Introducción al Análisis Real. Curso 2003.

DERIVACIÓN DE MEDIDAS.

Complemento teórico y ejercicios adicionales al práctico 5.

Eleonora Catsigeras, 8 de junio de 2003.

VARIABLES ALEATORIAS, VALOR ESPERADO Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

En lo que sigue $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de probabilidad, es decir un espacio de medida que cumple $\mu(\Omega) = 1$.

Definición: Se llama *variable aleatoria* a cualquier función **medible** $Z : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. Las partes real e imaginaria de Z son variables aleatorias con recorrido real. Desarrollaremos la teoría para variables aleatorias reales. Las propiedades que sean cerradas en combinaciones lineales con coeficientes complejos (por ejemplo propiedades que se refieran a la integración respecto de la probabilidad μ), serán también válidos para las variables aleatorias complejas.

Definición: Se llama *variable aleatoria real* a una función medible $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, es decir, para todo Boreliano B en $\mathbb{R}$ se cumple:

$$Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\} \in \mathcal{M}$$

Si Y es una variable aleatoria real, entonces está definida, para todo Boreliano B en $\mathbb{R}$, la probabilidad μ del subconjunto de Ω preimagen por Y de B.

Definición: Se llama *distribución de probabilidad de la variable aleatoria* Y a la probabilidad p_Y de Borel en la recta real definida, para todo Boreliano B en $\mathbb{R}$ por la igualdad siguiente:

$$p_Y(B) = \mu(Y^{-1}(B)) = \mu\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\}$$

También se llama distribución de probabilidad de Y a la completación de la medida p_Y. Como para toda medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita en conjuntos acotados, la completación de p_Y (que denotaremos como $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_Y, p_Y)$, es un espacio de medida de Lebesgue-Stieljes en la recta real, y goza de las propiedades (por ejemplo las de regularidad) demostradas para todas ellas. La sigma-álgebra $\mathcal{L}_Y$ contiene a $\mathcal{B}$, sigma-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$.

En lo que sigue denotaremos $\{Y \in B\}$ al subconjunto en Ω, preimagen por Y, del boreliano B. En particular por ejemplo, si Y es real, para todo $a \in \mathbb{R}$ la notación $\{Y \leq a\}$ indica al conjunto $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq a\}$. Si Y es compleja , para todo $a \in \mathbb{C}$ la notación $\{Y = a\}$ indica al conjunto $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = a\}$.

En lo que sigue, m denotará la medida de Lebesgue en la recta, y la integral de una función compleja $h \in L^1(m)$ se denotará de cualquiera de las siguientes formas:

$$\int h\, dm = \int_{\mathbb{R}} h\, dm = \int_{-infty}^{+\infty} h(x)\, dm(x) = \int_{-infty}^{+\infty} h(x)\, dx$$

La integral de una función compleja $h \in L^1(p_Y)$ respecto a la probabilidad de Lebesgue-Stieljes p_Y en la recta real, se denotará de cualquiera de las siguientes formas

$$\int h\, dp_Y = \int_{\mathbb{R}} h\, dp_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dp_Y(x)$$

Ejercicio 1
(a) Demostrar que para toda $h \in L^+(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ y para toda $h \in L^1(p_Y)$, la función $h \circ Y : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ pertenece a $L^1(\mu)$ y se cumple:

$$\int_\Omega h \circ Y\, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dp_Y(x)$$

(b) Demostrar que si la variable aleatoria real Y es μ-integrable (es decir $Y \in L^1(\mu)$), o si es no negativa, entonces

$$\int_\Omega Y \, d\,\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\, p_Y(x)$$

Definición

Si Y es una variable aleatoria real no negativa, o compleja y μ- integrable (es decir $Y \in L^1(\mu)$) se define *valor esperado* $E(Y)$ *de* Y al valor de la integral

$$E(Y) = \int_\Omega Y \, d\,\mu$$

Según lo probado en la última parte del ejercicio anterior, se tiene

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\, p_Y(x)$$

Ejercicio Verificar que si Y tiene recorrido finito $\{a_1, a_2, \ldots a_k\} \subset \mathbb{C}$ (es decir Y es función simple), entonces

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{k} a_k p_Y(\{a_k\}) = \sum_{j=1}^{k} a_k \mu(\{Y = a_k\})$$

Definición: Se llama Función de distribución F_Y de la variable aleatoria real Y, a la función $F_Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$F_Y(a) = p_Y((infty, a]) = \mu\{Y \leq a\} \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

Nota: Más adelante se definirá variable aleatoria absolutamente continua, caracterizándola a partir de una función densidad $f_Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, que coincide, Lebesgue c.t.p con la derivada de la función de distribución F_Y. Se demostrará que, para y solo para las variables aleatorias absolutamente continuas, integrar en $\mathbb{R}$ respecto a la medida de probabilidad p_Y es lo mismo que multiplicar por la función densidad f_Y e integrar respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. A partir de lo anterior resulta, solo para las variables aleatorias absolutamente continuas, la igualdad siguiente:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx$$

Propiedades de la función de distribución

Se observa, de la definición de función de distribución para cualquier variable aleatoria Y, que

$$p_Y((a, b]) = F_Y(b) - F_Y(a)$$

Por lo tanto la función de distribución de la variable aleatoria real Y es una función de distribución para la medida de Lebesgue- Stieljes p_Y en la recta. Fue demostrado en general para cualquier medida de Lebesgue- Stieljes en $\mathbb{R}$, que la función de distribución cumple las siguientes dos propiedades:

(i) F_Y es monótona creciente en sentido amplio.

(ii) F_Y es semicontinua por la derecha.

Además F_Y cumple ciertas propiedades adicionales, fáciles de demostrar a partir de que μ (y por lo tanto p_Y) es medida de probabilidad:

(iii) $\lim F_Y(a)_{a \to -\infty} = 0$

(iv)$\lim F_Y(a)_{a \to +\infty} = 1$

Es inmediato demostrar, a partir de (i) las siguiente propiedad importante:

(v) F_Y es una función de variación acotada en todo intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (ver definición más adelante).

Como toda función de variación acotada (ver Teorema más adelante) la función de distribución cumple además:

(vi) F_Y es continua excepto a lo sumo en una cantidad numerable de puntos.

(iv) F_Y es derivable Lebesgue c.t.p., es decir existe $F'(x)$ definido como límite del cociente incremental de F_Y en x para Lebesgue casi todo punto $x \in I\!R$.

Ejercicio:

Probar que existen variables aleatorias Y singulares, es decir que la función de distribución F_Y (aunque sea continua) no cumpla la tesis del teorema fundamental del cálculo, es decir, que existen a y b reales tales que $F_Y(b) - F_Y(a) \neq \int_a^b F'(x)\, dx$. (Sugerencia: Tomar F_Y igual a una función de Cantor).

FUNCIONES REALES DE VARIACIÓN ACOTADA Y MEDIDAS SIGNADAS

Definición: Una función $F : [a,b] \mapsto I\!R$ es de variación acotada, si existe K real positivo tal que para toda **partición** finita de $[a,b]$ en intervalos $I_1 = [a_1, b_1], \ldots, I_k = [a_k, b_k]$ se cumple $\sum_{j=1}^{k} |F(b_j) - F_{(}a_j)| < K$.

Ejercicio

(a) Demostrar que toda función real monótona (en sentido amplio) en el intervalo $[a,b]$ es de variación acotada.

(b) Demostrar que si $F : [a,b] \mapsto I\!R$ es la diferencia de dos funciones crecientes (en sentido amplio) entonces F es de variación acotada.

(c) Demostrar que si $F : [a,b] \mapsto I\!R$ es de variación acotada, entonces las discontinuidades de F son de salto finito, y que F tiene a lo sumo una cantidad numerable de puntos de discontinuidad.

Teorema. Propiedades de funciones de variación acotada.

(a) $F : [a,b] \mapsto I\!R$ es una función de variación acotada si y solo si F es la suma de una función creciente en sentido amplio con una decreciente en sentido amplio.

(b) Si $F : [a,b] \mapsto I\!R$ es una función de variación acotada, entonces los puntos donde F es discontinua es a lo sumo numerable.

(c) Si $F : [a,b] \mapsto I\!R$ es una función de variación acotada entonces los puntos donde F no es derivable tiene medida de Lebesgue nula.

Demostración: Ver Folland, teorema 3.27. La parte c) de este teorema es la parte complicada de demostrar. En el libro de Folland la demostración requiere conocer varios resultados previos no vistos en el curso. Una demostración casi autocontenida y elemental, pero larga, puede encontrarse en Kolmogorov- Fomin: Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Editorial MIR, 1972, desde página 364, Propiedades de las funciones monótonas, hasta página 379 Derivada de la integral de Lebesgue.

Ejercicio: Verificar que las siguientes funciones son de variación acotada en todo intervalo acotado $[a,b]$, encontrar los puntos de discontinuidad, encontrar la derivada $F(x)$ Lebesgue casi todo punto de cada una de ellas, y decidir si se cumple o no la igualdad

$$¿\ F(b) - F(a) \int_a^b F(x)\, dx\ ?$$

(a) $F(x) = \int_0^x f(x)\, dx$ donde $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1/n) \chi_{[n,n+1)}(x)$

(b) $F(x)$ es la función de Cantor (definida en el ejercicio 6 del práctico 3), para x el intervalo $[0,1]$; $F(x) = F(1)$ para todo $x \geq 1$ y $F(x) = F(0)$ para todo $x \leq 0$.

(c) $F(x) = \chi_{[0,+\infty)}$

(d) $F(x) = x^2$

Sea $F : [a,b] \mapsto I\!R$ una función de variación acotada. Redefiniendo F en los puntos de discontinuidad, se puede asumir que F es semicontinua por la derecha. Por el teorema anterior, F es la diferencia de dos funciones crecientes en sentido amplio $F = F_1 - F_2$, cada una de ellas de variación acotada y por lo tanto, (después de redefinidas adecuadamente en los puntos de discontinuidad) semicontinuas por la derecha. De acuerdo a la caracterización de las medidas de Borel en la recta acotadas en intervalos acotados, existen (únicas dadas F_1 y F_2) las medidas de Borel ν_1 y ν_2 en $[a,b]$ que tienen a F_1 y F_2 como funciones de distribución. Por lo tanto, se obtiene el siguiente:

Teorema de caracterización de funciones de variación acotada como funciones de distribución de medidas signadas.

(a) Dada una función $F : [a, b] \mapsto I\!R$ de variación acotada y semicontinua por la derecha, existen medidas de Borel ν_1 y ν_2 finitas en $[a, b]$ tales que

$$F(x) - F(a) = (\nu_1 - \nu_2)((a, x]) \text{ para todo } b \in [a, b]$$

(b) Además, dada F, la medida signada $\nu_1 - \nu_2$ (por definición "medida signada"de Borel es la aplicación que a cada boreliano le asigna el número real obtenido como la diferencia de dos medidas finitas de Borel) es la única que cumple la igualdad (I).

(Nota: Dada F no son únicas ν_1 y ν_2 que cumplen (I), sino que es única su diferencia, en el sentido de que otra pareja de medidas que cumplan la igualdad (I) es tal que su diferencia, para todo boreliano B, coincide con $(\nu_1 - \nu_2)(B)$

(c) Recíprocamente, dada una medida signada entonces existe, única a menos de una constante, la función F que cumple la igualdad (I). Además F es de variación acotada y semicontinua superiormente.

Ejercicio: Demostrar el Teorema anterior. Sugerencia: para la parte a) admítase que toda función de variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes en sentido amplio. Para la parte b) supóngase que $\nu_1 - \ nu_2$ y $\mu_1 - \mu_2$ cumplen la igualdad (I), y demuéstres que $\nu_1 + \mu_2$ y $\nu_2 + \mu_1$ son medidas (positivas) de Borel finitas que coinciden en todos los borelianos. Para la parte c) constrúyase F como la diferencia de las funciones de distribución de las medidas de Borel (positivas) finitas nu_1 y nu_2.

Una clase especial de funciones $F : [a, b] \mapsto I\!R$ de variación acotada son las "funciones absolutamente continuas", según la siguiente definición:

Definición:

Una función $F : [a, b] \mapsto I\!R$ es *absolutamente continua* , si para todo ϵ real positivo existe $\delta > 0$ tal que para toda **colección** finita de intervalos disjuntos dos a dos $I_1 = [a_1, b_1], \dots, I_k = [a_k, b_k]$ contenidos en $[a, b]$ tales que $\sum_{j=1}^{k} |b_j - a_j| < \delta$ se cumple $\sum_{j=1}^{k} |F(b_j) - F_(a_j)| < \epsilon$.

Ejercicio: (a) Probar que toda función absolutamente continua en $[a, b]$ es continua y de variación acotada. (b) Encontrar un ejemplo de función de variación acotada que sea continua pero no absolutamente continua. (Sugerencia: la función de Cantor definida en el ejercicio 6 del práctico 3). (c) Considerar la medida de Borel finita $m(F(B))$, definida para todo boreliano $B \subset [a, b]$. Probar que $m(F(B)) = \int_B F' dm$ y deducir que si $B = 0$ entonces $m(B) = 0$. Por absurdo, si existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in N$ hay una colección B_n de intervalos con medida menor que $1/2^n$, tales que la medida de $F(B_n)$ es mayor o igual que ϵ, considerar el boreliano $B = \cup_k \cap^n B_n$. Por construcción

Las funciones absolutamente continuas se caracterizan por la siguiente propiedad:

Teorema fundamental del cálculo Una función $F : [a, b] \mapsto I\!R$ es absolutamente continua si y solo sí es derivable m- c.t.p. y su derivada $F'(x)$ cumple

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(x)\, dx \text{ para todo } x \in [a, b]$$

Demostración:

Es un corolario de teoremas de derivación más generales, para medidas abstractas, como se verá a continuación.

CONTINUIDAD ABSOLUTA

Definición

(a) Dadas dos medidas (positivas) μ y ρ cualesquiera en un mismo espacio medible se dice que ρ es absolutamente continua respecto de μ (y se denota $\rho << \mu$), si $\rho(A) = 0$ para todo A medible tal que $\mu(A) = 0$.

(b) Dada μ medida (positiva) y ρ medida signada (finita) en el mismo espacio medible, se define continuidad absoluta de ρ respecto de μ de la misma forma que antes.

(c) Más en general, sea ρ una medida compleja, es decir, una aplicación tal que a cada conjunto medible E le hace corresponder el número complejo $\rho_1(E) + i\rho_2(E)$ donde ρ_1 y ρ_2 son medidas signadas (finitas). Dada μ medida (positiva) en el mismo espacio medible, se define continuidad absoluta de ρ respecto de μ de la misma forma que antes.

Es inmediato verificar que una medida compleja es absolutamente continua respecto de μ si y solo si sus partes real e imaginaria lo son. Por otra parte una medida signada es una medida compleja que tiene parte imaginaria nula. (Nota: En el libro de Folland se usa otra definición de medida signada, admitiendo que puedan tomar valores infinitos. Con la definición de Folland las medidas signadas no son casos particulares de medidas complejas.)

Ejercicio: Sea un espacio de medida (positiva) $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

(a) Dada $f \in L^+$, demostrar que la aplicación

$$\rho(E) = \int_X f \, d\mu$$

para cada $E \in \mathcal{M}$ define una medida (positiva) en el mismo espacio medible, y que $\rho << \mu$.

(b)Dada una función real $f \in L^1(\mu)$, demostrar que la aplicación

$$\rho(E) = \int_X f \, d\mu$$

para cada $E \in \mathcal{M}$ define una medida signada en el mismo espacio medible, y que $\rho << \mu$.

(c) Dada una función compleja $f \in L^1(\mu)$, demostrar que la aplicación

$$\rho(E) = \int_X f \, d\mu$$

para cada $E \in \mathcal{M}$ define una medida compleja en el mismo espacio medible, y que $\rho << \mu$.

El ejercicio anterior muestra un procedimiento para construir medidas absolutamente continuas respecto de μ: integrar funciones dadas respecto de esa medida. El siguiente Teorema, prueba que ese procedimiento permite construir todas las medidas absolutamente continuas posibles, cuando éstas son finitas o sigma-finitas.

Teorema de Radon-Nikodym

(a) Si ρ y μ son dos medidas (positivas) sigma-finitas en un mismo espacio medible entonces $\rho << \mu$ si y solo si existe una función real medible no negativa $f \in L^+$ tal que

$$\rho(E) = \int_E f \, d\mu$$

para todo conjunto medible E. La función f es única μ-c.t.p.

(b) Si ρ es una medida signada (finita) y μ una medida (positiva) sigma-finita en un espacio medible, entonces $\rho << \mu$ si y solo si existe una función real $f \in L^1(\mu)$ tal que

$$\rho(E) = \int_E f \, d\mu$$

para todo conjunto medible E. La función f es única μ-c.t.p.

(c) Si ρ es una medida compleja (finita) y μ una medida (positiva) sigma-finita en un espacio medible, entonces $\rho << \mu$ si y solo si existe una función conpleja $f \in L^1(\mu)$ tal que

$$\rho(E) = \int_E f \, d\mu$$

para todo conjunto medible E. La función f es única μ-c.t.p.

Demostración: Ver Folland, Teoremas 3.8 y 3.12

El siguiente teorema relaciona las funciones reales de variable real absolutamente continuas con la continuidad absoluta respecto a la medida de Lebesgue en la recta de las medidas de Borel acotadas en intervalos acotados.

Teorema: Caracterización de medidas de Borel absolutamente continuas en la recta.

Sea ν una medida (positiva) de Borel finita en intervalos acotados de $\mathbb{R}$ (o también ν una medida signada finita en los borelianos de R) y sea F una función de distribución de ν, es decir: $F(b) - F(a) = \nu((a, b])$ para todos $a \leq b \in \mathbb{R}$.

La medida ν es absolutamente continua respecto a la medida m de Lebesgue en $\mathbb{R}$ ($\nu << m$ si y solo si la función F es absolutamente continua en todo intervalo $[a, b]$ acotado de $\mathbb{R}$.

Demostración:

Tomando parte positiva y negativa de F, basta asumir que F es no negativa, y por lo tanto μ es una medida positiva.

Si F no fuera absolutamente continua, existiría $\epsilon > 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existiría una colección B_n finita de intervalos disjuntos en $[a, b]$ tales que $m(B_n) \leq 1/2^n$ y $\nu(B_n) \geq \epsilon$. Considerando el boreliano $B = \cap_k \cup_{n \geq k} B_n$ resulta $m(B) = 0$ y $\nu(B) \geq \epsilon$ lo que contradice la continuidad absoluta de ν respecto de m.

Recíprocamente si ν no fuera aboslutamente continua respecto de m, entonces existiría un boreliano B contenido en algún intervalo acotado $[a, b]$ con $m(B) = 0$ y $\nu(B) = \epsilon > 0$. Para todo $\delta > 0$, el boreliano B se puede cubrir con una unión finita U de intervalos abiertos disjuntos $(a_j, b_j), \quad 1 \leq j \leq k$ tales que $m(U) \leq \delta$. Pero $\nu(\cup_j (a_j, b_j]) \geq \nu(U) \geq \nu(B) = \epsilon$, y por lo tanto $\sum_{j=1}^{k} |F(b_j) - F(a_j)| \geq \epsilon$ contradiciendo la continuidad absoluta de la función F.

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria real Y se llama *absolutamente continua* si su distribución de probabilidad p_Y en $\mathbb{R}$, (definida como $p_Y(B) = \mu(Y \in B)$ para todo boreliano $B \subset \mathbb{R}$), es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue m en la recta.

Ejercicio:

(a) Demostrar que una variable aleatoria real Y es absolutamente continua si y solo si su función de distribución $F_Y = \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua. (Sugerencia: es el teorema de caracterización de medida de Borel acotadas absolutamente continuas.

(b) Probar, usando el Teorema de Radon- Nikodym, que una variable aleatoria real Y es absolutamente continua, si y solo si existe una función $f_Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ real no negativa tal que

$$p_Y(B) = \mu(\{Y \in B\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_B(x) f_Y(x) \, dx \quad \text{para todo Boreliano } B \subset \mathbb{R}$$

(c) La función f_Y (de la parte anterior) se llama *densidad* de la variable aleatoria. Probar que $f_Y \in L^1(m)$ y que f_Y es única m-c.t.p.

(d) Deducir que la variable aleatoria real Y es absolutamente continua si y solo si su función de distribución F_Y cumple

$$F_Y(a) = \int_{-\infty}^{a} f_Y(x) \, dx \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

(e) Probar que la variable aleatoria real Y es absolutamente continua si y solo para toda función medible $h : \mathbb{R} \mapsto R$ real no negativa, y para toda función $h \in L^1(m)$ (Lebesgue integrable) se cumple:

$$\int_{-\infty}^{+infty} h(x) \, d\, p_Y(x) = \int_{-infty}^{+\infty} h(x) f_Y(x) \, dx$$

(f) Deducir que si la variable aleatoria real Y es no negativa, o si es μ integrable ($Y \in L^1(\Omega, \mu)$), entonces su valor esperado es:

$$E(Y) = \int_{\Omega} Y \, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, d\, p_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) \, dx$$

(g) Usando el teorema fundamental del Cálculo probar que la variable aleatoria Y es absolutamente continua si y solo si su función de distribución F_Y cumple:

$$F_Y(a) = \int_{-\infty}^{a} F'(x)\, dx \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

y que en ese caso la derivada $F'(x)$ es igual a la densidad m-c.t.p.