Introducción al Análisis Real. Curso 2003.
INTEGRACIÓN ABSTRACTA

Complemento teórico y ejercicios adicionales al práctico 3

Eleonora Catsigeras

2 de mayo de 2003.

1. El teorema de inducción para funciones no negativas.

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible cualquiera.

Definiciones: Se denota $\mathbb{R}^+$ a la semirrecta de reales no negativos $R^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, y se denota $\overline{\mathbb{R}}^+$, a *la semirrecta positiva completada*, esto es: $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

En $\overline{\mathbb{R}}^+$ *la sigma-álgebra de Borel* (que denotaremos simplemente con $\mathcal{B}$), está constituida por todos los borelianos en la semirrecta $\mathbb{R}^+$ y por estos unidos con $\{+\infty\}$.

Una función $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ se dice *medible* si $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Sea $L^+ = \{f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+ : f \text{ es medible }\}$

Por ejemplo es medible la *función característica* χ_E de un conjunto $E \in \mathcal{M}$, definida como $\chi_E(x) = 1$ si $x \in E$ y $\chi_E(x) = 0$ si $x \notin E$.

Una combinación lineal finita de funciones características con coeficientes reales se llama *función simple* .

Sea $S^+ = \{\varphi \in L^+ : \varphi \text{ es función simple}\}$.

Se observa que el recorrido de una función $\varphi \in S^+$ es un conjunto finito de reales no negativos $a_i \in R^+$ para $i = 0, 1, \ldots n$, que cumplen $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Como φ es medible, los conjuntos $E_i = \varphi^{-1}(\{a_i\}$ son medibles. Además forman una partición de X (son disjuntos dos a dos y su unión es X). Por construcción se obtiene: $\varphi = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{E_i}$, que se llama *representación canónica* de la función simple.

Se demostró en las clases teóricas el siguiente teorema:

Teorema 1. (Caracterización de L^+).
Dada $f \in L^+$ existe una sucesión de funciones simples $\varphi_n \in S^+$ tales que:

- *(Monotonía) $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$.*
- *φ_n converge puntualmente a f, es decir $\varphi_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$.*

Como consecuencia se obtiene el siguiente resultado:

Corolario del teorema 1. (Teorema de inducción en L^+.)
Si P es una propiedad que cumple las siguientes hipótesis de inducción:

a) Todas las funciones características de conjuntos en $\mathcal{M}$ verifican la propiedad P.

b) Si dos funciones reales no negativas f_1 y f_2 verifican la propiedad P y además $f_1 f_2 = 0$, entonces cualquier combinación lineal de ellas con coeficientes reales no negativos, verifica también la propiedad P.

c) Si una sucesión monótona creciente de funciones $f_n \in L^+$ que verifican la propiedad P, converge puntualmente a f, entonces f también verifica la propiedad P.

Entonces todas las funciones simples $f \in L^+$ verifican la propiedad P.

Demostración: Por las hipótesis a) y b) toda función simple $\varphi \in S^+$ verifica la propiedad P. En efecto, la representación canónica de φ es una combinación lineal finita de funciones características de las cuales a lo sumo una se anula para cada $x \in X$. Por la hipótesis de inducción c) y por el Teorema 1 de caracterización de L^+, toda función f en L^+ verifica la propiedad P. $\square$

2. Propiedades μ- casi todo punto.

Sea dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ cualquiera.

Definiciones: Dos funciones en L^+ se dicen *iguales μ-c.t.p* si el conjunto A de los puntos $x \in X$ para los cuales $f(x) \neq g(x)$ tiene μ- medida igual a cero. Es fácil verificar que la igualdad μ-c.t.p. es una relación de equivalencia.

Una sucesión f_n es *monótona creciente μ- c.t.p.* si el conjunto E de los puntos $x \in X$ para los cuales $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tiene *mu*- medida nula. Esta definición es equivalente a la condición de que para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto E_n de los puntos para los cuales no se cumple que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ tiene μ-medida nula.

Una sucesión f_n de funciones en L^+ se dice que *converge a f μ- c.t.p.* si el conjunto de los puntos $x \in X$ para los cuales $f(x)$ no es igual al límite de $f_n(x)$ tiene *mu*- medida nula.

Ejercicio 1: Probar que si f y g son funciones de L^+ entonces el conjunto $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ es medible. Probar que para toda sucesión f_n de funciones de L^+ es medible el conjunto E_n de los puntos $x \in X$ tales que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Probar que es medible el conjunto $E = \{x \in X : f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \; \forall \, n \in \mathbb{N}\}$. Probar que es medible el conjunto de los puntos $x \in X$ para los cuales no existe el límite de $f_n(x)$ cuando n tiende a infinito, y que es medible el conjunto de los puntos para los cuales existe ese límite y es igual a $g(x)$, donde $g \in L^+$ es una función dada.

3. Integración abstracta de funciones positivas.

Definiciones:

Sea $\varphi \in S^+$ con representación canónica $\varphi = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{E_i}$. Se define *la integral de φ respecto a la medida μ* como

$$\int \varphi \, d\,\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i \, \mu(E_i)$$

donde $0 \cdot \infty = 0$ por convención.

Sea $f \in L^+$. Se define *la integral de f respecto de la medida μ* como

$$\int f \, d\,\mu = \sup \left\{ \int \varphi \, d\,\mu : \varphi \in S^+, \, 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

Una *definición equivalente de integral de $f \in L^+$ respecto de μ* es la siguiente:

$$\int f \, d\,\mu = \lim \int \varphi_n \, d\,\mu$$

donde $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona cualquiera en S^+, creciente con n y que converge puntualmente a f, como en el enunciado del Teorema 1 de la sección anterior que caracteriza al espacio funcional L^+. (Este resultado se ha demostrado en las clases teóricas como corolario del teorema de convergencia monótona.)

Dado $E \in \mathcal{M}$ y dada $f \in L^+$, la *integral de f respecto de μ en E* es por definición:

$$\int_A f \, d\mu = \int f \cdot \chi_E \, d\mu$$

Observación: La definición de integral de una función simple implica que $\int_A d\mu = \int \chi_A \, d, \mu = mu(A) \ \forall A \in \mathcal{M}$. Se deduce entonces que dos medidas μ y ν en un mismo espacio medible son iguales si y solo si verifican $\int f \, d\mu = \int f \, d\nu$ para toda $f \in L^+$.

Se ha demostrado en las clases teóricas los siguientes teoremas:

Teorema 2: Convergencia monótona Si f_n es una sucesión de funciones en L^+ que es monótona creciente $\mu-$ c.t.p, (y por lo tanto convergente μ-c.t.p. a la función $f = \sup_n f_n \in L^+$), entonces

$$\text{lím} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Teorema 2: Propiedades de la integración abstracta

a) **Positividad:** $\int f \, d\mu \geq 0 \ \ \forall f \in L^+$ y es nula si y solo si $f = 0 \ \ \mu$- c.t.p.

b) **Definición μ-casi todo punto** Si $f = g \ \ \mu$-c.t.p. entonces $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

c) **Linealidad:** Si $f, g \in L^+$ y si $c \in R^+$ entonces $\int cf \ d\mu = c \int f \ d\mu$ y $\int f + g \ d\mu = \int f \ d\mu + \int g \ d\mu$.

d) **Aditividad numerable y continuidad absoluta:** Si $f \in L^+$ es una función dada fija, se define la aplicación $\nu_f : \mathcal{M} \mapsto \overline{I\!R}^+$ mediante la integración de f en A respecto de μ, esto es:

$$\nu_f(A) = (\text{def}) = \int_A f \ d\mu \ \ \forall A \in \mathcal{M}$$

Entonces ν_f es una medida (por lo tanto ν_f es sigma-aditiva) y además ν_f es absolutamente continua respecto de μ (esto es: $\nu_f(A) = 0$ si $\mu(A) = 0$).

Ejercicio 2: Encontrar un contraejemplo al recíproco de la parte b) del teorema anterior.

Ejercicio 3: Sea $f \in L^+$ y sea ν_f la medida definida por $\nu_f(A) = \int_A f \ d\mu \ \ \forall A \in \mathcal{M}$. Probar que para toda $g \in L^+$ se cumple:

$$\int g \ d\nu_f = \int gf \ d\mu$$

(Sugerencia: La igualdad es válida para g función característica. Aplicar el teorema de inducción a L^+ y el teorema de convergencia monótona de la integral.)

4. Integración abstracta de funciones no negativas como integral de Lebesgue en la semirrecta real positiva.

El teorema 4 de esta sección da una definición alternativa de la integral abstracta de una función $f \in L^+$ respecto a cualquier medida μ en un espacio medible cualquiera $(X, \mathcal{M})$.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida cualquiera. Sea $f : X \mapsto \overline{I\!R}^+$ una función cualquiera (medible) de $L^+(X)$. Se define $G_f : [0, \infty) \mapsto \overline{I\!R}^+$ de la siguiente forma:

$$G_f(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t \ \ \forall t \geq 0\}) = \mu(f^{-1}(t, \infty))$$

Considerando en la semirrecta real $[0, \infty)$, la sigma-álgebra de Lebesgue y la medida m de Lebesgue se obtiene que G_f es medible.

La integral de G_f respecto de la medida de Lebesgue en la semirrecta real positiva, iguala a la integral de f respecto a la medida μ en el espacio X. En efecto:

Teorema 4: Para toda $f \in L^+(X)$ se cumple:

$$\int_X f \, d\mu = \int_{[0,\infty)} G_f \, dm$$

Nota: La integral a la derecha es la integral impropia en el sentido de Riemann $\int_0^{+\infty} G_f(t)\, dt$

Demostración: La igualdad de la tesis se verifica si f es una función característica. Además, si f_1 y f_2 cumplen $f_1 f_2 = 0$ y ambas verifican la igualdad de la tesis, entonces la suma $f_1 + f_2$ también la verifica, y el producto cf_1 también, para toda $c \in R^+$. Por el teorema de inducción a L^+ la igualdad es válida para toda $f \in L^+(X)$ como se quería demostrar.$\Box$

5. Continuidad absoluta y cambio de variables en la integral.

Definición: Una medida $\nu : \mathcal{M} \mapsto \overline{I\!R}^+$ es *absolutamente continua respecto de* μ, denotándose $\nu << \mu$, si se cumple

$$\nu(A) = 0 \text{ para todo } A \text{ tal que } \mu(A) = 0$$

Nota: Más adelante en el curso se demostrará el Teorema de Radon- Nikodym, recíproco de la parte d) del teorema 3:

Si $\nu << \mu$ entonces existe una función $h \in L^+$ tal que $\nu(A) = \int_A h \, d\mu \ \ \forall A \in \mathcal{M}$.

Por lo tanto (ver ejercicio 3), $\nu << \mu$ si y solo si existe una función $h \in L^+$ tal que para toda $f \in L^+$ se cumple:

$$\int f \, d\nu = \int fh \, d\mu$$

.

Ejercicio 4: Sea el espacio X la recta real $I\!R$ (o el plano $I\!R^2$, o el espacio $I\!R^n$ o la circunferencia S^1), y sea m la medida de Lebesgue en X.

Sea $x_0 \in X$ un punto cualquiera del espacio. La medida δ_{x_0}, llamada Delta de Dirac concentrada en un punto $x_0 \in X$, está definida en todas las partes de X como $\delta_{x_0}(A) = 1$ si $x_0 \in A$ y $\delta_{x_0}(A) = 0$ si $x_0 \notin A$.

a) Probar que NO EXISTE ninguna función $h \in L^+$ tal que $\int \chi_A h \, dm = \delta_{x_0}(A) = \chi_A(x_0)$ para todo A Boreliano en X. (Sugerencia: Verificar primero que δ_{x_0} no es absolutamente continua respecto de m y aplicar el teorema de continuidad absoluta de la integral (parte d) del teorema 3).

b) Probar que $\int \chi_E \, d\delta_{x_0} = \delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0) \ \forall E \subset X \ \forall x_0 \in X$

c) Probar que $\int f \, d\delta_{x_0} = f(x_0) \ \forall f \in L^+$ (Sugerencia: utilizar el teorema de inducción en L^+ del final de la sección 1 y el teorema de convergencia monótona de la integral).

d) Concluir que la medida delta de Dirac concentrada en el punto x_0 puede definirse como la única medida δ_{x_0} tal que $\int f \, d\delta_{x_0} = f(x_0) \ \forall f \in L^+$ y que no existe ninguna función $h \in L^+$ tal que $\int fh \, dm = f(x_0)$ para todo $f \in L^+$.

Definición del operador T^* en el espacio de medidas Sean $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles, y sea $T : X \mapsto Y$ una transformación medible, (es decir: $T^{-1}(E) \in \mathcal{M} \; \forall E \in \mathcal{N}$).

Dada la medida μ en $\mathcal{M}$, se define la nueva medida $T^*\mu$ en $\mathcal{N}$ como

$$(T^*\mu)(E) = \mu(T^{-1}(E) \;\; \forall E \in \mathcal{N}$$

Se tiene el siguiente teorema de cambio de variables:

Teorema 4 : Cambio de variable en la integral
Sean $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles, y sea $T : X \mapsto Y$ una transformación medible. Dada μ medida en $(X, \mathcal{M})$, se cumple lo siguiente:

a) $T^*\mu$ es la única medida en $\mathcal{N}$ que verifica

$$\int f \circ T \, d\mu = \int f \, dT^*\mu \;\; \forall f \in L^+(Y)$$

b) Sea $(X, \mathcal{M}) = (Y, \mathcal{N})$ y $T : X \mapsto Y$ medible. Si existe una función $h \in L^+$ que cumple $\mu(E) = \int_{T^{-1}E} h \, d\mu \;\; \forall E \in \mathcal{M}$, entonces μ es absolutamente continua respecto de $T^*\mu$ y para toda $f \in L^+$ se cumple:

$$\int f(y) \, d\mu(y) = \int f(T(x))h(x) \, d\mu(x)$$

c) Si μ no es absolutamente continua respecto de $T^*\mu$ entonces no existe $h \in L^+$ que cumpla la igualdad de la parte b).

Demostración: La igualdad de las integrales de la parte a) se verifica para las funciones características. Por el teorema de inducción a L^+ y por el teorema de convergencia monótona de las integrales (Teoremas 1 y 2), se verifica la parte a) para toda $f \in L^+$.

Para probar la continuidad absoluta de la parte b) consideremos la medida ν_h, definida como en la parte d) del Teorema 3. Se tiene $\mu(A) = \nu_h(T^{-1}(A)$. Como $\nu_h << \mu$, si $\mu(T^{-1}(A) = 0$ se cumple $\nu : h(T^{-1}(A) = 0$ y consecuentemente $\mu(A) = 0$ como se quería probar.

La igualdad de las integrales de f al final de la parte b) se deduce del teorema de inducción a L^+ y del teorema de convergencia monótona de las integrales.

Finalmente, el enunciado de la parte c) es el contrarrecíproco del de la parte b). $\square$

Ejercicio 4: Sea el espacio X la recta real $\mathbb{R}$ (o el plano $\mathbb{R}^2$, o el espacio $\mathbb{R}^n$ o la circunferencia S^1), y sea m la medida de Lebesgue en X.

- Sea T una traslación en X. Demostrar que

$$\int f \circ T \, dm = \int f \, dm \;\; \forall f \in L^+$$

(Sugerencia: la medida de Lebesgue m es invariante por T; luego $T^*(m) = m$, y la igualdad se deduce del teorema de cambio de variable.)

- Sea $x_0 \in X$ y sea $T : X \mapsto X$ la transformación constante $T(x) = x_0$ para todo $x \in X$. Verificar que $T^*m = \delta_{x_0}$ y entonces no existe $h \in L^+$ tal que para toda $f \in L^+$ se cumpla:

$$int f(y) \, dm(y) = \int f(T(x))h(x) \, dm(x)$$

Nota: Existen en la recta transformaciones T continuas e invertibles tales que m no es absolutamente continua respecto de T^*m.

Corolario del teorema 4: Invariancia de medidas e integrales.
Sea $(X, \mathcal{M})$ *un espacio de medida y sea* $T : X \mapsto X$ *una transformación medible,*
Una medida μ *es invariante por* T (es decir: $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)\ \forall\, E \in \mathcal{M}$) *si y solo si*

$$\int f \circ T \, d\mu = \int f \, d\mu \ \ \forall\, f \in L^+$$

Demostración: Por definición del operador T^*, la medida μ es invariante por T si y solo si $T^*(\mu) = \mu$. Aplicando el teorema de cambio de variables (y la observación de que dos medidas son la misma si y solo si son iguales las integrales de toda $f \in L^+$ respecto a ambas), se obtiene la tesis de este corolario.

6. Aplicaciones a la Probabilidad.

Sea Ω un conjunto no vacío cualquiera llamado *espacio muestral* .

Sea $X : \Omega \mapsto R^+$ una función dada, cualquiera que tome valores reales no negativos.

Sea en R^+ la sigma-álgebra de Borel (que denotaremos en esta sección con $\mathcal{B}$), y sea p una medida de probabilidad en $(R^+, \mathcal{B})$, es decir una medida tal que $p(R^+) = 1$.

La pareja (X, p) se llama *variable aleatoria (real no negativa).*
Dado $B \in \mathcal{B}$, el subconjunto $X^{-1}(B) \subset \Omega$, preimagen por X de $B \subset \mathbb{R}^+$, se denota como:

$$X^{-1}(B) = \{X \in B\}$$

En Ω sea $\mathcal{M}$ la colección de todos los subconjuntos que son preimagen por X de algún boreliano $B \in \mathcal{B}$. Es fácil verificar que esa colección es una sigma álgebra.
Con esta construcción, la función X es medible del espacio $(\Omega, \mathcal{M})$ al espacio $(R^+, \mathcal{B})$.

7. Aplicaciones a la Teoría Ergódica de los sistemas dinámicos.

Sea ahora

Ejercicio 12.

Sugerencia: