo si uno previamente verifica que el dominio donde se tiene que hallar el máximo es un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y que f es continua en $[a, b]$, usando el teorema de Weierstrass se deduce que existe el máximo absoluto)

Paso 2 Si f es derivable, encontrar todos los puntos críticos de f que caen en el *interior* del dominio dado.

Paso 3 Evaluar f en todos los puntos críticos hallados (NO es necesario clasificar estos puntos críticos).

Paso 4 Evaluar f en los puntos frontera del dominio dado.

Paso Final (conclusión) El máximo absoluto de f en el dominio dado es el mayor de los valores obtenidos en los pasos 3 y 4.

NOTA: Para el MÍNIMO ABSOLUTO el método es el mismo, pero en el paso final hay que tomar el menor de los valores obtenidos, en vez del mayor.

c) Para las siguientes funciones en los intervalos descritos probar que existen los extremos absolutos (es decir el máximo absoluto y el mínimo absoluto) y encontrarlos:

(i) $x^4 - 3x^2 - 1, \quad x \in [-1, 5]$ **(ii)** $x^5 - x^2 + 2, \quad x \in [-1, 1]$

(iii) $\operatorname{sen}^5(x), \quad x \in [-3\pi/4, \pi/4]$ **(iv)** $\dfrac{x^8}{8} - \dfrac{x^6}{6} + 2, \quad x \in [-2, 2]$

(v) $(x-2)^4(x+1)^2(x-1)^4 - 1, \quad x \in [-2, 4]$ **(vi)** (optativo) $(e^x - 1)^3 + 2, \quad x \in [-1, 1]$

(vii) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{u^2}\, du, \quad x \in [-1, 1]$

Sugerencia: denotar como a (sin calcularlo) al siguiente número real positivo $a = \int_0^1 e^{u^2}\, du = \int_{-1}^0 e^{u^2}\, du$. Para encontrar los puntos críticos de $f(x)$ usar el teorema fundamental del cálculo.

(viii) (optativo) $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^x \operatorname{sen}\left(\pi(x-1)^2\right) du, \quad x \in [-1, 2]$

8. *a*) **EXISTENCIA Y CÁLCULO DE EXTREMOS ABSOLUTOS EN INTERVALOS ACOTADOS NO CERRADOS**

   Usando el teorema de Weierstrass, justificar por qué es cierto el siguiente criterio de existencia y cálculo de máximo absoluto en un intervalo acotado y **abierto** (a, b):

   CRITERIO Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en el intervalo compacto $[a, b]$ y derivable en el interior (a, b) de ese intervalo.

   •*Si* $\max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ *se alcanza SOLAMENTE en puntos frontera de* $[a, b]$ *(es decir en* a *y/o en* b *solamente), entonces no existe el máximo de* f *en el intervalo* **abierto** (a, b).

   • *Si* $\max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ *se alcanza en algún punto del interior* (a, b) (no importa si se alcanza o no también en algún punto frontera del intervalo), *entonces existe el máximo de* f *en el intervalo* **abierto** (a, b)*, y coincide con el máximo de* f *en el intervalo cerrado* $[a, b]$.

   En este caso, el máximo absoluto se encuentra por el procedimiento detallado en el ejercicio 7b).

   b) Para cada una de las dos condiciones del criterio anterior, dibujar la gráfica de una función que sirva de ejemplo.

   c) Enunciar y justificar un criterio similar al de la parte a) sobre la existencia del mínimo absoluto de una función en un intervalo acotado y abierto (a, b).

   d) Dibujar gráficas de funciones que sirvan de ejemplos del criterio enunciado en la parte anterior.

   e) Enunciar criterios similares a los de las partes a) y c) sobre la existencia de extremos absolutos de una función en un intervalo acotado, ni abierto ni cerrado $(a, b]$ ó $[a, b)$.

   f) Determinar si existen o no el máximo y el mínimo absolutos de las siguientes funciones en los intervalos que se indican. Si existen, encontrarlos:

   (i) $x^4 - 3x^2 - 1, \quad x \in (-1, 5]$ **(ii)** $x^5 - x^2 + 2, \quad x \in [-1, 1)$

   (iii) $\operatorname{sen}^5(x), \quad x \in (-3\pi/4, \pi/4)$ **(iv)** $\dfrac{x^8}{8} - \dfrac{x^6}{6} + 2, \quad x \in [-2, 2)$

   (v) $(x-2)^4(x+1)^2(x-1)^4 - 1, \quad x \in (-2, 4)$ **(vi)** (optativo) $(e^x - 1)^3 + 2, \quad x \in [-1, 1)$

   (vii) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{u^2}\, du, \quad x \in (-1, 1]$

   (viii) (optativo) $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^x \operatorname{sen}\left(\pi(x-1)^2\right) du, \quad x \in (-1, 2)$

9. **EXISTENCIA Y CÁLCULO DE EXTREMOS ABSOLUTOS EN UN INTERVALO NO ACOTADO**

   a) Probar, usando la definición de máximo absoluto y el teorema de Weierstrass (y argumentos gráficos preferentemente en vez de argumentos analíticos), los siguientes criterios de existencia y cálculo de máximo absoluto toda la recta real:

   CRITERIOS Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ **continua** y derivable (en toda la recta real $\mathbb{R}$).

   • *Si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *ó si* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$*, entonces no existe máximo absoluto de* f *en* $\mathbb{R}$.

   • *Si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *y si* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$*, entonces existe máximo absoluto de* f *en* $\mathbb{R}$.

   • Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ y si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, entonces existe máximo absoluto de f en $\mathbb{R}$.

   • Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ y si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, entonces existe máximo absoluto de f en $\mathbb{R}$.

En este último caso para encontrar el máximo absoluto de f en $\mathbb{R}$, buscamos todos los puntos críticos, y SIN NECESIDAD DE CLASIFICARLOS, evaluamos la f en cada uno de los puntos críticos. El mayor valor de f obtenido es el máximo absoluto.

• *Si f no tiene puntos críticos en $\mathbb{R}$ entonces no tiene máximo absoluto en $\mathbb{R}$.*

• *Si f tiene puntos críticos en $\mathbb{R}$ pero al clasificarlos ninguno es máximo relativo, entonces f no tiene máximo absoluto en $\mathbb{R}$.*

• *Si f tiene puntos críticos en $\mathbb{R}$, si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$ *y (sin necesidad de clasificar los puntos críticos),* si el valor $f(c)$ en alguno de los puntos críticos c es mayor que L_1 y que L_2, entonces f tiene máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

En este caso el máximo absoluto de f en $\mathbb{R}$ es el valor $f(c)$ en ese punto crítico.

b) Para cada uno de los casos de la parte anterior graficar funciones que sirvan de ejemplos.

c) Enunciar criterios similares a los de la parte a) para discutir la existencia y forma de cálculo de mínimo absoluto de una función continua y derivable en toda la recta real.

d) Enunciar criterios similares a los de la parte a) para discutir la existencia y forma de cálculo de máximo absoluto de una función continua y derivable en la semirrecta $[a, +\infty)$. Graficar funciones que sirvan de ejemplos. Idem para la semirrecta $(a, +\infty)$.

e) Determinar si existen o no el máximo y el mínimo absolutos de las siguientes funciones en los intervalos no acotados que se indican. Si existen, encontrarlos:

(i) $x^4 - 3x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$ **(ii)** $x^5 - x^2 + 2, \quad x \in [-5, +\infty)$

(iii) $\operatorname{sen}^5(x), \quad x \in \mathbb{R}$ **(iv)** $\dfrac{x^8}{8} - \dfrac{x^6}{6} + 2, \quad x \in (-\infty, 2]$

(v) $(x-2)^4(x+1)^2(x-1)^4 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$ **(vi)** (optativo) $(e^x - 1)^3 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$

(vii) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{u^2}\, du, \quad x \in (-\infty, 1]$

(viii) (optativo) $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^x \operatorname{sen}\left(\pi(x-1)^2\right) du, \quad x \in \mathbb{R}$

10. *a*) Encontrar la mínima distancia de los puntos de la recta $y = 3x + 5$ al origen. Sugerencia: la distancia de un punto (x, y) del plano coordenado al origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Hallar el mínimo absoluto de la función $x^2 + y^2$, donde $y = 3x + 5$, como función de $x \in \mathbb{R}$, y luego tomar la raíz cuadrada del mínimo absoluto encontrado.

b) Encontrar aproximadamente, la mínima distancia de los puntos de la parábola $y = 4 + (x-1)^2$ al punto $(2, 1)$. Sugerencia: La ecuación de 3er. grado $2x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ tiene una única raíz real $x_0 \simeq 1{,}14....$ Esta raíz x_0 es simple.

c) Encontrar la máxima distancia de los puntos del arco $y = 2x^2 + 1, \quad -1 \le x \le 1$ al origen.

d) (optativo) Estudiar si existen o no existen extremos absolutos de la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\log(x))}{x}$$

en los siguientes intervalos, y si existen, hallarlos:

(i) $I = [e^{-\pi}, 1]$ **(ii)** $I = (e^{-\pi}, 1]$ **(iii)** $I = [e^{-\pi}, 1)$ **(iv)** $I = (e^{-pi}, 1)$.

e) Demostrar que entre todos los rectángulos con perímetro igual a 10 cm, el cuadrado es el que tiene la mayor área. Encontrar esta área máxima.

f) Demostrar que entre todos los triángulos isósceles con perímetro igual a 10 cm, el triángulo equilátero es el que tiene la mayor área. Encontrar esta área máxima.

g) (optativo) Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de diámetro horizontal con longitud 10 cm, sabiendo que uno de los lados del rectángulo está contenido en el diámetro horizontal del semicírculo.