

Introducción al Análisis Real. Curso 2003.

TEOREMAS COMPLEMENTARIOS DE INTEGRACIÓN ABSTRACTA.

Complemento teórico y ejercicios adicionales al práctico 3.

Eleonora Catsigeras, 6 de mayo de 2003.
Corregido: 27 de mayo de 2003.

Ejercicio 1. Teoremas de inducción.

- **Teorema de inducción a L^+ .**

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible cualquiera y sea $P \subset L^+$ un subconjunto de funciones que cumple:

H1: $\chi_A \in P \quad \forall A \in \mathcal{M}$.

H2: $af + bg \in P \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$ y para todas $f, g \in P$ tales que $fg = 0$.

H3: Si f_n es una sucesión creciente de funciones en P que converge puntualmente a f , entonces $f \in P$.

Probar que $P = L^+$.

- **Teorema de inducción a $L^1(\mu)$.**

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida cualquiera y sea $P \subset L^1(\mu)$ un subconjunto de funciones complejas integrables que cumple:

H1: $\chi_A \in P \quad \forall A \in \mathcal{M}$.

H2: $af + bg \in P \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$ y para todas $f, g \in P$ tales que $\operatorname{Re}(fg) = 0$ μ -c.t.p.

H3: Si f_n es una sucesión μ -c.t.p. creciente de funciones reales no negativas en P que converge μ -c.t.p. a f , entonces $f \in P$.

Probar que $P = L^1(\mu)$.

Ejercicio 2. Teorema de cambio de variable en la integral y medidas invariantes.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(Y, \mathcal{N})$ un espacio medible. Dada $T : X \mapsto Y$ transformación medible, se define en $\mathcal{N}$ la medida $T^*\mu$ como $T^*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{N}$.

a) Probar que para todo $A \in \mathcal{N}$ para toda $f \in L^+(Y)$ y para toda $f \in L^1(Y, T^*\mu)$ se cumple:

$$\int_A f \, dT^*\mu = \int_{T^{-1}(A)} f \circ T \, d\mu$$

(Sugerencia: usar teoremas de inducción a L^+ y a L^1 .)

b) Sea ahora $(X, \mathcal{M}) = (Y, \mathcal{N})$; $T : X \mapsto X$ medible. Probar que μ es invariante por T (es decir $T^*(\mu) = \mu$) si y solo si

$$\int f \, d\mu = \int f \circ T \, d\mu$$

para toda $f \in L^+$, si y solo si también vale la igualdad anterior para toda $f \in L^1(\mu)$.

c) Encontrar la medida $T^*\mu$ y expresar la igualdad del cambio de variables de la parte a) cuando μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es:

c- i La traslación con $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo: $T(x) = x + \alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c-ii La homotecia de razón $\alpha > 0$ real fijo: $T(x) = \alpha x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3. Teorema de la distribución acumulada. Valor esperado de variables aleatorias en espacios de probabilidad.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $f \in L^+(X, \mathcal{M})$. Se define la “Función de distribución $G_f : [0, \infty) \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ acumulada hacia la derecha” como

$$G_f(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

a) Probar que $G_f \in L^+([0, \infty), \mathcal{L})$ y que

$$\int_X f \, d\mu = \int_{[0, \infty)} G_f \, dm$$

donde $([0, \infty), \mathcal{L}, m)$ es la medida de Lebesgue en la semirrecta de reales no negativos. (Sugerencia: la medibilidad de G_f y la igualdad de las integrales pueden probarse por inducción a L^+).

b) Probar que si μ es finita, entonces G_f es acotada, decreciente y semicontinua por la derecha; por lo tanto G_f es integrable Riemann en cualquier intervalo acotado y la integral de Lebesgue de $G_f \geq 0$ es igual a su integral impropia en la semirrecta positiva (valiendo $+\infty$ si y solo si la integral impropia es divergente).

c) Sea $(\Omega, \mathcal{M}, p)$ un espacio de probabilidad (es decir un espacio de medida tal que $p(\Omega) = 1$). Las funciones $Y : \Omega \mapsto [0, \infty)$ medibles se llaman variables aleatorias reales no negativas. La función $F_Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida como $F_Y(t) = p(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq t\}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ se llama función de distribución acumulada (hacia la izquierda) de la variable aleatoria Y . La integral $\int Y \, dp$ se llama valor esperado $E(Y)$ de Y . Deducir de las partes a) y b) que

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} (1 - F_Y(t)) \, dt$$

Nota: esta última igualdad se usa frecuentemente en los cursos básicos de probabilidad para definir el valor esperado, ya que no requiere conocimientos previos sobre integración abstracta en espacios medibles.

Ejercicio 4. Teorema de caracterización de Funcionales en L^+ como integrales.

Sea $(X, \mathcal{M})$ espacio medible cualquiera. Sea $\Lambda : L^+ \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ una aplicación que cumple:

i) $\Lambda(cf) = c\Lambda(f) \quad \forall f \in L^+, c \in \mathbb{R}^+$

ii) $\Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g) \quad \forall f, g \in L^+$

iii) Si $f_n \in L^+$ es una sucesión monótona creciente que converge puntualmente a f entonces $\lim \Lambda(f_n) = \Lambda(f)$.

a) Probar que dada μ medida en $(X, \mathcal{M})$ existe y es único $\Lambda : L^+ \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ que cumple i), ii), iii) y tal que $\Lambda(f) = \int f \, d\mu \quad \forall f \in L^+$.

b) Probar que dado $\Lambda : L^+ \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ que cumple i), ii), iii) existe y es única μ medida en $(X, \mathcal{M})$ tal que $\Lambda(f) = \int f \, d\mu \quad \forall f \in L^+$.

Ejercicio 5. Linealidad de la integral respecto de la medida. Probar que si μ y ν son dos medidas en el espacio medible $(X, \mathcal{M})$ y si a, b son reales no negativos entonces se cumple:

$$\int f d(a\mu + b\nu) = a \int f d\mu + b \int f d\nu$$

para toda $f \in L^+$ y para toda $f \in L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$.

(Sugerencia: usar los teoremas de inducción a L^+ y a $L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$).

Ejercicio 6. Continuidad absoluta de medidas e integral del Delta de Dirac.

Sean μ y ν medidas en el espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Se dice que ν es absolutamente continua respecto de μ (y se denota $\nu \ll \mu$) si $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) = 0$.

a) Dada $h \in L^+$, sea ν_h la medida definida como $\nu_h(A) = \int_A h d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}$.

- Probar que $\nu_h \ll \mu$
- Probar que $\nu = \nu_h$ si y solo si $\int f d\nu = \int fh d\mu$ para toda $f \in L^+$ y para toda $f \in L^1(\nu)$ (Sugerencia: inducción a L^+ y a $L^1(\nu)$).

b) Sea $x_0 \in X$. Sea δ_{x_0} la medida Delta de Dirac concentrada en x_0 , definida para todo $A \in \mathcal{M}$ como $\delta_{x_0}(A) = 1$ si $x_0 \in A$ y $\delta_{x_0}(A) = 0$ si $x_0 \notin A$.

- Probar que $\delta_{x_0} \ll \mu$ si y solo si $\mu(\{x_0\}) \neq 0$
- Demostrar que $\nu = \delta_{x_0}$ si y solo si $\int f d\nu = f(x_0)$ para toda $f \in L^+$ y para toda $f \in L^1(\nu)$
- Deducir que $L^1(\delta_{x_0})$ es todo el espacio de las funciones complejas medibles.

c) Probar que son equivalentes las siguientes condiciones:

- c 1) $\delta_{x_0} \ll \mu$
- c 2) $\mu(\{x_0\}) \neq 0$
- c 3) Existe $h \in L^+$ tal que $f(x_0) = \int fh d\mu$ para toda $f \in L^+$.
- c 4) Existe $h \in L^+$ tal que $f(x_0) = \int fh d\mu$ para toda función f compleja medible.
- c 5) Existe $h \in L^+$ tal que $f(x_0) = \int fh d\mu$ para toda función característica f medible.
- c 6) Existe $h \in L^+$ tal que $f(x_0) = \int fh d\mu$ para las funciones características $f = \chi_A$ de los conjuntos A de alguna familia que genera la sigma-álgebra $\mathcal{M}$.

d) Encontrar una función $h \in L^+$ que cumple todas las igualdades anteriores cuando $\delta_{x_0} \ll \mu$.

e) En el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ de medida de Lebesgue en la recta, sea $h_n = 2n\chi_{(-1/n, 1/n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y sea δ_0 la medida Delta de Dirac concentrada en 0.

- Verificar que δ_0 no es absolutamente continua respecto de m y por lo tanto no se cumple ninguna de condiciones de la parte c).
- Probar que existe y encontrar $h \in L^+$ que es el límite puntual de h_n .
- Probar que $f(0) = \int f d\delta_0 = \lim_n \int fh_n dm =$ para toda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua.
- Probar que cualquiera sea $h \in L^+$ las integrales $f(0) = \int f d\delta_0$ y $\int fhd m$ no son iguales para toda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua. (Sugerencia: Demostrar por absurdo, usando la condición c 6). Probar que la función característica de cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$ es el límite puntual de alguna sucesión monótona creciente f_n de funciones continuas reales no negativas.)

Ejercicio 7. Límite débil estrella de medidas.

Sea X un espacio métrico compacto. **Definición:** Una sucesión de medidas de probabilidad ν_n en el espacio medible Borel $(X, \mathcal{B})$ se dice que *converge- w^* a la medida de Borel ν* (se lee “converge débil estrella”; w viene de “weak”; se denota $\lim^* \nu_n = \nu$) si $\int f d\nu = \lim_n \int f d\nu_n =$ para toda $f : X \mapsto \mathbb{C}$ continua.

- a) Sea μ una medida de Borel en X y sea una sucesión de medidas $\nu_n \ll \mu$ que converge- w^* a la medida ν . Probar que ν no es necesariamente absolutamente continua respecto de μ (Sugerencia: ejemplo de la parte e) del ejercicio 6.)
- b) Probar que $\lim^* \nu_n = \nu$ NO implica que $\lim_n \nu_n(A)$ sea igual a $\nu(A)$ para todo boreliano A .
- c) Sea $T : X \mapsto X$ una transformación continua. Probar que si $\lim^* \nu_n = \nu$ entonces $\lim^* T^*(\nu_n) = T^*(\nu)$ (ver definición del operador T^* en el ejercicio 2).
- d) En el intervalo $[0, 1]$ con la medida de Lebesgue m restringida a los Borelianos, se considera la transformación continua $T : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ definida por $T(x) = x/2$. Para todo n natural T^n denota la composición de T consigo misma n veces. Se considera la sucesión de medidas $\nu_n = (T^n)^*m$ (ver la definición del operador T^* en el ejercicio 2).

- Probar que ν_n son medidas de probabilidad, es decir $\nu_n([0, 1]) = 1$.
- Probar que $\nu_n \ll m$ para todo n (ver la definición de continuidad absoluta en el ejercicio 6).
- Demostrar que ν_n es w^* -convergente y hallar la medida $\nu = \lim^* \nu_n$.
- Verificar que ν es una probabilidad invariante por T que no es absolutamente continua respecto de m .
- Dado x_0 en $[0, 1]$ se llama órbita por x_0 a la sucesión de puntos $o_{x_0} = \{T^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$. Verificar que se cumple

$$\nu_n(\{o_{x_0}\}) = \nu(\{o_{x_0}\}) = 0 \quad \text{para todo } x_0 \in (0, 1]$$

$$\nu_n(\{y \in \{o_{x_0}\} \text{ para algún } x_0 \in (0, 1]\}) = 1$$

$$\nu(\{y \in \{o_{x_0}\} \text{ para algún } x_0 \in (0, 1]\}) = 0$$

- Para cada punto $x_0 \in [0, 1]$ se considera el conjunto (llamado ω -límite de x_0) definido como $\omega_{x_0} = \{y \in [0, 1] : \text{existe una subsucesión de } o_{x_0} \text{ que converge a } y\}$. Probar que para todo $x_0 \in [0, 1]$ se cumple $\nu(\omega_{x_0}) = 1$ y $\nu_n(\omega_{x_0}) = 0$