

Análisis Real. Curso 2003.

RESUMEN TEÓRICO Y

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS AL PRÁCTICO 1.

26 de marzo de 2003

LOS EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS NO SON OBLIGATORIOS NI PRIORITARIOS.

Resumen de resultados vistos en la clase teórica.

Sea $X = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$, y para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ sea $T_\alpha : X \mapsto X$ la "traslación en X ", definida por $T_\alpha(x) = x + \alpha - \text{ent}(x + \alpha) \forall x \in X$. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todas las partes de X .

Se demostró en la clase teórica el siguiente teorema:

Teorema 1. Si $\mu : \mathcal{P}(X) \mapsto [0, \infty)$ es una medida (finita) definida en todas las partes de $X = [0, 1]$ y tal que es invariante por traslaciones EN x (es decir $\mu(T_\alpha(A)) = \mu(A)$ para todo $A \subset X$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$) entonces $\mu = 0$ (es decir $\mu(A) = 0 \forall A \subset X$).

Demostración: Sea en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si $x_1 - x_2$ es racional. Elegir en X (usando el axioma de elección) un representante y uno solo de cada clase de equivalencia, y considerar el conjunto $C \subset X$ de esos representantes elegidos. Se verifica que, para α variando en el conjunto de todos los racionales en $[0, 1]$, la colección numerable de conjuntos $T_\alpha(C)$ es una partición de X (Es decir, los conjuntos de esa colección son disjuntos dos a dos y su unión es X). Se deduce que $\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C)$. Se concluye que, por ser μ finita, se debe cumplir que $\mu(C) = 0$, que $\mu(X) = 0$, y por lo tanto $\mu(A) = 0$ para todo $A \subset X$. $\square$

Sea $\mathcal{L}$ una sigma-álgebra en $X = [0, 1]$. que contiene a todos los sub-intervalos $I \subset X$.

Nota: Se deduce que $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es la sigma-álgebra de Borel en $X = [0, 1]$. Sin embargo $\mathcal{L}$ no es necesariamente igual $\mathcal{B}$.

Algunas consecuencias del teorema 1 son:

- **Corolario 1:** Si existe alguna medida m en $([0, 1], \mathcal{L})$ tal que $m(I)$ es igual a la longitud de I , para todo intervalo $I \subset X$, y que m es invariante por las traslaciones (para todo $A \in \mathcal{L}$), entonces $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(X)$.

Nota: Los subconjuntos de X que no pertenecen a $\mathcal{L}$ se llaman "no $\mathcal{L}$ -medibles".

- **Corolario 2:** El conjunto $C \subset [0, 1]$ construido en la demostración del teorema 1 es no $\mathcal{L}$ -medible.
- **Corolario 3:** *Existencia de conjuntos no medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$.*

Sea $\mathcal{L}$ una sigma-álgebra en $\mathbb{R}$ que contiene a todos los intervalos de reales. Si existe una medida m en $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ tal que $m(I)$ es igual a la longitud de I para todo intervalo de reales, y tal que m es invariante por las traslaciones $T_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $T_\alpha(x) = \text{def } x + \alpha \forall x, \alpha \in \mathbb{R}$, para todos los subconjuntos de $\mathcal{L}$; entonces existe algún conjunto $C \subset \mathbb{R}$ que no está en $\mathcal{L}$. (Tales conjuntos son llamados "no $\mathcal{L}$ -medibles" en $\mathbb{R}$.)

Nota: En próximas clases teóricas se demostrará, construyéndolas, que existen sigma-álgebras $\mathcal{L}$ y medidas m que cumplen las hipótesis del corolario 3. Cuando tal espacio de medida es "completo" (de acuerdo a definición que veremos) m se llama medida de Lebesgue, y los conjuntos de $\mathcal{L}$ se llaman Lebesgue-medibles.

- **Definiciones.**

Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sea $J \subset S^1$ un arco de S^1 , es decir, $J = \text{def } \{z \in S^1 : z = e^{2\pi i x}, x \in I\}$, donde I es un intervalo de reales; y sea la longitud de J igual a 2π por la longitud de I .

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se define la "traslación T_α en S^1 " (también llamada rotación en S^1 , racional o irracional según sea el real α) a la transformación $T_\alpha^*(z) = \text{def } ze^{2\pi i \alpha}$ para todo $z \in S^1$.

• **Corolario 4:** *Existencia de conjuntos no medibles Lebesgue en S^1 .*

Si $\mathcal{L}$ es una sigma-álgebra de subconjuntos de S^1 que contiene a todos los arcos $J \subset S^1$, y si m es una medida en $(S^1, \mathcal{L})$ tal que $m(J)$ es igual a la longitud de J para todo arco $J \subset S^1$, y m es invariante por todas las “traslaciones en S^1 ”, entonces existe algún conjunto $C \subset S^1$ que no está en $\mathcal{L}$. (Tales conjuntos son llamados “no $\mathcal{L}$ medibles” en S^1 .)

Ejercicios complementarios al práctico 1.

Ejercicio 10. Demostrar los corolarios 1 a 4.

Sugerencia para probar el corolario 3: Usar el corolario 1 definiendo en $[0,1)$ una sigma-álgebra y una medida adecuadas a partir de la sigma-álgebra $\mathcal{L}$ y de la medida m en R .

Sugerencia para probar el corolario 4: utilizar el corolario 1 y la biyección $h : [0,1) \mapsto S^1$ definida por $h(x) = e^{2\pi ix} \forall x \in [0,1)$.

Ejercicio 11.

Sea $X = [0,1) \times [0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$.

Sean dados α y β reales cualesquiera, y sea la “traslación en X ” $T_{\alpha,\beta} : X \mapsto X$ definida como

$$T_{\alpha,\beta}(x,y) = (x + \alpha, y + \beta) - (\text{ent}(x + \alpha), \text{ent}(y + \beta))$$

11.a Completar la demostración del siguiente teorema:

Teorema 2: Si μ es una medida finita definida en todas las partes de $X = [0,1) \times [0,1)$ tal que μ es invariante por las traslaciones en X , entonces μ es cero.

Sugerencia de demostración:

Sea en X la relación de equivalencia $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ cuando $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ son racionales. Elegir en X (usando el axioma de elección) un representante y uno solo de cada clase de equivalencia, y considerar el conjunto $C \subset X$ de esos representantes elegidos. Verificar que, para (α, β) variando en el conjunto de todas las parejas de racionales en $[0,1)$, la colección numerable de conjuntos $T_{\alpha,\beta}(C)$ es una partición de X (Es decir, los conjuntos de esa colección son disjuntos dos a dos y su unión es X). Deducir que $\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C)$. Concluir que, por ser μ finita, se debe cumplir que $\mu(C) = 0$, que $\mu(X) = 0$, y por lo tanto $\mu(A) = 0$ para todo $A \subset X$. $\square$

11.b Enunciar y deducir, a partir del teorema 2, **corolarios 2.1; 2.2, 2.3 y 2.4**, análogos a los corolarios 1, 2, 3 y 4 del ejercicio anterior.

Sugerencia: Sustituir en los enunciados de los corolarios 1 a 4 lo siguiente:

- $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^2$,
- intervalo por rectángulo (por definición un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ es el producto cartesiano $I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ de dos intervalos $I_1 \subset \mathbb{R}, I_2 \subset \mathbb{R}$),
- longitud de intervalo por área de rectángulo
- (Para el corolario 2.4) sustituir circunferencia S^1 del corolario 4, por el toro bidimensional T^2 . (Se define T^2 como el producto cartesiano $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$.)

Ejercicio 12. Enunciar y demostrar un teorema relativo a la existencia de conjuntos no $\mathcal{L}$ -medibles en $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia: imitar el enunciado del corolario 3 del ejercicio 10 y el procedimiento sugerido en el ejercicio 11 para pasar de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$.