

# Elementos de topología usados en Cálculo. <sup>®</sup>

## Parte II: SUCESIONES

Eleonora Catsigeras \*

Versión preliminar: 25 de marzo de 2004

Nota: Las partes del texto comprendidas entre dos marcas ✓ son esenciales y las comprendidas entre marcas ◇ son secundarias.

Las demostraciones terminan con la marca □.

### Parte [II-A] SUCESIONES EN ESPACIOS MÉTRICOS.

## 1 Definición y ejemplos de sucesiones

Sea  $A$  un conjunto dado de antemano y fijo, no vacío cualquiera, que llamaremos “codominio” de la sucesión.

Sea  $N^+$  el conjunto de los números naturales positivos, y sea  $N$  el conjunto de los números naturales incluido el 0.

✓ **Definición 1.1** Se llama *sucesión de elementos de  $A$*  (denotada como  $\{a_n\}_{n \in N^+}$ , también denotada como  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ) a una colección (o fila) ordenada y numerada de elementos de  $A$  tal que:

*En cada posición  $n \in N^+$  (o sea en cada ubicación  $n$  de la colección o fila), hay un elemento y uno solo  $a_n$  que pertenece al conjunto  $A$ .* ✓

◇ Dicho de otra forma una sucesión es *una aplicación o función con dominio  $N^+$  y codominio  $A$*  (ver apéndice sobre funciones o aplicaciones, en la parte I de estas notas: “Espacios Métricos”).◇

✓ Así, en una sucesión <sup>1</sup> su primer término es un elemento único  $a_1$  del conjunto  $A$  que está en el lugar o posición 1 de la fila, otro elemento  $a_2$  de  $A$  en la posición 2 (que puede ser o no el mismo elemento  $a_1$  que estaba en el lugar 1 de la sucesión), otro en la posición 3, que se denota como  $a_3$ , y así sucesivamente, en todas y cada una de las *infinitas* posiciones de la colección (es decir para todo  $n \in N^+$ ) hay algún elemento que pertenece al conjunto  $A$ . El subíndice  $n$  indica la posición, lugar o ubicación en la fila, y es un número natural. El elemento  $a_n$  que ocupa esa

---

\*Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingeniería. Universidad de la República. Dirección: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

<sup>1</sup>En los diccionarios de la lengua española las palabras sucesión y serie son sinónimos. Sin embargo en matemática son conceptos diferentes. Más adelante en el curso de cálculo se definirá serie. No toda sucesión es una serie, aunque toda serie se puede mirar como una sucesión

posición o lugar en la fila, no es en general un número, sino un objeto del conjunto  $A$ , y se llama *término  $n$ -ésimo* de la sucesión. ✓

✓ **Nota 1.2** Puede haber algún o algunos elementos de  $A$  que aparecen repetidos en la sucesión (aparece el mismo elemento del conjunto  $A$  en diferentes lugares de la fila).✓

✓No necesariamente se agotan todos los elementos del conjunto  $A$  en la sucesión.✓

✓ **Ejemplo 1.3** Sea  $A$  el conjunto de los puntos de un plano. Consideremos un cuadrado contenido en  $A$ , elijamos uno de sus vértices, fijo, que llamamos  $a_1$  y llamemos  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  respectivamente a los cuatro vértices del cuadrado recorridos en sentido horario, comenzando con el vértice  $a_1$  elegido al principio.

Sea ahora  $a_5 = a_1$  (el mismo vértice del cuadrado elegido primero de todos). Sea  $a_6 = a_2$ ,  $a_7 = a_3$ ,  $a_8 = a_4$  y así sucesivamente, en forma recurrente llamemos  $a_n = a_{n-4}$ . Tenemos así bien definida una sucesión  $\{a_n\}$  de puntos del plano  $A$ . ✓

✓Nota: La sucesión del ejemplo 1.3 se dice que es periódica con período 4. ✓

◇ Notas: Los puntos diferentes de la sucesión del ejemplo 1.3 que son solo cuatro, no se confunden ni superponen entre ellos, cuando se dibujan (o marcan) en un papel usando un grafito que tenga un diámetro  $\epsilon > 0$  lo suficientemente fino en relación a la distancia entre los puntos.

Por ejemplo si  $\epsilon > 0$  es menor que el lado del cuadrado dividido 3 entonces la distancia entre dos puntos diferentes de la sucesión es mayor que  $\epsilon$  y se pueden marcar esos puntos diferentes con un grafito de diámetro  $\epsilon$  sin que queden pegados ni superpuestos. ◇

✓ **Ejemplo 1.4** Sea  $A$  el conjunto de los puntos de un plano. Consideremos un cuadrado contenido en  $A$ , elijamos uno de sus vértices, fijo, que llamamos  $a_1$  y llamemos  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  respectivamente a los cuatro vértices del cuadrado recorridos en sentido horario, comenzando en el primer vértice  $a_1$  elegido al principio.

Sea ahora  $a_5$  el punto medio del segmento que une  $a_1$  con  $a_2$ . Sea  $a_6$  el punto medio del segmento que une  $a_2$  con  $a_3$ , sea  $a_7$  el punto medio del segmento que une  $a_3$  con  $a_4$  y así sucesivamente, en forma recurrente llamemos  $a_n$  al punto medio del segmento que une el punto  $a_{n-4}$  con el siguiente  $a_{n-3}$ . Tenemos así bien definida una sucesión  $\{a_n\}$  de puntos del plano.

◇ **Ejercicio 1.5** a) Dibujar (marcar) en el plano con un grafito de diámetro  $\epsilon = 1$  mm los  $\hat{n}$  primeros puntos (o términos) de la sucesión del ejemplo 1.4, hasta que los términos se confundan todos entre sí. Anotar cuál es la última posición  $\hat{n}$  de los puntos dibujados antes de que se confundan entre sí.

b) Hacer lo mismo con un grafito de diámetro  $\epsilon = 0.2$  mm.

c) Probar, con argumentos lógicos (usando o no símbolos matemáticos) que cualquiera sea el número real  $\epsilon > 0$  que represente la medida en milímetros del diámetro del grafito del lápiz que se utilice para marcar los puntos de esta sucesión, existe  $\hat{n}$  natural, tal que todos los puntos de la sucesión dibujados o que se dibujen, a partir del que ocupa la posición  $\hat{n}$ , se confunden o superponen en el papel como si fueran siempre el mismo punto  $a$ . En otras palabras, se pide probar que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\hat{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, a) < \epsilon$  para todo  $n$  natural mayor que  $\hat{n}$ .

d)¿Cuál es el punto  $a$  del plano que cumple la afirmación anterior?

e) Probar que  $a_n \neq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ . ◇

◇ **Ejemplo 1.6** RECREATIVO: Tomemos al pie de la letra la definición 1.1. Ya que  $A$  puede ser un conjunto cualquiera no vacío, se me ocurre tomar como  $A$  el conjunto de todas las discotecas de la ciudad “Si-Tomaste-No-Camines”.

En el folleto turístico dice que la ciudad tiene nada menos y nada más que cuatro discotecas, llamadas respectivamente “Punto Deuno”, “Punto Dedós”, “Punto Detrés”, y “Punto Decuatro”, se da un mapa de la ciudad, y una tabla de distancias entre las discotecas.

Se me ocurre hacer un plan o itinerario en que cada día  $n$  de mi vida (y me creo inmortal) a partir del día de hoy que es el día 1, voy a ir a bailar a una y solo una discoteca  $a_n$ , pero que nunca pisaré la discoteca Punto Decuatro porque allí va mi ex. Establezco el siguiente itinerario hasta la eternidad: hoy, que es el día 1 voy a la discoteca  $a_1 =$  Punto Detrés, mañana que es el día 2 voy a la discoteca  $a_2 =$  Punto Deuno, pasado mañana que es el día 3, voy a la discoteca  $a_3 =$  Punto Deuno, de vuelta. En el día cuatro voy a la discoteca  $a_4 =$  Punto Dedós, en día 5 voy a  $a_5 =$  Punto Detrés, y después durante todos los días siguientes (que son infinitos días) a partir del sexto voy a ir a la discoteca  $a_n =$  Punto Dedós, para todo  $n \geq 6$ .

Mi itinerario es una sucesión de elementos de  $A$  que es finalmente constante. ◇

◇ **Ejercicio 1.7** a) Probar que en el ejemplo anterior existe un elemento  $a \in A$  que cumple lo siguiente:

Para todo  $\epsilon > 0$  real arbitrario dado, existe  $\hat{n}$  natural, tal que  $\text{dist}(a_n, a) \leq \epsilon$  para todo  $n \geq \hat{n}$ .

b) Inventá, para fijar ideas, algún ejemplo de espacio métrico que te interese, se te ocurra o te divierta, y en él construite sucesiones, como se te ocurran, y cada vez que leas una definición o teorema, interpretá qué significa el enunciado en TU ejemplo. ◇

✓ **Definición 1.8** *Sucesión constante* es una sucesión  $\{a_n\}$  tal que existe  $a \in A$  que cumple  $a_n = a$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ . ✓

✓ **Definición 1.9** Dada una sucesión  $a_n$  de elementos de  $A$  se llama *COLA  $\hat{n}$ -ésima*, a la nueva sucesión que se obtiene de la dada eliminando los términos que ocupaban los primeros  $\hat{n}$  lugares.

✓

◇ Nota: Para obtener la sucesión cola hay que correr los restantes términos de la sucesión, manteniendo el orden en que estaban, de forma que el primero de la cola  $\hat{n}$ -ésima es el que antes ocupaba el lugar  $\hat{n} + 1$  en la sucesión dada. ◇

◇ **Ejemplo 1.10** Sea  $A = \{x, y, z\}$  un conjunto formado por exactamente tres elementos (distintos), que son los tres archivos guardados en una carpeta del disco de una computadora. Sea  $a_n$  la sucesión de elementos de  $A$  dada por la secuencia en que se van a abrir esos archivos en el futuro hasta la eternidad, por ejemplo  $a_1 = y, a_2 = z, a_3 = z, a_4 = y, a_n = z$  para todo  $n \geq 5$ . La cola 5-ésima de la sucesión es la sucesión constante igual a  $z$ . ◇

✓ **Definición 1.11** Una sucesión se dice *finalmente constante* si alguna cola de esa sucesión es constante. ✓

◇ El ejemplo 1.10 es una sucesión finalmente constante.

✓ **Definición 1.12** Sea  $A$  un espacio métrico. Dado un número real  $\epsilon > 0$  se dice que dos puntos  $a$  y  $b$  del conjunto  $A$  (que pueden ser o no el mismo punto) *son aproximadamente el mismo punto, o se confunden, o se superponen con margen de error  $\epsilon$*  cuando la distancia entre ellos es menor estrictamente que  $\epsilon$ . Se denota indistintamente como  $a \approx_\epsilon b$ , o  $\text{dist}(a, b) < \epsilon$  o  $a \in B_\epsilon(b)$  o  $b \in B_\epsilon(a)$ . ✓

✓ **Definición 1.13** Una sucesión  $\{a_n\}$  de elementos en un espacio métrico  $A$  se dice que es *aproximadamente constante con margen de error  $\epsilon > 0$*  cuando existe  $a \in A$  tal que  $a_n \approx_\epsilon a$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ . Se observa que no es necesario que  $a$  sea un elemento de la sucesión. ✓

✓ La sucesión  $\{a_n\}$  se dice que es *aproximadamente finalmente constante con margen de error  $\epsilon > 0$*  cuando alguna cola de la sucesión es aproximadamente constante con ese margen de error. Dicho con otras palabras,  $\{a_n\}$  es *aproximadamente finalmente constante con margen de error  $\epsilon$  si y solo si existe  $\hat{n}$  natural, y existe  $a \in A$  (no necesariamente  $a$  en la sucesión dada) tales que  $\text{dist}(a_n, a) < \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$* . ✓

✓ **Definición 1.14** SUCESIONES EN LA RECTA REAL O SUCESIONES DE REALES (Sucesiones usadas a lo largo del curso de CÁLCULO).

Sea  $A = \mathbb{R}$  el conjunto de números reales o puntos en la recta. Una *sucesión de reales*, también llamada *sucesión en la recta real* o también *sucesión de puntos en la recta*, es una sucesión (según la definición 1.1) cuyo codominio  $A$  es el conjunto  $\mathbb{R}$  de *todos* los números reales.

bf Observación: NO llamamos *sucesión de reales* a la sucesión cuyos elementos son reales pero para la cual el conjunto codominio  $A$  dado de antemano, está contenido en  $\mathbb{R}$  y NO es todo el conjunto  $\mathbb{R}$  de los reales. A esa sucesión la llamamos *sucesión de elementos de  $A$* , especificando cuál es el subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  dado de antemano.

**Ejemplo:** Sea  $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ , y sea con codominio  $A$  la sucesión  $a_n = 1/n$ . Esta sucesión NO es llamada “sucesión de reales”, a secas, sino “sucesión (cuyos términos son reales) de elementos de  $A$ ”. En cambio si elegimos de antemano el codominio  $\mathbb{R}$ , la sucesión  $b_n = 1/n$  es una *sucesión de reales*.

**Definición:** Decimos que  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  es *diferente* de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ , porque los codominios  $\mathbb{R}$  y  $A$  respectivos son conjuntos distintos; estas dos sucesiones se consideran *diferentes* a pesar de que los puntos de una y otra sucesión puedan ser los mismos.

**Convención:** Cuando se da una sucesión cuyos términos son reales y *se omite decir cuál es el codominio* se conviene en que el codominio es todo  $\mathbb{R}$ .

✓ **Ejemplo 1.15** Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  la sucesión definida por la correspondencia que a a cada natural  $n \geq 1$  (posición, lugar o ubicación en la sucesión) le hace corresponder el número real  $a_n = (-1)^n(\sqrt{2} + 1/\sqrt{n})$ , donde  $(-1)^n$  vale 1 si  $n$  es par y vale  $-1$  si  $n$  es impar. Es una sucesión de reales o de puntos en la recta. ✓

✓ Afirmamos que esta sucesión cumple lo siguiente:

- a) No es constante.
- b) No es finalmente constante.
- c) Es aproximadamente constante con margen de error  $\epsilon = 5$ .
- d) No es aproximadamente constante con margen de error  $\epsilon = 3$ .
- e) Es finalmente aproximadamente constante con margen de error  $\epsilon = 3$ .
- f) No es finalmente aproximadamente constante con todo margen de error  $\epsilon > 0$  que se dé arbitrariamente. ✓

✓ **Ejercicio 1.16** (a) Marcar con un lápiz los  $\hat{n}$  primeros puntos de la sucesión del ejemplo 1.15 en la recta real para  $\hat{n} = 20$ , rotulando cada punto con la etiqueta “ $a_n$ ” escribiendo el número natural  $n$  que indica la posición en la sucesión correspondiente a cada punto marcado. (Sugerencia: usar calculadora para calcular los distintos puntos  $a_n$  y una regla para medir distancias en la recta y marcar los puntos correspondientes).

(b) Hacer un gráfico de barras para la misma sucesión, tomando en un eje horizontal los números naturales, y en vertical para cada  $n \in N^+$  una barra apoyada en el punto de abscisa  $n$  y con altura igual a  $a_n$ .

(c) Probar usando si se desea el dibujo de la parte a) o el gráfico de la parte b), las afirmaciones a) hasta f) del párrafo 1.15 ✓

## 2 Límite o convergencia de sucesiones en espacios métricos

✓ A lo largo de la siguiente sección  $(A, \text{dist})$  denota un espacio métrico, es decir  $A$ , el codominio de la sucesión dado de antemano y fijo, es un conjunto no vacío cualquiera y  $\text{dist}$  es una aplicación distancia entre pares de puntos de  $A$ , que cumple con la definición de espacio métrico dada en la parte I de estas notas.

Por ejemplo  $A$  puede ser el conjunto de puntos de un plano, o un subconjunto no vacío de él, o también puede ser  $A = \mathbb{R}$  la recta real, o conjunto de todos los números reales, o un subconjunto no vacío de él, con la distancia usual definida en la parte I de estas notas.

Se recuerda que la distancia usual entre dos puntos  $a$  y  $b$  de  $\mathbb{R}$  es  $|a - b|$ . Todas las definiciones de la sección anterior sobre sucesiones se aplican al caso particular de las sucesiones de reales, usando  $\text{dist}(a, b) = |a - b|$  y  $B_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ . ✓

✓ Sea  $\{a_n\}$  una sucesión cualquiera de elementos de  $A$ .

Sea  $a$  un punto cualquiera de  $A$ , que pertenece o no pertenece a la sucesión  $\{a_n\}$ . ✓

### ✓ Definición 2.1 LÍMITE O CONVERGENCIA

Se dice que la sucesión  $\{a_n\}$  es convergente, o que tiene límite  $a$  (y se denota  $\lim a_n = a$  o  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  o  $a_n \rightarrow a$ ), cuando

Existe un elemento  $a \in A$  que cumple lo siguiente:

Para todo  $\epsilon > 0$  real (dado arbitrario cualquiera), existe  $\hat{n}$  natural tal que  $\text{dist}(a_n, a) < \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ . ✓

**Observación importante:** El punto  $a$  puede o no pertenecer a la sucesión  $\{a_n\}_{n \in N^+}$  pero, DEBE PERTENECER AL CONJUNTO  $A$  fijado de antemano como codominio de la sucesión. En caso contrario se dice que la sucesión NO TIENE LÍMITE O NO ES CONVERGENTE (aunque pueda llegar a ser convergente o tener límite la nueva sucesión que se obtendría con los mismos puntos ordenados de igual modo, pero cambiando de antemano el codominio por otro conjunto más grande).

✓ Interpretación:

La siguiente afirmación (P) de la definición de límite dice que:

(P): “Existe  $\hat{n}$  natural tal que  $\text{dist}(a_n, a) < \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ ”

(P) significa que alguna cola de la sucesión (ver definición 1.9) es aproximadamente constante igual a cierto  $a \in A$ , con margen de error  $\epsilon$ . Esto sucede cuando todos los puntos de la sucesión excepto quizás los que ocupan los primeros  $\hat{n}$  lugares, se confunden con margen de error  $\epsilon$ , con un MISMO punto  $a$ , aunque quizás no todos o ninguno de los puntos  $a_n$  coincida exactamente con el punto  $a$ .

La afirmación (Q) de la definición de límite dice que:

(Q): “Para todo  $\epsilon > 0$  real se cumple (P)”

(Q) significa que la afirmación (P), (es decir que la sucesión es aproximadamente finalmente constante con margen de error  $\epsilon$ ), se cumple para cualquier margen de error  $\epsilon > 0$  que se dé o pueda dar arbitrariamente. ✓

◊ El significado de la definición de límite o convergencia es que la sucesión, sea o no finalmente constante igual a  $a$ , tiene alguna cola que se confunde toda con un único punto  $a \in A$ ; es aproximadamente constante igual a  $a \in A$  **para CUALQUIER observador, cualquiera que sea su margen tolerable de error  $\epsilon > 0$  positivo**, incluyendo los observadores con margen de error pequeñísimo, porque tienen muy buena vista, o más pequeño aún porque usan un potente microscopio, o grandes porque son miopes, o gigantes, porque miran la sucesión desde otra galaxia. Todos los que tengan algún margen de error positivo, verán la sucesión aproximadamente finalmente constante igual a un punto constante  $a \in A$ . ◊

✓ **Ejemplo 2.2** Sea la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  de números reales definida por la regla siguiente:  $a_n = 2 + 1/n$  si  $n$  es natural tal que  $1 \leq n \leq 50$ ;  $a_n = 2 + 1/50$  si  $n$  es natural par mayor que 50; y  $a_n = 2 - 1/50$  si  $n$  es natural impar mayor que 50. Esta sucesión no es convergente, no tiene límite, porque, si bien un observador con margen de error  $\epsilon = 1/10$  le confunde su cola  $\hat{n}$ -ésima con la sucesión constante igual a 2 (para  $n > \hat{n} = 20$ ), otro observador con margen de error  $\epsilon = 1/100$  no la confundirá con ninguna sucesión constante por más que espere a mirar la cola  $\hat{n}$ -ésima con  $\hat{n}$  natural tan grande como quiera. (Tarea: ). ✓

✓ **Ejercicio 2.3** Probar las afirmaciones enunciadas al final del ejemplo anterior, ya sea en forma gráfica o analítica ✓

✓ **Convención importante:** Si existe un elemento  $a$  que cumple la afirmación (Q) (en algún contexto) pero NO PERTENECE al conjunto  $A$  dado de antemano como codominio de la sucesión, entonces LA SUCESIÓN NO VERIFICA LA DEFINICIÓN 2.1 DE SER CONVERGENTE en  $A$ ; ES NO CONVERGENTE, Y SE DICE QUE NO TIENE LÍMITE. ✓

✓ **Ejemplo 2.4** Sea  $A$  (conjunto codominio dado de antemano, antes de dar o definir ninguna sucesión) el conjunto de los reales mayores que 2, y sea en  $A$  la sucesión  $a_n = 2 + 1/n$ . Esta sucesión no es convergente, o sea no tiene límite, sobre-entendiéndose que NO se cumple la definición 2.1 para ningún elemento  $a \in A$ .

En segundo lugar tomemos ahora el conjunto codominio dado de antemano, (antes de dar o determinar la sucesión) como el conjunto  $B$  de todos los números reales positivos, y definamos en  $B$  la sucesión  $b_n = 2 + 1/n$ . Esta es una sucesión de puntos de  $B$ , DIFERENTE <sup>2</sup> a la sucesión  $a_n$  de puntos de  $A$  que teníamos antes. La sucesión  $b_n = 2 + 1/n$  de puntos de  $B$  es convergente y tiene límite igual a 2, sobre-entendiéndose que ese límite 2 cumple la definición 2.1, en particular pertenece al conjunto codominio  $B$  dado de antemano. ✓

### ✓ Teorema 2.5 UNICIDAD DEL LÍMITE

Si una sucesión  $a_n$  en un espacio métrico  $A$  cualquiera, es convergente, entonces *el punto límite*  $a \in A$  (que cumple  $a_n \rightarrow a$  según la definición 2.1), *es único*. ✓

---

<sup>2</sup> Ambas sucesiones  $a_n$  y  $b_n$  recorren los mismos puntos de la recta real pero tienen codominios o universos dados de antemano diferentes (respectivamente los conjuntos  $A$  y  $B$  que son distintos).

Por convención dos sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ , para ser la misma sucesión, primero que nada tienen que tomar sus puntos de un mismo conjunto codominio o universo  $A = B$  dado de antemano, y recién después cada punto  $a_n \in A$  de la primera sucesión debe coincidir (como elemento del conjunto  $A = B$ ) con el respectivo punto  $b_n \in B = A$ .

✓ *Demostración:* Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de elementos del espacio métrico  $A$ , que cumple  $a_n \rightarrow a$  y  $a_n \rightarrow b$  con  $a$  y  $b$  puntos de  $A$ . Basta probar que  $a = b$ .

Por la definición 2.1 de límite de una sucesión, sabiendo que  $a_n \rightarrow a$ , tenemos **para todo**  $\epsilon > 0$  real positivo **cualquiera**, la siguiente afirmación:

(I) Existe un natural  $\bar{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, a) < \epsilon$  para todo  $n > \bar{n}$ .

Análogamente, sabiendo que  $a_n \rightarrow b$ , tenemos en particular para el mismo  $\epsilon > 0$  arbitrario dado, la afirmación análoga:

(II) Existe un natural  $\hat{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, b) < \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Sea  $n_0$  cualquier natural mayor que los dos números naturales  $\bar{n}$  y  $\hat{n}$  de las afirmaciones (I) y (II) respectivamente.

Podemos aplicar usando en particular  $n_0$  en lugar de  $n$ , las dos desigualdades de las afirmaciones (I) y (II) a la vez. Obtenemos pues lo siguiente:

(III)  $\text{dist}(a_{n_0}, a) < \epsilon$  y  $\text{dist}(a_{n_0}, b) < \epsilon$ .

Ahora usamos la propiedad triangular  $\text{dist}(a, b) \leq \text{dist}(a, a_{n_0}) + \text{dist}(a_{n_0}, b)$  y la propiedad simétrica de la distancia  $\text{dist}(a, a_{n_0}) = \text{dist}(a_{n_0}, a)$ . Sustituyendo en la desigualdad triangular las acotaciones con  $\epsilon$  que tenemos en la afirmación (III), se obtiene el siguiente resultado:

(IV)  $\text{dist}(a, b) < 2\epsilon$ .

Pero desde el principio sabíamos que  $\epsilon$  era un número real positivo *cualquiera*.

Como  $\text{dist}(a, b)$  es un número real no negativo, y por (IV) es menor estrictamente que el doble de *CUALQUIER* número real positivo  $\epsilon$ , se deduce que  $\text{dist}(a, b) = 0$ .

Por la condición de positividad de la distancia, la afirmación de que la distancia entre dos puntos del espacio métrico sea cero implica que los dos puntos son el mismo, es decir,  $a = b$  como queríamos demostrar.  $\square$  ✓

◊ La siguiente proposición muestra que en cualquier espacio métrico  $A$ , la verificación de que un punto  $a \in A$  es el límite de una sucesión convergente  $\{a_n\}$  se puede sustituir por la verificación de que cierta sucesión de reales  $d_n$  es convergente con límite cero. ◊

◊ **Proposición 2.6** En un espacio métrico cualquiera  $A$ , una sucesión  $a_n \rightarrow a \in A$  si y solo si la sucesión de reales  $d_n$ , asociada a la sucesión dada por la igualdad  $d_n = \text{dist}(a_n, a)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , cumple  $d_n \rightarrow 0$ . ◊

◊ **Ejercicio 2.7** Demostrar la proposition anterior ◊

En la parte II-C de este capítulo, que trata sobre el Cálculo Práctico de límites, se dan métodos y “recetas” para calcular concretamente el límite de sucesiones de reales dadas, en diversos casos más o menos particulares.

En lo que sigue de esta parte II-A y en la parte II-B se dan teoremas generales, aplicables para deducir si existen o no límites, aún sin conocer exactamente la sucesión dada, pero sabiendo que cumple ciertas propiedades más bien generales, y se relaciona la topología del espacio métrico con la existencia de sucesiones convergentes y con el comportamiento de su límite.

### 3 Subsucesiones

Consideremos un conjunto  $A$  cualquiera no vacío.

✓ **Definición 3.1** Dada una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  con codominio en el conjunto  $A$ , se llama *subsucesión de  $\{a_n\}$*  a la nueva sucesión  $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}^+}$  con el mismo codominio  $A$ , que se obtiene de la sucesión dada mediante el siguiente proceso:

**Primero)** Se retiraron de la sucesión dada ninguno, alguno o algunos de sus términos, de forma que los que queden sean los que estaban en una cantidad *infinita* de lugares.

**Segundo)** Se identificaron los lugares  $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$  de los términos que quedaron, donde

$n_1$  es el lugar (no el término  $a_{n_1}$ ) del primer término  $a_{n_1}$  que NO se retiró,

$n_2 > n_1$  es el lugar (no el término) del segundo término que NO se retiró, etc.

Tenemos  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_j < \dots$  para todo  $j \in \mathbb{N}^+$ .

En particular si no se hubiese retirado ningún término entonces quedaría:  $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_j = j, \dots$

**Tercero)** Se forma la subsucesión  $b_j$  reubicando sin alterar el orden que tenían a todos los términos que quedaron  $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$  de la sucesión vieja, de modo de ocupar los lugares naturales que quedaron vacíos después de retirar los términos en el primer paso del proceso. Es decir:  $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, \dots, b_j = a_{n_j}, \dots$  ✓

El proceso anterior está implícito en la siguiente definición concisa de subsucesión, que es equivalente a la definición constructiva detallada dada antes:

✓ **Definición 3.2** Una sucesión  $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}^+}$  se llama *subsucesión* de una sucesión dada  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  si tienen el mismo codominio  $A$  y además

$$b_j = a_{n_j} \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}^+$$

donde  $n_1, n_2, \dots, n_j, \dots$  son *infinitos* números naturales fijos que cumplen:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_j < \dots \quad \checkmark$$

✓ **Interpretación:** Si la sucesión se mira como una fila o colección ordenada, con una cantidad infinita y numerada de lugares, la subsucesión es la nueva fila que se obtiene cuando se van algunos de los ocupantes de ciertos lugares de la fila, de modo que *sigan quedando infinitos lugares ocupados*, y se se forma una nueva fila *corriendo sin desordenarlos a los ocupantes que quedaron de la fila vieja* de modo de llenar todos los lugares vacíos. ✓

✓ **Ejemplo 3.3** La cola  $\hat{n}$ -ésima de una sucesión dada  $\{a_n\}$  es una subsucesión: se obtiene de la dada retirando los  $\hat{n}$  primeros términos, y corriendo hacia delante los que quedan sin desordenarlos, de modo que el primero de la subsucesión sea el que antes ocupaba el lugar  $\hat{n}+1$ , es decir:  $b_j = a_{\hat{n}+j}$  con  $\hat{n}$  fijo, y  $j \geq 1$  natural cualquiera variable. ✓

✓ **Ejemplo 3.4** La misma sucesión dada se considera subsucesión de ella misma  $b_j = a_{n_j}$  con  $n_j = j$  para todo  $j \in \mathbb{N}^+$ . Es la subsucesión que se obtiene en el caso que no se retire ningún término de la sucesión dada. ✓

✓ **Ejemplo 3.5** Dada cualquier subsucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  la subsucesión de los términos que ocupaban lugar par es  $b_j = a_{2j}$  para todo  $j \in \mathbb{N}^+$ ; en este caso es  $n_j = 2j$ .

La subsucesión de los términos que ocupaban lugar impar es  $c_j = a_{2j-1}$  para todo  $j \in \mathbb{N}^+$ . ✓

✓ **Ejemplo 3.6** Si una sucesión dada no constante tiene términos en infinitos lugares, todos iguales a una misma constante  $c$ , entonces tiene una subsucesión constante igual a  $c$ . ✓

✓ **Ejercicio 3.7** Probar que toda sucesión periódica de período  $p$  tiene  $p$  subsucesiones constantes. (Nota:  $a_n$  es periódica de período  $p$  por definición si  $a_n = a_{n+p}$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  para cierto  $p$  natural positivo fijo, mínimo posible). ✓

◇ **Ejemplo 3.8** Sea en  $\mathbb{R}$  la sucesión  $a_n = n(-1)^n + n + 1/n$ . La subsucesión de los términos que ocupan lugar par es  $b_j = 4j + 1/2j$  y no es convergente. La subsucesión de los términos que ocupan lugar impar a partir del tercero es  $c_m = 1/(2m + 1)$  para todo  $m \in \mathbb{N}^+$  es convergente a cero. ◇

◇ **Ejercicio 3.9** Probar gráfica o analíticamente las afirmaciones del ejemplo anterior ◇

En lo que sigue  $A$  es un espacio métrico cualquiera:

✓ **Teorema 3.10** CONVERGENCIA DE SUBSUCESIONES.

*Una sucesión de elementos de  $A$  es convergente si y solo si todas sus subsucesiones son convergentes. Además en ese caso todas las subsucesiones tienen el mismo límite “a” que el de la sucesión dada.* ✓

✓ *Demostración:* Supongamos primero por hipótesis que la sucesión dada  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  es convergente con límite  $a$ , y probemos como tesis que todas sus subsucesiones son convergentes al mismo límite  $a$ .

Tomemos una subsucesión  $b_j = a_{n_j}$  cualquiera. El objetivo será probar que  $b_j$  cumple la definición 2.1 de convergencia con límite  $a$ , sabiendo que la cumple  $a_n$ .

Por hipótesis y por la definición 2.1

(I) Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\hat{n}$  natural tal que  $\text{dist}(a_n, a) < \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ .

El resultado parcial que probaremos en esta parte de la demostración del teorema 3.10 será utilizado también para probar otros resultados. Por eso lo escribimos por separado, como Lema 3.11.<sup>3</sup> ✓

✓ **Lema 3.11** Si  $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}^+}$  es una subsucesión de  $\{a_n\}_n \in \mathbb{N}^+$ , entonces  $b_j = a_{n_j}$  para algún natural  $n_j$  y se cumple:

$$n_j \geq j \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}^+$$

*Demostración del lema 3.11:* Por la definición de subsucesión tenemos que  $n_1 < n_2 < \dots < n_j, \dots$  son números naturales positivos. Entonces  $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq n_1 + 1 \geq 1 + 1 = 2$ ,  $n_3 \geq n_2 + 1 \geq 3, \dots, n_j \geq n_{j-1} + 1 \geq (j-1) + 1 = j$ , tenemos  $n_j \geq j$  para todo  $j \in \mathbb{N}^+$ . □ ✓

✓ Ahora que está terminada la demostración del lema 3.11, podemos continuar con la demostración del teorema 3.10:

(II) Usemos la afirmación (I). Si tomamos  $j > \hat{n}$ , tendremos  $n_j \geq j > \hat{n}$ , o sea  $n_j > \hat{n}$ .

---

<sup>3</sup>Un lema es un teorema independiente, subteorema de un teorema principal porque está probado dentro de la demostración de ese, pero cuyo enunciado y prueba son autocontenidos y por lo tanto su resultado puede usarse también para demostrar otros teoremas.

Reuniendo (I) con (II) se obtiene lo siguiente:

(III) Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\hat{n}$  natural tal que  $\text{dist}(a_{n_j}, a) < \epsilon$  para todo  $j > \hat{n}$

Pero en (III) podemos escribir  $b_j$  en lugar de  $a_{n_j}$  porque  $b_j = a_{n_j}$ . Entonces (III) queda

(IV) Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\hat{n}$  natural tal que  $\text{dist}(b_j, a) < \epsilon$  para todo  $j > \hat{n}$ .

Lo anterior es la definición 2.1 de  $b_j \rightarrow a$  como queríamos demostrar.

Ahora demostremos el recíproco, que es trivial: si por hipótesis todas las subsucesiones de  $a_n$  convergen, entonces, en particular converge la subsucesión que es ella misma. Luego tenemos como tesis que  $a_n$  converge a cierto límite que podemos llamar  $a$ .  $\square \quad \checkmark$

### $\checkmark$ Corolario 3.12 CONDICIONES DE NO CONVERGENCIA

1) Si una sucesión tiene dos subsucesiones convergentes a límites diferentes entonces es no convergente.

2) Si una sucesión tiene alguna subsucesión no convergente entonces es no convergente.  $\checkmark$

$\checkmark$  Ejercicio 3.13 Probar que toda sucesión periódica de período mayor o igual que 2 es no convergente.  $\checkmark$

$\diamond$  Ejercicio 3.14 Sea la sucesión de reales dada por  $a_n = 1/\log n$  si  $n$  es potencia de 10 (es decir para  $n = 1 = 10^0$ ,  $n = 10 = 10^1$ ,  $n = 100 = 10^2$ ,  $n = 1000 = 10^3$ , ...) y  $a_n = 4$  si  $n$  no es potencia de 10.

(a) Probar que no es convergente.

(b) Encontrar para la sucesión dada tres subsucesiones diferentes que sean convergentes pero que no todas tengan el mismo límite.

(c) Encontrar para la sucesión dada una subsucesión que no sea convergente y que no sea la misma sucesión dada.

(d) Probar que si una subsucesión de esa sucesión dada es convergente entonces su límite es necesariamente 4 o 0.  $\diamond$

### $\diamond$ Clasificación de la sucesiones según sus subsucesiones.

En el teorema 3.10 vimos que si una sucesión es convergente entonces todas sus subsucesiones lo son y tienen el mismo límite. Y recíprocamente.

Luego, el conjunto de todas las sucesiones en un espacio métrico cualquiera, se clasifica en tres clases:

(C) Las sucesiones Convergentes (para ellas todas las subsucesiones son convergentes y tienen el mismo límite)

(NC-NSC) Las sucesiones No Convergentes para las cuales No existen Subsucesiones Convergentes.

(NC-ESC) Las sucesiones No Convergentes para las cuales Existen Subsucesiones Convergentes (Nota: Por el teorema 3.10 en esta clase no todas las subsucesiones son convergentes (pues la propia sucesión dada no lo es) pero además se puede probar que entre las que sí son convergentes no todas convergen al mismo límite  $a$ ).  $\diamond$

$\diamond$  Más adelante veremos que las sucesiones de reales acotadas pueden ser convergentes o no serlo, pero si no lo son entonces siempre pertenecen a la clase (NC-ESC).  $\diamond$

Más precisamente:

✓ **Teorema 3.15** SUBSUCESIONES CONVERGENTES DE SUCESIONES ACOTADAS DE REALES.

*Toda sucesión de reales que sea acotada contiene subsucesiones convergentes.* ✓

✓ La demostración de este teorema está en la sección 6. ✓

◇ En la sección 5 veremos que en cualquier espacio métrico se pueden definir cierto tipo de sucesiones llamadas sucesiones de Cauchy (ver definición 5.1). Estas sucesiones llamadas de Cauchy, en ciertos espacios métricos llamados *completos*, (ver definición 5.4) son siempre convergentes, pero en otros espacios métricos llamados *no completos*, pueden ser convergentes o no serlo. Se demuestra que cuando una sucesión de Cauchy es no convergente entonces es necesariamente del tipo NC-NSC, es decir no solo es ella no convergente sino que tampoco tiene subsucesiones convergentes. ◇

Más precisamente:

✓ **Teorema 3.16** SUCECIONES DE CAUCHY CON SUBSUCESIONES CONVERGENTES

*En cualquier espacio métrico  $A$  si una sucesión  $\{a_n\}$  es de Cauchy (ver definición 5.1) y tiene alguna subsucesión convergente, entonces es  $\{a_n\}$  convergente.* ✓

✓ La demostración de este teorema está en la sección 5. ✓

◇ En la sección 7 se definirán sucesiones de reales que tienden (por abuso de lenguaje) a más infinito, menos infinito, o infinito a secas, como un caso particular de sucesiones de reales no convergentes. Se verá que además hay otras sucesiones de reales no convergentes que tampoco tienden a infinito. Pero si una sucesión de reales tiende a infinito, entonces es no convergente y además es del tipo NC-NSC, es decir ni ella, ni ninguna subsucesión de ella puede ser convergente. ◇

Más precisamente:

◇ **Teorema 3.17** SUBSUCESIONES SUCECIONES DE REALES QUE TIENDEN A INFINITO.

*Ninguna sucesión de reales que tienda a más infinito, a menos infinito o a infinito contiene subsucesiones convergentes.* ◇

◇ La demostración de este teorema está en la sección 7, corolario 7.19. ◇

## 4 ◇ CARACTERIZACIÓN SECUENCIAL DE CERRADOS.

Sea  $A$  un espacio métrico cualquiera. Sea  $H$  un subconjunto de  $A$ .

◇ **Definición 4.1** PUNTO LÍMITE DE UN CONJUNTO  $H$ .

Se llama *punto límite de  $H \subset A$*  a un punto  $a \in A$  (que puede pertenecer o no a  $H$ ) para el cual:

*Existe alguna sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  en  $A$ , tal que  $a_n \in H$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  y además*

$$\lim a_n = a \quad \diamond$$

◇ **Observación:** Todos los puntos de  $H$  son puntos límite de  $H$  pues si  $a \in H$  entonces la sucesión constante  $a_n = a$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  tiene límite  $a$  y sus elementos todos en  $H$ . Luego, por definición  $a$  es un punto límite de  $H$ . ◇

Sin embargo no todo punto límite de  $H$  pertenece necesariamente a  $H$ , como lo muestra el siguiente ejemplo:

◇ **Ejemplo 4.2** En la recta real  $\mathbb{R}$  el intervalo semicerrado  $H = [2, 5)$  tiene a 5, que no pertenece a  $H$ , como punto límite pues  $5 = \lim 5 - 1/n$ , y  $(5 - 1/n) \in H \forall n \in \mathbb{N}^+$ . ◇

◇ **Ejercicio 4.3** (a) Probar que si  $a$  es un punto exterior a  $H$  entonces no es un punto límite de  $H$ .

(b) Probar que si  $a$  es un punto de la frontera de  $H$  entonces es un punto límite de  $H$ .

(Sugerencia: Dado  $a$  en la frontera de  $H$  inventar un procedimiento para construir una sucesión  $a_n$  de puntos en  $H$  que tiendan a  $a$ , imitando la construcción de la sucesión  $a_n$  que está en la demostración del teorema 4.4. )

(c) Concluir que el conjunto de los puntos límites de  $H$  es la clausura o adherencia  $\overline{H}$  de  $H$ .

◇ **Teorema 4.4** CARACTERIZACION DE CERRADOS POR SUCESIONES.

*Un subconjunto  $H$  de un espacio métrico  $A$  es cerrado si y solo contiene a todos sus puntos límite. Dicho de otra forma:*

*$H \subset A$  es cerrado si y solo si todo punto que sea límite en  $A$  de una sucesión de elementos de  $H$  pertenece a  $H$ .* ◇

◇ *Demostración:* Tomemos primero como hipótesis que  $H$  es cerrado. Probemos que si  $a$  es un punto límite de  $H$  entonces  $a \in H$ . En efecto: existe  $a_n \in H$  tal que  $a_n \rightarrow a$ , y entonces, por definición de límite, en todo entorno de  $a$  existen elementos de la sucesión  $a_n$ . Como  $a_n \in H$ , deducimos que todo entorno de  $a$  tiene algún punto de  $H$ . Entonces  $a$  no es exterior a  $H$ , y debe estar en la frontera o en el interior de  $H$ . Si  $a$  está en el interior de  $H$ , pertenece a  $H$ . Y si  $a$  está en la frontera de  $H$  también pertenece a  $H$  porque  $H$  es cerrado. Concluimos entonces que  $a \in H$  como queríamos probar.

Ahora demostremos el recíproco. Tomemos como hipótesis que  $H$  contiene a todos sus puntos límite. Demostremos que  $H$  es cerrado, o lo que es lo mismo probemos que  $H^c$  es abierto.

Por definición de abierto, tenemos que probar que todo punto de  $H^c$  es interior a  $H^c$ . Tomemos  $b \in H^c$ . Hay que probar que existe un entorno  $B_r(b)$  contenido de  $H^c$ . Por absurdo supongamos que no existe tal entorno. Entonces:

Para todo  $r > 0$  el entorno  $B_r(b)$  no está contenido en  $H^c$ , o lo que es lo mismo,  $B_r(b)$  intersecta a  $H$ . Concluimos que:

(\*) Para todo  $r > 0$  existe algún punto  $c \in H$  tal que  $\text{dist}(c, b) < r$ .

Apliquemos la afirmación (\*) tomando  $r = 1/n$  con  $n$  natural cualquiera, y llamemos  $a_n$  al punto  $c$  que se obtiene para ese  $r$  en particular. Tenemos:

(\*\*)  $a_n \in H$  para todo  $n$  natural y además  $\text{dist}(a_n, b) < 1/n$  para todo  $n$  natural.

Dado  $\epsilon > 0$  arbitrario, sea  $\hat{n}$  un número natural mayor que  $1/\epsilon$ . Se cumple entonces, para todo  $n > \hat{n}$  que:

$\text{dist}(a_n, b) < 1/n < 1/(\hat{n}) < 1/(1/\epsilon) = \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Como lo anterior vale para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrario, hemos probado lo siguiente:

(\*\*\*) Para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrario, existe un natural  $\hat{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, b) < \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ .

La afirmación (\*\*\*) es por definición de límite  $a_n \rightarrow b$ . Como  $a_n \in H$  para todo natural positivo  $n$ , entonces por definición 4.1 el punto  $b$  es punto límite de  $H$ .

Pero por construcción  $b \in H^c$ , luego  $b \notin H$ . Entonces  $H$  no contiene a todos sus puntos límite, contradiciendo la hipótesis. Absurdo.  $\square$ .  $\diamond$

$\diamond$  **Definición 4.5** PUNTO DE ACUMULACIÓN DE UN CONJUNTO  $H$ .

Un *punto de acumulación* del conjunto  $H \subset A$  es un punto  $a \in A$  (que puede pertenecer o no a  $H$ ) para el cual:

*Existe una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  tal que :*

$$a_n \in H, \quad a_n \neq a \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^+, \quad \lim a_n = a \quad \diamond$$

$\diamond$  **Observación:** De las definiciones 4.1 y 4.5 se deduce que todo punto de acumulación de  $H$  es punto límite de  $H$ . Sin embargo no todo punto límite es de acumulación.  $\diamond$

En efecto obsérvese el siguiente ejemplo:

$\diamond$  **Ejemplo 4.6** Sea en  $\mathbb{R}$  el subconjunto  $H = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 3 \text{ ó } x = 5\}$

El punto 5 pertenece a  $H$ , y por lo tanto es punto límite de  $H$ , pero no es punto de acumulación porque la única sucesión  $a_n$  de puntos de  $H$  que tiende a 5 es la finalmente constante igual a 5.  $\diamond$

$\diamond$  Cada una de las condiciones de las partes (a) y (b) del siguiente ejercicio puede tomarse también como definición de *punto de acumulación* de un conjunto  $H$ , ya que ambas son equivalentes a la definición 4.5:

$\diamond$  **Ejercicio 4.7** (a) Demostrar que un punto  $a$  en un espacio métrico  $A$  es punto de acumulación del conjunto  $H \subset A$ , si y solo si en *todo* entorno de  $a$  existe algún punto  $h \in H$  tal que  $h \neq a$ .

(b) Demostrar que un punto  $a$  en un espacio métrico  $A$  es punto de acumulación del conjunto  $H \subset A$ , si y solo si en *todo* entorno de  $a$  existe una cantidad infinita de puntos de  $H$ .  $\diamond$

$\diamond$  **Teorema 4.8** CARACTERIZACIÓN DE CERRADOS POR PUNTOS DE ACUMULACIÓN.

*Un conjunto  $H$  de un espacio métrico  $A$  es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación.*  $\diamond$

$\diamond$  *Demostración:* Si  $H$  es cerrado contiene a todos sus puntos límite, debido al teorema 4.4). Como todos los puntos de acumulación son puntos límite, entonces  $H$  contiene a todos sus puntos de acumulación.

Recíprocamente, si tomamos ahora como hipótesis que  $H$  contiene a todos sus puntos de acumulación, entonces, probemos como tesis que  $H$  es cerrado, o, lo que es lo mismo, que  $H^c$  es abierto.

Tomemos un punto  $b \in H^c$  cualquiera. Basta probar que  $b$  es interior a  $H^c$ . Por absurdo, supongamos que  $b$  no es interior a  $H^c$ . Podemos reproducir entonces la misma construcción de la sucesión  $a_n \in H$ ,  $a_n \rightarrow b$  expuesta en la segunda parte de la prueba del teorema 4.4.

Se observa que  $a_n \neq b$  porque  $a_n \in H$  y  $b \in H^c$ . Por lo tanto  $b$  es punto de acumulación de  $H$ . Pero  $b \in H^c$ . Luego  $H$  no contendría a todos sus puntos de acumulación, contradiciendo la hipótesis.  $\square$   $\diamond$

◇ **Ejercicio 4.9** (a) Probar que  $a$  es un punto de acumulación del conjunto  $H$  si y solo si en todo entorno de  $a$  existe algún punto de  $H$  diferente de  $a$ . (Sugerencia: construir sucesiones  $a_n$  como en la segunda parte de la demostración del teorema 4.4.)

(b) Probar que un punto de acumulación de  $H$  que no pertenezca a  $H$  es un punto de la frontera de  $H$ .

(c) Probar que todos los puntos de la frontera de  $H$  que no pertenecen a  $H$  son puntos de acumulación de  $H$ .

(d) Probar que un punto que pertenece a  $H$  y que no sea punto de acumulación de  $H$  es aislado en  $H$ . (Un punto  $a$  es aislado en  $H$  por definición, si  $a \in H$  y existe un entorno de  $a$  tal que todos sus puntos, excepto  $a$  pertenecen al complemento de  $H$ ).

(e) Deducir que todo punto límite de  $H$  o bien es punto de acumulación de  $H$  o bien es punto aislado en  $H$ .

(f) Deducir que la adherencia o clausura de un conjunto  $H$  es el conjunto de sus puntos límite y es la unión del conjunto de los puntos de acumulación de  $H$  con el conjunto de los puntos aislados en  $H$ . ◇

## 5 Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos

Sea  $(A, \text{dist})$  un espacio métrico cualquiera. Sea dada una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  de puntos de  $A$ .

### ✓ Definición 5.1 SUCESIONES DE CAUCHY <sup>4</sup>

La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  se dice que es una *sucesión de Cauchy* si para todo  $\epsilon > 0$  real arbitrario dado, existe  $\hat{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, a_m) < \epsilon$  para toda pareja de puntos  $a_n$  y  $a_m$  de la cola  $\hat{n}$ -ésima de la sucesión (es decir para todos  $m$  y  $n$  mayores que  $\hat{n}$ ). ✓

✓ **Interpretación:** Una sucesión es de Cauchy cuando dado cualquier margen de error  $\epsilon > 0$  todos los elementos de alguna cola de la sucesión, se aproximan ENTRE ELLOS con ese margen de error, aunque quizás pueda no existir ningún elemento constante  $a \in A$  al cual esa cola se aproxime. ✓

✓ **Ejemplo 5.2** En el conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$  la sucesión  $a_n = 2 + 1/n$  es no convergente, o no tiene límite  $a \in A$  (ver ejemplo 2.2). Pero aún siendo no convergente en  $A$  es una sucesión de Cauchy. En efecto, dado  $\epsilon > 0$  cualquiera, elijamos  $\hat{n}$  el menor natural mayor que  $\epsilon/2$  y tomemos  $m$  y  $n$  naturales mayores que  $\hat{n}$ . Entonces se cumple lo siguiente:

$$|a_n - a_m| = |1/n - 1/m| = |1/n + (-1/m)| \leq |1/n| + |-1/m| = 1/n + 1/m < 1/\hat{n} + 1/\hat{n} < 2(\epsilon/2) = \epsilon \quad \checkmark$$

### ✓ Teorema 5.3 -

*Si una sucesión es convergente en el espacio métrico  $A$  entonces es de Cauchy.* ✓

✓ **Nota importante:** El recíproco del teorema anterior es falso, es decir si una sucesión es de Cauchy en un espacio métrico cualquiera  $A$  entonces puede ser o no ser convergente en  $A$ . Un ejemplo de una sucesión de Cauchy en un espacio métrico  $B$  que sea convergente es  $b_n = 2 + 1/n$  en  $B = \{x \in B : x > 0\}$ . Tiene límite  $2 \in B$  es decir es convergente en  $B$  y por el teorema 5.3 es

---

<sup>4</sup>El apellido del matemático francés Cauchy se pronuncia, “coyf”

una sucesión de Cauchy. Un ejemplo de una sucesión de Cauchy es un espacio métrico  $A$  que no sea convergente es la del ejemplo 5.2. ✓

✓ *Demostración del teorema 5.3*

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  una sucesión por hipótesis convergente a un punto  $a \in A$ , es decir  $\lim a_n = a$ . Por la definición 2.1 dado  $\epsilon > 0$  existe  $\hat{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, \hat{n}) < \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Tomemos ahora dos términos  $a_m$  y  $a_n$  de la cola  $\hat{n}$ -ésima de la sucesión y comparémoslos entre sí:

$$\text{dist}(a_n, a_m) \leq \text{dist}(a_n, a_{\hat{n}}) + \text{dist}(a_m, a_{\hat{n}}) < 2\epsilon = \epsilon^*$$

donde hemos llamado  $\epsilon^* = 2\epsilon$ .

El número  $\epsilon^*$  es positivo, real cualquiera, pues es el doble de un número  $\epsilon$  real positivo cualquiera.

Hemos probado que dado  $\epsilon^* > 0$  real arbitrario cualquiera existe  $\hat{n}$  tal que dos términos cualesquiera de la cola  $\hat{n}$ -ésima de la sucesión distan entre sí menos que  $\epsilon^*$ , es decir, se cumple la condición pedida en la definición 5.1 para que  $a_n$  sea una sucesión de Cauchy, como queríamos demostrar. □ ✓

✓ **Definición 5.4** ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS.

Un espacio métrico  $A$  se dice *completo* si toda sucesión de elementos de  $A$  que sea de Cauchy es convergente en  $A$ , es decir, tiene un límite  $a \in A$ . ✓

✓ Dicho de otra forma: un espacio métrico es completo si en él vale el recíproco del teorema 5.3. *Por lo tanto en los espacios métricos completos una sucesión es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy.* ✓

✓ **Ejemplo 5.5** En el ejemplo 5.2 se mostró, en definitiva, que el espacio métrico  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$  NO es completo, pues en él hay alguna sucesión de Cauchy que no es convergente. ✓

✓ **Teorema 5.6** TEOREMA DE COMPLETITUD DE LOS REALES. *El espacio métrico  $\mathbb{R}$  de los números reales o de los puntos de la recta, con la distancia usual, es completo.* ✓

La demostración de este teorema se verá en la sección 10.

✓ Ahora pasemos a demostrar el teorema 3.16 sobre las sucesiones de Cauchy que tienen subsucesiones convergentes. Su enunciado es:

✓ **TEOREMA 3.16** SUCESIONES DE CAUCHY CON SUBSUCESIONES CONVERGENTES *En un espacio métrico  $A$  cualquiera, sea completo o no, es convergente toda sucesión de Cauchy que tenga alguna subsucesión convergente.* ✓

✓ **Demostración del Teorema 3.15:**

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  una sucesión en un espacio métrico cualquiera  $A$ , que por hipótesis es de Cauchy y posee una subsucesión convergente, es decir, existe:

$$\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}^+} \text{ con } b_j = a_{n_j}; n_j < n_{j+1} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}^+ \quad \text{y} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} b_j = a \in A.$$

Por hipótesis  $\{a_n\}$  es una sucesión de Cauchy. Por la definición 5.1, se cumple:

(I) Para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $\tilde{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, a_m) < \epsilon$  para todos  $m$  y  $n$  mayores que  $\tilde{n}$ .

Por otra parte, por definición 2.1 de límite, sabiendo por hipótesis que  $b_j \rightarrow a$ , tenemos que:

(II) Para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $\hat{j}$  tal que  $\text{dist}(b_j, a) < \epsilon$  para todo  $j > \hat{j}$ .

Elijamos un valor fijo  $j_0$  de  $j$  que sea mayor que  $\hat{j}$  y que  $\tilde{n}$  al mismo tiempo, por ejemplo  $j_0 = 1 + \max\{\hat{j}, \tilde{n}\}$ . Como la última parte de la afirmación (II) vale para todo  $j > \hat{j}$ , en particular vale para el valor fijo  $j = j_0$ . Llamemos  $m_0$  al número natural  $n_{j_0}$ . Sustituyendo en (II)  $j = j_0$  y  $b_{j_0} = a_{n_{j_0}} = a_{m_0}$  resulta:

(II) Para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $n_0$  tal que  $\text{dist}(a_{m_0}, a) < \epsilon$ .

Por construcción tenemos que  $m_0 = n_{j_0} \geq j_0 > \tilde{n}$  (La desigualdad  $n_{j_0} \geq j_0$  se cumple por la observación 3.11). Luego, hemos contruido un natural  $m_0$  fijo mayor que  $\tilde{n}$ , que puede usarse como caso particular de (I) sustituyendo  $m$  por  $m_0$ . Resulta:

(III) Para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $\tilde{n}$  y existe un natural  $m_0 > \tilde{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, a_{m_0}) < \epsilon$  para todo  $n > \tilde{n}$ .

Reuniendo (II) y (III) y usando la propiedad triangular siguiente:

$$\text{dist}(a_n, a) \leq \text{dist}(a_n, a_{m_0}) + \text{dist}(a_{m_0}, a) < \epsilon + \epsilon \quad \text{para todo } n > \tilde{n}$$

se obtiene que:

(IV) Para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $\tilde{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, a) < 2\epsilon$  para todo  $n > \tilde{n}$ .

Luego, llamando  $\epsilon^*$  al doble de  $\epsilon$ , se observa que  $\epsilon^* > 0$  es arbitrario real cualquiera positivo, porque  $\epsilon > 0$  lo es. Luego concluimos que (IV) se puede escribir también así:

(V) Para todo  $\epsilon^* > 0$  existe un natural  $\tilde{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, a) < \epsilon^*$  para todo  $n > \tilde{n}$ .

La afirmación (V) es por la definición 2.1 de límite o convergencia, lo mismo que  $a_n \rightarrow a$  como queríamos demostrar.  $\square \quad \checkmark$

## Parte [II-B] SUCESIONES DE REALES.

$\checkmark$  Se recuerda la definición 1.14: Una *sucesión de reales*, o *sucesión en  $\mathbb{R}$* , o *sucesión con codominio  $\mathbb{R}$* , es una sucesión  $a_{\cdot} : \mathbb{N}^+ \mapsto A$ , en la que el conjunto codominio  $A$ , dado de antemano, es el espacio métrico  $\mathbb{R}$  de TODOS los números reales con la distancia usual  $\text{dist}(a, b) = |b - a|$  para todos  $a$  y  $b$  reales.

Se recuerda que No llamaremos sucesión de reales a una sucesión, que aunque tenga recorrido contenido en  $\mathbb{R}$ , tenga un conjunto codominio  $A$ , dado de antemano, diferente del conjunto  $\mathbb{R}$  de todos los reales. Este tipo de sucesiones se dicen que son *sucesiones en  $A$* , o *sucesiones con codominio  $A$* , o *sucesiones de reales en  $A$* .

La recta real  $\mathbb{R}$  con la distancia usual, tiene a diferencia de otros espacios métricos, una relación de orden entre sus elementos. Esto permite en particular, definir para las sucesiones de reales, dos conceptos: el de *sucesión acotada* y el de *sucesión monótona*, y relacionar estos conceptos con la convergencia de sucesiones y subsucesiones, y con la topología de los conjuntos de la recta.

En lo que sigue consideraremos solo sucesiones de reales.  $\checkmark$

## 6 Sucesiones acotadas y no acotadas de reales.

✓ Sea una sucesión de reales  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  cualquiera. Consideremos el conjunto  $H \subset \mathbb{R}$  formado por todos los números reales que son términos de la sucesión dada. Este conjunto  $H$  se llama *recorrido* de la sucesión y se denota como  $H = \{x \in \mathbb{R} : x = a_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+\}$ .<sup>5</sup> ✓

### ✓ Definición 6.1 SUCESIONES ACOTADAS

✓ La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  de números reales se dice *acotada superiormente* si el conjunto  $H = \{x \in \mathbb{R} : x = a_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+\}$  es acotado superiormente; es decir existe algún número real  $k$ , llamado cota superior, tal que  $a_n \leq k$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ .

✓ La sucesión de reales se dice *acotada inferiormente* si el conjunto  $H$  es acotado inferiormente; es decir existe algún número real  $k$ , llamado cota inferior, tal que  $a_n \geq k$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ .

✓ Una sucesión de reales se dice *acotada* si es a la vez acotada superiormente e inferiormente.

### ✓ Definición 6.2 SUPREMO, INFIMO, MAXIMO y MINIMO de una SUCESSION ACOTADA.

✓ Por el axioma del supremo, dada una sucesión de reales acotada superiormente, existe una y una sola cota superior que es *la menor de todas las cotas superiores, llamada supremo o extremo superior* de la sucesión, denotada como  $\sup\{a_n\}$  o  $\sup\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ .

El supremo de una sucesión acotada es un número real que puede pertenecer o no al conjunto de términos de la sucesión. ✓

✓ Si el supremo pertenece al conjunto de términos de la sucesión se llama *máximo* de la sucesión. Si no pertenece es simplemente el supremo de la sucesión y en ese caso se dice que *no existe máximo*. ✓

✓ Por el teorema del ínfimo (que se demuestra a partir del axioma del supremo), dada una sucesión de reales acotada inferiormente, existe una y solo una cota inferior que es *la mayor de todas las cotas inferiores, llamada ínfimo o extremo inferior de la sucesión*, denotada como  $\inf\{a_n\}$  o  $\inf\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ .

El ínfimo de una sucesión acotada es un número real que puede pertenecer o no al conjunto de términos de la sucesión. ✓

✓ Si el ínfimo pertenece al conjunto de términos de la sucesión se llama *mínimo* de la sucesión. Si no pertenece, es simplemente el ínfimo de la sucesión y en ese caso se dice que *no existe mínimo*. ✓

### ✓ Teorema 6.3 ACOTACIÓN DE SUCESIONES CONVERGENTES

*Toda sucesión de reales que sea convergente es acotada.* ✓

✓ **Nota 6.4** El recíproco del teorema anterior es falso, como lo mostraremos con el contraejemplo 6.5. Esto significa que las sucesiones acotadas no son necesariamente convergentes.

Por lo tanto las sucesiones acotadas se clasifican en dos: las acotadas convergentes, y las acotadas no convergentes.

---

<sup>5</sup>Se observa que el conjunto  $H$  no es lo mismo que la sucesión dada. En el conjunto  $H$  cada número real que pertenece a  $H$ , se considera una sola vez, y no importa el orden en que se den los elementos de  $H$ .

Así por ejemplo una sucesión constante  $a_n = c \forall n \in \mathbb{N}^+$  determina un conjunto  $H = \{c\}$  que tiene un único elemento  $c$ . En cambio la sucesión  $a_n = c$  tiene infinitas posiciones, numeradas y ordenadas con el número natural  $n$ , y en cada una de ellas está el término  $a_n$  que en este caso es la constante  $c$ .

Como hemos enunciado en el teorema 3.15, las sucesiones acotadas de reales, aunque no sean convergentes, poseen siempre subsucesiones convergentes. ✓

✓  **Demostración del Teorema 6.3:**

Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales que por hipótesis es convergente.

Por la definición de límite dada en 2.1, existe un número real  $a$  tal que para todo  $\epsilon > 0$  real arbitrario dado, existe algún natural  $\hat{n}$  tal que  $a_n \in B_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Lo anterior implica que:

(I) Todos los términos de la  $\hat{n}$ -ésima cola de la sucesión están acotados inferiormente por el número real constante  $a - \epsilon$  y acotados superiormente por el número real constante  $a + \epsilon$ .

Por otra parte:

(II) Todos los términos de la sucesión que no pertenecen a la  $\hat{n}$ -ésima cola están acotados inferiormente por el número real  $\min\{a_1, \dots, a_{\hat{n}}\}$  (ese mínimo existe porque el conjunto considerado tiene una cantidad finita de elementos).

Análogamente:

(III) Todos los términos de la sucesión que no pertenecen a la  $\hat{n}$ -ésima cola están acotados superiormente por el número real  $\max\{a_1, \dots, a_{\hat{n}}\}$ .

Reuniendo las afirmaciones (I), (II) y (III) se deduce que toda la sucesión está acotada superiormente y acotada inferiormente, como queríamos demostrar. □ ✓

✓ **Ejemplo 6.5** El siguiente ejemplo exhibe una sucesión acotada que no es convergente, y sirve como *contraejemplo* para el recíproco del teorema 6.3 (es decir es un ejemplo que prueba que el recíproco de ese teorema es falso).

Sea la sucesión de reales  $a_n = \sqrt{5}$  si  $n$  es natural par, y  $a_n = -4 + 1/n$  si  $n$  es natural impar. Esta sucesión es acotada porque el conjunto  $H = \{x \in \mathbb{R} : x = a_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+\} = \{-4, \sqrt{5}\}$  formado por los distintos términos de la sucesión es un conjunto finito.

Esta sucesión tiene, como toda sucesión acotada (ver teorema 3.15), subsucesiones convergentes. En este ejemplo una subsucesión es la sucesión constante igual a 5 que es convergente a 5. Otra subsucesión es la sucesión  $b_j = -4 + 1/2j - 1$ ,  $j \in \mathbb{N}^+$  que converge a  $-4$ . Luego tiene dos subsucesiones convergentes a límites diferentes, y por el teorema 3.10 la sucesión dada no puede ser convergente. ✓

Ahora, aunque sea redundante, demostraremos directamente aplicando la definición 2.1 de límite, que la sucesión de este ejemplo no es convergente:

✓ **Nota 6.6** EJEMPLO DE DEMOSTRACIÓN DIRECTA DE NO EXISTENCIA DE LÍMITE O DE NO CONVERGENCIA.

El objetivo será probar, usando directamente la definición 2.1 de límite o convergencia, que la sucesión del ejemplo 6.5 no es convergente.

En lo que sigue llamaremos  $A$  al conjunto  $\mathbb{R}$  de nuestro ejemplo, para poder enunciar resultados generales válidos no solo en este ejemplo sino en cualquier espacio métrico  $A$ .

Por la definición de límite dada en 2.1 lo que queremos probar es que:

*No para todo  $\epsilon > 0$  se cumple que alguna cola de la sucesión se aproxima toda a un mismo punto  $a \in A$  con margen de error  $\epsilon$ .*

Lo anterior es equivalente a:

(I) Para todo  $a \in A$  y para *algún*  $\epsilon > 0$  no existe ninguna cola de la sucesión tal que todos sus términos  $a_n$  cumplan  $\text{dist}(a_n, a) < \epsilon$ . ✓

✓ A su vez la afirmación (I) es equivalente a la afirmación (II) de la siguiente definición:

✓ **Definición 6.7** DEFINICION DE NO CONVERGENCIA

Una sucesión  $\{a_n\}$  en un espacio métrico cualquiera  $A$  es *no convergente* o *no converge*, o *no tiene límite en A*, si y solo si:

(II) Cualquiera sea el punto  $a \in A$ , *existe algún* real  $\epsilon > 0$  tal que *para todo* natural  $\hat{n}$ , la cola  $\hat{n}$ -ésima de la sucesión dada contiene *algún* término  $a_n$ , (es decir *existe algún* natural  $n > \hat{n}$ ) tal que  $\text{dist}(a_n, a) \geq \epsilon$ . ✓

✓ **Observación:** La condición (II) (y también la (I) ) es la negación de la definición 2.1 de convergencia, por lo tanto esta definición no solo no contradice, sino que no agrega información a aquella definición. ✓

✓ **Ejemplo 6.8** Ahora pasemos a la sucesión del ejemplo 6.5, y probemos que cumple la condición (I) o sea que la sucesión de reales dada en ese ejemplo es no convergente o no tiene límite en  $\mathbb{R}$ .

✓ *Demostración:* Sea  $\epsilon = 1$ .

Toda  $\hat{n}$ -ésima cola contiene a los números  $\sqrt{5}$  y  $-4 + 1/n$  para todo  $n$  impar mayor que  $\hat{n}$ , que distan entre sí más que 3. Si distaran ellos dos de un mismo número real  $a$  menos que  $\epsilon = 1$ , por la propiedad triangular de la distancia, deberían distar entre sí menos que 2.

Luego hemos probado que para  $\epsilon = 1$  no existe ninguna cola de la sucesión que sea aproximadamente constante con margen de error  $\epsilon$ , como queríamos demostrar. □ ✓

✓ **Nota 6.9** SUCESIONES NO ACOTADAS

Una sucesión es no acotada si no cumple la definición de sucesión acotada dada en 6.1, es decir cuando **NO** se cumple que:

“Es acotada superiormente e inferiormente al mismo tiempo”. ✓

◇ Las sucesiones no acotadas son aquellas que no son acotadas superiormente o no son acotadas inferiormente. <sup>6</sup> ◇

✓ Por lo tanto las sucesiones NO acotadas de reales se clasifican en tres clases:

Sucesión de reales NI-NS: No es acotada Inferiormente ni Superiormente. Ejemplo:  $a_n = (-1)^n n$ .

<sup>6</sup>**Operadores Lógicos y Leyes de De Morgan:**

La conjunción “o” en lógica y matemática (que no es un “o exclusivo”), significa lo siguiente: la afirmación “ $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{B}$ ” es verdadera tanto si la afirmación  $\mathcal{A}$  es verdadera y la afirmación  $\mathcal{B}$  es falsa, como cuando  $\mathcal{B}$  es verdadera y  $\mathcal{A}$  es falsa, como cuando ambas afirmaciones  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son verdaderas simultáneamente.

La conjunción “y” en lógica y matemática (sustituida usualmente por una coma en la notación matemática) se usa en el siguiente sentido: la afirmación “ $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ ” es verdadera si y solo si ambas afirmaciones  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son verdaderas simultáneamente.

La negación “No” en lógica y matemática, *antepuesta* a una afirmación  $\mathcal{A}$  la niega. Es decir la afirmación “No  $\mathcal{A}$ ” es verdadera si y solo si  $\mathcal{A}$  es falsa, (y por lo tanto “No  $\mathcal{A}$ ” es falsa si y solo si  $\mathcal{A}$  es verdadera).

Dos afirmaciones  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  se dicen equivalentes cuando  $\mathcal{C}$  es verdadera si y solo si  $\mathcal{D}$  es verdadera (y por lo tanto  $\mathcal{C}$  es falsa si y solo si  $\mathcal{D}$  es falsa).

Se tienen las siguientes leyes lógicas de De Morgan:

(I) La afirmación “No ( $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ )” es equivalente a la afirmación “(No  $\mathcal{A}$ ) o (No  $\mathcal{B}$ )”.

(II) La afirmación “No ( $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{B}$ )” es equivalente a la afirmación “(No  $\mathcal{A}$ ) y (No  $\mathcal{B}$ )”.

Sucesión de reales no acotada I-NS :Es acotada Inferiormemente pero No Superiormente. Ejemplo:  
 $a_n = n$

Sucesión de reales no acotada NI-S: Es acotada Superiormente pero No Inferiormemente. Ejemplo:  
 $a_n = 100 - n$  ✓

✓ **Corolario 6.10** CONTRARRECÍPROCO DEL TEOREMA 6.3

*Si una sucesión de reales es no acotada entonces es no convergente.* ✓

✓ *Demostración:* Por absurdo si la sucesión fuera convergente entonces por el teorema 6.3 la sucesión sería acotada contradiciendo nuestra hipótesis. □ ✓

◇ La hipótesis de este corolario es la negación de la tesis del teorema 6.3 y la tesis del corolario es la negación de la hipótesis de teorema 6.3. Por lo tanto el corolario es el contrarrecíproco del teorema 6.3 cuyo enunciado fue demostrado como verdadero. En lógica clásica si una implicación es verdadera entonces su contrarrecíproca también lo es. <sup>7</sup> ◇

✓ Ahora pasemos a demostrar el teorema 3.15 anunciado en las secciones anteriores, que demuestra la existencia de subsucesiones convergentes para las sucesiones acotadas de reales, ya sean estas convergentes o no.

✓ **TEOREMA 3.15** SUBSUCESIONES DE SUCESIONES ACOTADAS DE REALES.

*Toda sucesión acotada de reales tiene alguna subsucesión convergente.* ✓

✓ **Demostración del Teorema 3.15:**

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  una sucesión de reales que está acotada superiormente por una cota superior  $B$  e inferiormente por una cota inferior  $A$ .

**Primer caso:** Si el conjunto recorrido de la sucesión dada es finito, es decir si hay solo una cantidad finita de elementos en el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : x = a_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+\}$  entonces, alguno de esos números reales tiene que aparecer en infinitos lugares de la sucesión  $\{a_n\}$ . Es decir la sucesión dada tiene una subsucesión constante, y por lo tanto tiene una subsucesión convergente como queríamos probar. (Se recuerda que toda sucesión constante es convergente y su límite es el valor de esa constante.)

---

<sup>7</sup>El siguiente Metateorema es el fundamento de la lógica clásica, cuya demostración está basada en que toda afirmación es o bien verdadera o bien falsa y ninguna afirmación puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo.

Es objeto de discusiones filosóficas y epistemológicas que la ponen en duda. Yo también (la autora de estas notas) comparto esa duda sobre el fundamento de la matemática y la lógica clásicas, pero desconozco cómo desarrollar una nueva teoría matemática, en particular referida al cálculo, que prescindiera de la bipolaridad verdadero-falso de la lógica clásica.

Hay corrientes relativamente nuevas que proponen el estudio científico usando una lógica no clásica, llamada “lógica difusa”<sup>9</sup> “Fuzzy Logic” que prescinde del siguiente Metateorema.

Sin embargo la Matemática clásica sigue asumiendo como válido el siguiente:

**Metateorema de la lógica clásica**

Hipótesis) *La afirmación  $\mathcal{A}$  implica la afirmación  $\mathcal{B}$ .*

Tesis) *La afirmación (No  $\mathcal{B}$ ) implica la afirmación (No  $\mathcal{A}$ ).*

Demostración?: Queremos probar que cuando la afirmación (No  $\mathcal{B}$ ) es verdadera entonces la afirmación (No  $\mathcal{A}$ ) también lo es. Supongamos por absurdo que (No  $\mathcal{B}$ ) es verdadera pero que (No  $\mathcal{A}$ ) es falsa. Esto significa que  $\mathcal{B}$  es falsa y que  $\mathcal{A}$  es verdadera. Luego, aplicando la hipótesis del metateorema la afirmación  $\mathcal{B}$  también es verdadera. Entonces tenemos que la afirmación  $\mathcal{B}$  es verdadera y falsa al mismo tiempo, y parece que por cierta limitación de comprensión de algunos cerebros humanos es absurdo que una afirmación sea al mismo tiempo verdadera y falsa. □

**Segundo caso:** Si el conjunto recorrido de la sucesión dada tiene una cantidad infinita de elementos diferentes, entonces en el intervalo  $[A, B]$  hay una cantidad infinita de puntos de la sucesión, todos distintos entre sí. Sea  $k = B - A > 0$  la longitud del intervalo  $[A, B]$  en la recta real. El real  $k$  es un número fijo positivo.

### Primer paso: Enunciado y demostración del Lema 6.11

✓ **Lema 6.11** *Dada una sucesión de reales  $\{a_n\}$ ; si un intervalo  $I$  de reales cualquiera contiene a una cantidad infinita de términos diferentes de la sucesión, entonces también contiene una cantidad infinita de términos diferentes de cualquier cola de la sucesión dada  $\{a_n\}$ .*

*Demotración del lema 6.11:* Si llamamos  $C_n$  a la cola  $n$ -ésima de la sucesión, como el intervalo  $I$  contiene una cantidad infinita de términos diferentes de la sucesión y fuera de  $C_n$  hay solo una cantidad finita de términos (los  $n$  primeros de la sucesión), entonces  $I$  contiene una cantidad infinita de términos que están en  $C_n$ . □

Ahora continuemos la prueba del teorema 3.15:

**Segundo paso: Construcción por inducción** de una “sucesión de intervalos encajados” en la recta real y de una **subsucesión** de  $\{a_n\}$ .

Llamaremos  $I_0$  al intervalo cerrado  $[A, B]$  con longitud  $k = B - A > 0$ . Todos los elementos de la sucesión  $\{a_n\}$  pertenecen a  $I_0$  y estamos en el caso en que dicha sucesión tiene una cantidad infinita de puntos diferentes.

Elijamos un punto cualquiera  $a_{n_0}$  de la sucesión, por ejemplo su primer término  $a_1$ , (en cuyo caso tenemos  $n_0 = 1$ ). En resumen:

(0) *El intervalo  $I_0$  tiene longitud  $k > 0$ , contiene infinitos puntos diferentes de la sucesión dada y  $a_{n_0} \in I_0$ .*

Consideremos el punto medio del intervalo  $I_0$ , y los dos subintervalos cerrados, ambos de longitud  $k/2$ , en que queda partido  $I_0$  por su punto medio. Como  $I_0$  contiene infinitos puntos diferentes de la sucesión dada, entonces por lo menos uno de esos dos subintervalos también.

Llamemos  $I_1$  al o a un subintervalo de esos dos, que contiene infinitos puntos de la sucesión, y llamemos  $a_{n_1}$  al primer término de la cola  $n_0$ -ésima que está en  $I_1$  (existe el primero porque existen infinitos de tales puntos debido al lema 6.11).

Tenemos  $n_1 > n_0$  y además  $I_1 \subset I_0$ .

En resumen, hasta ahora tenemos lo siguiente:

(1) *El intervalo cerrado  $I_1$  tiene longitud  $k/2$ , está contenido en  $I_0$ ; además  $I_1$  contiene infinitos puntos de la sucesión y  $a_{n_1} \in I_1$ .*

Así sucesivamente, partiendo al medio cada intervalo obtenido antes, se obtiene otro subintervalo cerrado que contiene una cantidad infinita de puntos de la sucesión. Elegiríamos en el paso  $j$  el intervalo cerrado  $I_j$  de longitud  $1/2^j$ , y el primer punto  $a_{n_j}$  de la cola  $n_{j-1}$ -ésima de la sucesión, tal que  $a_{n_j} \in I_j$ .

Para ser más precisos, demostremos por inducción, la siguiente afirmación:

**(H):** Para todo natural  $j$  existe un intervalo cerrado  $I_j$  y existe un número natural  $n_j$ , tales que:

(j) El intervalo cerrado  $I_j$  tiene longitud  $k/2^j$ , está contenido en  $I_{j-1}$ , contiene infinitos puntos de la sucesión dada,  $a_{n_j} \in I_j$  y  $n_j > n_{j-1}$ .

*Demostración por inducción completa de la afirmación (H):* La afirmación (H) es cierta para  $h = 1$ , pues por construcción teníamos la afirmación (1).

Ahora probemos que si la afirmación  $H$  fuera cierta para cierto natural  $j$  entonces también sería cierta  $H$  para el natural siguiente  $j + 1$ .

En efecto, por hipótesis si (H) fuera cierta para algún  $j \in \mathbb{N}^+$ , entonces, habría que construir el intervalo  $I_{j+1}$  y elegir el punto  $a_{n_{j+1}}$  de forma de poder probar que la afirmación (H) también es cierta para  $j + 1$ .

Para construir el intervalo  $I_{j+1}$  teniendo el intervalo  $I_j$  (que *ya sabemos* que cumple todas las condiciones del párrafo (j)), partimos  $I_j$ , tomando su punto medio, en dos subintervalos cerrados de longitud mitad de la longitud de  $I_j$ , o sea  $(1/2)(k/2^j) = k/2^{j+1}$ .

Como  $I_j$  cumple (j), entonces  $I_j$  tiene infinitos puntos de la sucesión, y se deduce que por lo menos uno de sus dos subintervalos contendrá infinitos puntos de la sucesión dada.

Llamemos  $I_{j+1}$  al o a un de esos dos subintervalos cerrados que contiene infinitos puntos de la sucesión dada. Llamemos  $a_{n_{j+1}}$  al primer término de la cola  $n_j$ -ésima de la sucesión dada, tal que  $a_{n_{j+1}} \in I_{j+1}$ . (Existe ese primer término  $a_{n_{j+1}}$  porque por el lema 6.11 existen infinitos términos diferentes de la cola  $n_j$ -ésima en el intervalo  $I_{j+1}$ ).

Como  $a_{n_{j+1}}$  pertenece a la cola  $n_j$ -ésima, entonces  $n_{j+1} > n_j$ .

Además  $I_{j+1} \subset I_j$  y  $a_{n_{j+1}} \in I_{j+1}$ , por construcción.

Terminamos de probar que si (H) fuera cierta para cierto natural  $j$  entonces también sería cierta para  $j + 1$ , con lo cual, aplicando el principio de inducción completa, deducimos que (H) es cierta para todo  $j \in \mathbb{N}^+$ .  $\square$

Resumimos las conclusiones de este segundo paso de la demostración del teorema 3.15, en las siguientes tres afirmaciones:

(I) Existe una sucesión de intervalos cerrados  $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}^+}$  “encajados”, es decir:  $I_j \subset I_{j-1}$  para todo  $j \in \mathbb{N}^+$ . La longitud del intervalo  $I_j$  es exactamente  $1/2^j$  para todo  $j \in \mathbb{N}^+$ . Todos los intervalos  $I_j$  están contenidos en un intervalo inicial  $I_0 = [A, B]$ , y por lo tanto cualquier conjunto de puntos de esos intervalos  $I_j$  está acotado superiormente por  $B$ .

(II) Existe una subsucesión  $b_j = a_{n_j}$ ,  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , de la sucesión dada  $\{a_n\}$ , tal que:

$$b_j \in I_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N}^+$$

**Tercer paso: Demostración de convergencia de la subsucesión  $b_j = a_{n_j}$  construida en el paso anterior.**

Llamemos  $m_j$  al extremo inferior (en lo que sigue izquierdo) del intervalo  $I_j$ . Por (I), la sucesión de números reales  $\{m_j\}$  está acotada superiormente por  $B$ . Usando el axioma del supremo, existe un número real que llamamos  $a$ , que es el supremo del conjunto de todos los  $\{m_j\}$ . Es decir:

$$a = \sup\{m_j\}$$

Dado  $\epsilon > 0$  cualquiera arbitrario, el número  $a - \epsilon/2$  es menor que  $a$ , y por lo tanto no puede ser cota superior de la sucesión  $\{m_j\}$ . Entonces existe algún natural que llamamos  $\tilde{j}$  tal que  $m_{\tilde{j}} > a - \epsilon/2$ . Pero por otra parte siendo  $a$  el supremo de todos los  $m_j$ , es mayor o igual que todos ellos, y en particular:  $a \geq m_{\tilde{j}}$ .

En resumen tenemos que

(III) Dado  $\epsilon > 0$  existe un natural  $\tilde{j}$  tal que el extremo izquierdo  $m_{\tilde{j}}$  del intervalo cerrado  $I_{\tilde{j}}$  cumple  $m_{\tilde{j}} \in (a - \epsilon/2, a]$

Por (I) todos los intervalos cerrados  $I_j$  con  $j > \tilde{j}$  están todos contenidos en  $I_{\tilde{j}}$ . Entonces sus extremos izquierdos  $m_j$  deben ser todos mayores o iguales que el extremo izquierdo  $m_{\tilde{j}}$  de  $I_{\tilde{j}}$ , y además son todos menores o iguales que  $a = \sup m_j$ .

Tenemos pues

$$m_{\tilde{j}} \leq m_j \leq a \text{ para todo } j > \tilde{j}$$

Esta última desigualdad, junto con (III), implica que

(IV) Para todo  $\epsilon > 0$  arbitrario existe un natural  $\tilde{j}$  tal que  $m_j \in (a - \epsilon/2, a]$  para todo  $j > \tilde{j}$ .

Ahora elijamos un natural  $\hat{j} > \tilde{j}$  y mayor también que el logaritmo en base 2 del número real  $1/(\epsilon/2)$ . Esto es  $2^{\hat{j}} > 1/(\epsilon/2)$ , o sea:

$$[1] \quad 1/2^{\hat{j}} < \epsilon/2$$

La afirmación (IV) (aplicada al caso particular  $j = \hat{j}$ ), implica que:

(V) Para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $\hat{j}$  tal que

$$[2] \quad \text{dist}(m_{\hat{j}}, a) < \epsilon/2$$

Por (I) la longitud del intervalo  $I_{\hat{j}}$  es exactamente  $1/2^{\hat{j}}$ , y por (II) todos los términos de la sucesión  $b_j$  para  $j > \hat{j}$  están en los respectivos intervalos  $I_j \subset I_{\hat{j}}$ . Deducimos que:

$$[3] \quad \text{dist}(b_j, m_{\hat{j}}) \leq 1/2^{\hat{j}} \text{ para todo } j > \hat{j}$$

Usemos la propiedad triangular

$$\text{dist}(b_j, a) \leq \text{dist}(b_j, m_{\hat{j}}) + \text{dist}(m_{\hat{j}}, a)$$

y sustituyamos en ella las tres desigualdades [1], [2], [3]. Obtenemos, al juntarlo con afirmación (V), lo siguiente:

(VI) Para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $\hat{j}$  tal que  $\text{dist}(b_j, a) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$  para todo  $j > \hat{j}$ .

Por la definición 2.1 lo anterior significa que  $b_j \rightarrow a$  como queríamos probar.  $\square \checkmark$

**✓ Corolario 6.12** CARACTERIZACION SECUENCIAL DE CONJUNTOS ACOTADOS.

Un conjunto  $H \subset \mathbb{R}$  es acotado si y solo si toda sucesión  $\{a_n\}$  de reales tales que  $a_n \in H$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  tiene alguna subsucesión convergente en  $\mathbb{R}$ .  $\checkmark$

(Nota: El límite de la subsucesión puede no pertenecer a  $H$ ).

✓ *Demostración:* Primero tomemos como hipótesis que  $H$  es acotado, y probemos como tesis que toda sucesión de reales con sus elementos en  $H$  tiene alguna subsucesión convergente en  $\mathbb{R}$ . En efecto: toda subsucesión de reales con sus elementos en  $H$  es acotada, porque  $H$  lo es. Luego, aplicando el teorema 3.15 tiene alguna subsucesión convergente en  $\mathbb{R}$ . ✓

✓ Ahora demostremos el recíproco: Tomemos como hipótesis que toda subsucesión de elementos de  $H$  tiene alguna subsucesión convergente en  $\mathbb{R}$ . Por un lado probemos por absurdo que  $H$  es acotado superiormente, y por otro lado probemos por absurdo también que  $H$  es acotado inferiormente.

Si  $H$  no fuera acotado superiormente, entonces dado cualquier natural  $n$ , ese natural no podría ser cota superior de  $H$ . Luego existe algún punto, que llamo  $a_n \in H$  tal que  $a_n > n$ . Eso es para todos y cada uno de los valores naturales  $n \in \mathbb{N}^+$  que elija. Luego tenemos una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  de reales cuyos términos cumplen:  $a_n \in H$  y  $a_n > n$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ . Esta última condición implica que la sucesión y ninguna de sus subsucesiones, puede ser acotada, porque no lo son acotadas superiormente. Luego, por el Corolario 6.10, la sucesión  $\{a_n\}$  no tiene ninguna subsucesión convergente en  $\mathbb{R}$ , pero tiene todos sus términos en  $H$ . Esto contradice nuestra hipótesis. □. ✓

◇ **Definición 6.13** SUCESSION DE INTERVALOS ENCAJADOS.

Sea  $A$  el conjunto (no espacio métrico) formado por todos los intervalos de la recta real  $\mathbb{R}$ .

Se llama *sucesión de intervalos encajados* a una sucesión  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  donde  $I_n \in A$  (es decir  $I_n$  es un intervalo de la recta), tal que:

- (i)  $I_n$  es un intervalo *cerrado* para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ .
- (ii)  $I_{n+1} \subset I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ , es decir: cada intervalo de la sucesión de intervalos, está contenido en el anterior.
- (iii) La longitud  $l_n$  del intervalo  $I_n$  (es decir la diferencia en valor absoluto entre los extremos de  $I_n$ ) forma una sucesión  $\{l_n\} : n \in \mathbb{N}^+$  de reales que es convergente a cero, o sea:  $l_n \rightarrow 0$ . ◇

◇ **Definición 6.14** Sea  $A$  el conjunto formado por todos los intervalos de la recta real. Una sucesión cualquiera  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  (o sea una sucesión cualquiera de intervalos de la recta real, sea o no sea sucesión de intervalos encajados) se dice que *define un único número real  $a$*  o simplemente que *define al real  $a$* , cuando

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} I_n = \{a\} \quad \diamond$$

◇ **Notación:** El símbolo notación  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} I_n$  debe entenderse como el conjunto siguiente, llamado *intersección de todos los  $I_n$*  :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} I_n = \{x \in \mathbb{R} : x \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+\} \quad \diamond$$

◇ **Teorema 6.15** TEOREMA DE LOS INTERVALOS ENCAJADOS.

Toda sucesión  $\{I_n\}$  de intervalos encajados en la recta real define un número real  $a$ .

Recíprocamente, para todo  $a$  número real cualquiera, existe una sucesión  $\{I_n\}$  de intervalos encajados en la recta real que define al real  $a$ . ◇

◇ **Ejercicio 6.16** Probar el teorema anterior.

Sugerencia: Para probar el directo usar ideas similares a las de la tercera parte de la demostración del teorema 3.15, tomando la sucesión de extremos izquierdos de los intervalos  $I_n$  y la sucesión de los extremos derechos de esos mismos intervalos, y demostrando que son ambas convergentes y convergen al mismo límite  $a \in \mathbb{R}$ . Después probar que  $a \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ , y finalmente probar que si un punto  $b \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  entonces  $b = a$ .

Para probar el recíproco, construir dado  $a \in \mathbb{R}$  la sucesión de intervalos encajados  $\{I_n\}$  donde  $I_n = [a - 1/n, a + 1/n]$ . ◇

## 7 Sucesiones de reales que van a $+\infty$ o a $-\infty$ .

✓ Ahora haremos otra clasificación de las sucesiones de reales no acotadas:

(i) Sucesiones de reales no acotadas que van a más infinito (según la definición 7.2 que está más adelante en esta sección). Ejemplo 7.4

(ii) Sucesiones de reales no acotadas que van a menos infinito (según la definición 7.6 que está más adelante en esta sección). Ejemplo 7.7

(iii) Sucesiones de reales no acotadas que no van a más infinito ni van a menos infinito. Ejemplo 7.14 ✓

◇ **Nota 7.1** Se hace notar que aunque se utilice (abusando del lenguaje y la notación) las palabras “ $a_n$  tiende a más infinito”, “ $a_n \rightarrow +\infty$ ” o incluso a veces la notación “ $\lim a_n = +\infty$ ”, para las sucesiones que van a más infinito, esas sucesiones, con codominio el conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales, NO son acotadas, y por lo tanto NO son convergentes, o sea (por la definición 2.1) NO tienden a algo, a ningún elemento del conjunto codominio  $\mathbb{R}$ , NO tienen límite.<sup>8</sup>

Cuando se utiliza la notación  $a_n \rightarrow +\infty$  o  $\lim a_n = +\infty$ , debemos ser conscientes que estamos nombrando, para abreviar, a la condición de la definición siguiente 7.2, y que si se cumple ella entonces NO se cumple la definición 2.1, no hay límite ni tiende a algo.<sup>9</sup> ◇

✓ **Definición 7.2** SUCESIONES QUE TIENDEN A  $+\infty$ .

Una sucesión  $a_n$  de números reales se dice que va o tiende a más infinito y se denota, abusando del lenguaje, como  $\lim a_n = +\infty$  o  $a_n \rightarrow +\infty$  cuando para toda constante real  $k > 0$  existe  $\hat{n}$  natural tal que la  $\hat{n}$ -cola de la sucesión tiene TODOS sus elementos mayores que  $k$ ; es decir  $a_n > k$  para todo  $n > \hat{n}$ . ✓

✓ **Interpretación:** La condición  $a_n > k$  para algunos términos  $a_n$  de la sucesión dada, significa que  $k$  no es cota superior de la sucesión  $\{a_n\}$ . Como la constante  $k$  es arbitraria, entonces la sucesión no tiene ninguna cota superior, ya que siempre hay alguna cola de la sucesión que supera a cualquier constante real arbitrariamente dada. Sin embargo debemos notar que los conceptos de tender a más infinito y no tener cota superior, no son equivalentes, como se muestra en el ejemplo 7.5. ✓

---

<sup>8</sup>Por la definición 2.1 las sucesiones con codominio  $\mathbb{R}$  que tienen límite, (sinónimos de tener límite es ser convergente o tender a algo) cumplen siempre que su límite  $a$  pertenece a  $\mathbb{R}$ .

<sup>9</sup>Se usa la notación de “límite” o “tender a...” aplicado a la sucesión que va a  $+\infty$ , cuando en realidad la sucesión no tiene límite, no tiende a ningún objeto matemático, como cuando uno llama Celeste a una señora que tiene nombre Celeste, aunque en realidad esa señora no sea para nada celeste.

◇ **Nota 7.3** Obsérvese que para que  $a_n$  no sea acotada superiormente alcanzaría con que dada  $k > 0$  constante arbitraria real se cumpliera  $a_n > k$  para algún  $n$  natural. Pero en la definición 7.2 se cumple esta condición mucho más fuerte que la no acotación superior:  $a_n > k$  para todo valor de  $n$  que sea mayor que cierto  $\hat{n}$ . ◇

La nota anterior da la pauta de que hay sucesiones no acotadas superiormente que no van a más infinito.

✓ **Ejemplo 7.4** SUCESION QUE TIENDE A MAS INFINITO.

La sucesión  $a_n = n^2$  va a más infinito. ✓

◇ *Demostración:* Dada una constante  $k > 0$  cualquiera, si elijo (por ejemplo)  $\hat{n}$  el primer número natural que sea mayor o igual que  $\sqrt{k}$ , entonces se tiene, para todo  $n > \hat{n}$  lo siguiente:

$$a_n = n^2 > (\hat{n})^2 \geq (\sqrt{k})^2 = k$$

o sea  $a_n > k$  para todo  $n \geq \hat{n}$ . Por la definición 7.2 la sucesión  $a_n$  va a más infinito como queríamos probar. □ ◇

El siguiente ejemplo muestra que ser no acotada superiormente y tender a más infinito son conceptos diferentes:

✓ **Ejemplo 7.5** SUCESION NO ACOTADA SUPERIORMENTE Y QUE NO TIENDE A MAS INFINITO.

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  la sucesión definida por  $a_n = n$  cuando  $n$  es un natural par positivo, y  $a_n = \sqrt{2}$  cuando  $n$  es un natural impar.

*Esta sucesión  $a_n$  es acotada inferiormente, no acotada superiormente y no va a más infinito.* ✓

◇ *Demostración:* Todos los términos de  $a_n$  son positivos. Entonces 0 es una cota inferior. La sucesión es acotada inferiormente.

La sucesión no es acotada superiormente porque dada cualquier constante  $h$  real candidata a ser cota superior de la sucesión, puedo elegir el primer natural  $n$  par positivo que sea mayor que  $h$ . Entonces se cumple, para ese natural  $n$  que  $a_n = n > h$ , y por lo tanto  $h$  no es cota superior de la sucesión.

La sucesión no va a más infinito, porque por ejemplo para la constante  $k = 5$  cualquier cola de la sucesión contiene elementos que son menores que  $k$  (Todos los elementos que ocupan lugar  $n$  impar en la sucesión son iguales a  $\sqrt{2} < k = 5$ ). Entonces, no es cierto que para toda constante  $k > 0$  existe alguna cola de la sucesión cuyos elementos sean *todos* mayores que  $k$ . Esto prueba que las condiciones de la definición 7.2 no se cumplen y por lo tanto  $a_n$  no va a más infinito. □ ◇

✓ **Definición 7.6** SUCESIONES QUE TIENDEN A  $-\infty$ .

Una sucesión  $a_n$  de números reales se dice que va o tiende a menos infinito y se denota, abusando del lenguaje, como  $\lim a_n = -\infty$  o  $a_n \rightarrow -\infty$  cuando para toda constante real  $k < 0$  existe  $\hat{n}$  natural tal que la  $\hat{n}$ -cola de la sucesión tiene TODOS sus elementos menores que  $k$  (es decir  $a_n < k$  para todo  $n > \hat{n}$ ). ✓

✓ **Interpretación:** La condición  $a_n < k$  para algunos términos  $a_n$  de la sucesión dada, significa que  $k$  no es cota inferior de la sucesión  $\{a_n\}$ . Como la constante  $k$  es arbitraria, entonces la sucesión no tiene ninguna cota inferior, ya que siempre hay alguna cola de la sucesión que está por abajo de cualquier constante real arbitrariamente dada. Sin embargo debemos notar que los conceptos de tender a menos infinito y no tener cota inferior, no son equivalentes. Hay sucesiones, como se verá en el ejemplo 7.7 que no tienen cota superior pero tampoco tienden a menos infinito. ✓

✓ **Ejemplo 7.7** SUCESION QUE TIENDE A MENOS INFINITO.

*La sucesión  $a_n = -n^3, n \in \mathbb{N}^+$  va a menos infinito.* ✓

◇ **Ejercicio 7.8** Probar la afirmación anterior. (Sugerencia: imitar la demostración del ejemplo 7.4 realizando en ella los cambios adecuados) ◇

El siguiente ejemplo muestra que ser no acotada inferiormente y tender a menos infinito son conceptos diferentes:

✓ **Ejemplo 7.9** SUCESION NO ACOTADA INFERIORMENTE Y QUE NO TIENDE A MENOS INFINITO.

Sea  $a_n$  la sucesión definida por  $a_n = -n^5$  cuando  $n \in \mathbb{N}^+$  es un natural par, y  $a_n = +\sqrt{37}$  cuando  $n$  es un natural impar.

*Esta sucesión  $a_n$  es acotada superiormente, no acotada inferiormente y no va a menos infinito.* ✓

◇ **Ejercicio 7.10** Probar la afirmación anterior. (Sugerencia: imitar la demostración del ejemplo 7.5 realizando en ella los cambios adecuados) ◇

◇ **Proposición 7.11** (a) Si una sucesión de reales tiende a más infinito entonces es acotada inferiormente pero no superiormente.

(b) Si una sucesión de reales tiende a más infinito entonces es no acotada y por lo tanto no convergente.

(c) El recíproco del enunciado (a) es falso.

*Es decir:*

(c') Existen sucesiones de reales que son acotadas inferiormente y no superiormente pero que no tienden a más infinito.

◇ *Demostración:*

Prueba de (b): Supongamos que ya demostramos el enunciado (a). Entonces se cumple que la sucesión es no acotada (porque no lo es superiormente, aunque lo sea inferiormente). Aplicando el teorema 6.3 la sucesión es no convergente. Por lo tanto, una vez que se demuestre el enunciado (a) sin usar (b), quedará demostrado también el enunciado (b).

Prueba de (a): Por la definición 7.2 la cola  $\hat{n}$ -ésima de la sucesión es acotada inferiormente por la constante  $k$ . Por otra parte los términos de la sucesión que no están en la cola  $\hat{n}$ -ésima, son una cantidad finita, y por lo tanto están acotados inferiormente por el mínimo de ellos.

Luego toda la sucesión tiene alguna cota inferior.<sup>10</sup> Hemos probado que la sucesión es acotada inferiormente.

---

<sup>10</sup>Si dos conjuntos son acotados inferiormente, la unión de ambos también, pues la menor entre ambas cotas inferiores de uno y otro conjunto es cota inferior de la unión.

Ahora hay que probar que la sucesión no es acotada superiormente. En efecto, por absurdo, supongamos que existe una cota superior  $h$  real de toda la sucesión. Entonces  $a_n \leq h \leq |h| < |h| + 1 = k_0$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ . (En lo anterior he llamado  $k_0$  a la constante real positiva  $|h| + 1$ ). Es decir:  $a_n < k_0$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  (\*)

Aplicando la definición 7.2 que es válida para cualquier  $k > 0$ , en particular para  $k = k_0$ , tenemos que  $a_n > k_0$  para algunos (en realidad muchos) valores naturales de  $n$ . Esto contradice la afirmación (\*) con lo cual hemos llegado a un absurdo, terminando la demostración del enunciado (a).

Prueba de (c') y (c):

La sucesión del ejemplo 7.5 cumple el enunciado (c') que es equivalente a (c).  $\square \diamond$

$\diamond$  **Proposición 7.12** (a) Si una sucesión de reales tiende a menos infinito entonces es acotada superiormente pero no inferiormente.

(b) Si una sucesión de reales tiende a menos infinito entonces es no acotada y por lo tanto no convergente.

(c) El recíproco del enunciado (a) es falso.

*Es decir:*

(c') Existen sucesiones de reales que son acotadas superiormente y no inferiormente pero que no tienden a menos infinito.

$\diamond$  **Ejercicio 7.13** Demostrar la proposición 7.12. (Sugerencia: imitar la prueba de la proposición 7.11 realizando en ella los cambios apropiados).  $\diamond$

✓ **Ejemplo 7.14** SUCESION NO ACOTADA QUE NO TIENDE A MAS INFINITO NI A MENOS INFINITO. La sucesión del ejemplo 7.5 es no acotada y no tiende a más infinito ni a menos infinito. ✓

$\diamond$  *Demostración:* Según lo que hemos probado en 7.5 y 7.12 la sucesión del ejemplo 7.5 no tiende a más infinito, tampoco tiende a menos infinito (porque no es acotada superiormente) y es no acotada (porque aunque es acotada inferiormente no lo es superiormente).  $\square \diamond$ .

$\diamond$  Otro ejemplo de sucesión no acotada que no tiende a más ni a menos infinito es la del párrafo 7.9. Esta sucesión es no acotada inferiormente pero es acotada superiormente.  $\diamond$

✓ El siguiente ejemplo:  $a_n = (-1)^n n$  exhibe una sucesión no acotada superiormente ni inferiormente, y que no tiende a más infinito ni a menos infinito. ✓

$\diamond$  **Definición 7.15** Una sucesión  $a_n$  de reales se dice que va o tiende a infinito, si la sucesión  $|a_n|$  de sus valores absolutos tiende a más infinito.  $\diamond$

$\diamond$  **Nota 7.16** Se deduce inmediatamente de la definición anterior y de las definiciones 7.2 y 7.6 lo siguiente:

Toda sucesión que tienda a más infinito, tiende a infinito.

Toda sucesión que tienda a menos infinito tiende a infinito.

Hay sucesiones que tienden a infinito y no tienden a más ni a menos infinito: por ejemplo  $a_n = (-1)^n n$ .

Por lo tanto tender a infinito NO es sinónimo de tender a más infinito o a menos infinito.  $\diamond$

◇ **Teorema 7.17** SUBSUCESIONES DE SUCESIONES QUE TIENDEN A INFINITO.

*Una sucesión de reales tiende a más infinito si y solo si todas sus subsucesiones tienden a más infinito.*

*Una sucesión de reales tiende a menos infinito si y solo si todas sus subsucesiones tienden a menos infinito.*

*Una sucesión de reales tiende a infinito si y solo si todas sus subsucesiones tienden a infinito.*  
◇

◇ **Ejercicio 7.18** Demostrar el teorema anterior.

◇ Del teorema anterior y de las proposiciones 7.11 y 7.12 se deduce inmediatamente el siguiente corolario, con el cual quedaría probado el teorema 3.17: Subsucesiones de sucesiones que tienden a infinito.

◇ **Corolario 7.19** TEOREMA 3.17: SUBSUCESIONES DE SUCESIONES QUE TIENDEN A INFINITO.

*Si una sucesión de reales tiende a infinito, más infinito o menos infinito, entonces no tiene subsucesiones convergentes.* ◇

✓ **Definición 7.20** LÍMITES  $0^+$  y  $0^-$ .

Decimos que una sucesión de reales  $a_n$  tiende a  $0^+$  cuando  $a_n \rightarrow 0$  y alguna cola de la sucesión  $a_n$  tiene todos sus términos positivos.

Decimos que una sucesión de reales  $a_n$  tiende a  $0^-$  cuando  $a_n \rightarrow 0$  y alguna cola de la sucesión  $a_n$  tiene todos sus términos negativos. ✓

✓ **Teorema 7.21** SUCESION DE INVERSOS

Sea  $a_n$  una sucesión de reales no nulos.

Se cumple lo siguiente:

- ✓ (i) Una sucesión  $a_n$  de reales no nulos tiende a más infinito si y solo si la sucesión  $b_n = 1/a_n$  tiende a  $0^+$ . ✓
- ✓ (ii) Una sucesión  $a_n$  de reales no nulos tiende a menos infinito si y solo si la sucesión  $b_n = 1/a_n$  tiende a  $0^-$ . ✓
- ◇ (iii) Una sucesión  $a_n$  de reales no nulos tiende a infinito si y solo si la sucesión  $b_n = 1/a_n$  tiende a cero. ◇
- ✓ (iv) Una sucesión  $a_n$  de reales no nulos tiende a un límite real  $a \neq 0$  si y solo si la sucesión  $b_n = 1/a_n$  tiende a  $1/a$ . ✓
- ◇ (v) Una sucesión  $a_n$  de reales no nulos tiende a  $a = 0$  (o también respectivamente  $0^+$  o  $0^-$ ) si y solo si la sucesión  $b_n = 1/a_n$  tiende a infinito (o respectivamente  $+\infty$  o  $-\infty$ ). ◇

◇ **Ejercicio 7.22** Demostrar el teorema anterior. ◇

## 8 Sucesiones monótonas de reales.

En esta sección  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  indica una sucesión de números reales, es decir una sucesión cuyo codominio es todo el conjunto  $\mathbb{R}$  de números reales.

✓ **Definición 8.1** SUCESIONES MONÓTONAS CRECIENTES Y DECRECIENTES.

La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  se dice *monótona creciente* o también *monótona creciente en sentido amplio* o también *creciente* si para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  cada término es menor o igual que el siguiente, es decir:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^+$$

La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  se dice *monótona decreciente* o también *monótona decreciente en sentido amplio* o también *decreciente* si para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  cada término es mayor o igual que el siguiente, es decir:

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^+$$

Una sucesión de reales se dice *monótona* si es creciente o decreciente. ✓

✓ **Nota 8.2** Las sucesiones constantes son a la vez crecientes y decrecientes.

Si una sucesión de reales es a la vez creciente y decreciente entonces es constante. ✓

✓ **Definición 8.3** SUCESIONES EstrictAMENTE MONÓTONAS.

La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  se dice *estrictamente monótona creciente* o también *estrictamente creciente* si para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  cada término es menor que el siguiente, es decir:

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^+$$

La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  se dice *estrictamente monótona decreciente* o también *estrictamente decreciente* si para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  cada término es mayor que el siguiente, es decir:

$$a_n > a_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^+ \quad \checkmark$$

✓ Una sucesión es *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. ✓

✓ **Nota 8.4** No existe ninguna sucesión de reales que sea a la vez estrictamente creciente y estrictamente decreciente. ✓

✓ Toda sucesión estrictamente monótona es también monótona (en sentido amplio). <sup>11</sup> ✓

✓ **Ejemplo 8.5** La sucesión  $a_n = 1/\sqrt{n}$  es decreciente, (o sea es monótona decreciente en sentido amplio), y es también estrictamente decreciente .

La sucesión  $b_n$  definida como  $b_n = 1/\sqrt{n}$  cuando  $n$  es natural impar, y  $b_n = b_{n-1} = 1/\sqrt{n-1}$  cuando  $n$  es natural par positivo, es también decreciente, o sea monótona decreciente en sentido amplio, pero no es estrictamente decreciente.

---

<sup>11</sup>Eso es porque cuando es verdadera una desigualdad estricta  $<$  también es verdadera la desigualdad amplia  $\leq$  (no importa si uno no sabe o sabe, por otras vías, que la igualdad nunca se verifica). Por ejemplo es verdadera la afirmación  $2 \leq 3$  aunque yo sepa que 2 no es igual a 3. También es verdadera la afirmación  $5 \leq 5$  aunque yo sepa que 5 no es nunca menor que 5.

✓ **Teorema 8.6 Parte (a) CONVERGENCIA DE SUCESIONES MONÓTONAS ACOTADAS**

Si una sucesión de reales es monótona y acotada entonces es convergente y su límite coincide con el supremo de la sucesión cuando esta es creciente, y coincide con el ínfimo cuando la sucesión es decreciente. ✓

✓ **TEOREMA 8.6 Parte (b) NO CONVERGENCIA DE SUCESIONES MONÓTONAS NO ACOTADAS:**

- (b1) Si una sucesión de reales es creciente y no acotada entonces tiende a más infinito.
- (b2) Si una sucesión de reales es decreciente y no acotada entonces tiende a menos infinito. ✓

✓ *Demostración:* **Prueba de la parte (a): Primer caso: la sucesión dada es monótona creciente.** Como por hipótesis la sucesión  $a_n$  es acotada, usando el axioma del supremo, existe el número real  $s = \sup\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ . Por definición de supremo  $s$  es la menor de las cotas superiores de la sucesión. Luego, dado  $\epsilon > 0$  real arbitrario, el número real  $s - \epsilon$  no puede ser cota superior de la sucesión.

De lo anterior se deduce que:

- (I) Existe algún  $\hat{n}$  natural tal que  $a_{\hat{n}} > s - \epsilon$ .

Por otra parte, siendo la sucesión creciente, se cumple que:

- (II)  $a_n \geq a_{\hat{n}}$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Por separado, siendo  $s$  una cota superior de la sucesión, se cumple que

- (III)  $a_n \leq s$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$

Reuniendo las afirmaciones (I), (II) y (III), se deduce que:

Existe  $\hat{n}$  natural tal que  $s - \epsilon < a_n \leq s$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Por lo tanto concluimos que para todo  $\epsilon > 0$  real dado arbitrario, existe  $\hat{n}$  natural tal que  $a_n \in B_\epsilon(s)$  para todo  $n > \hat{n}$ , o sea, por definición 2.1 tenemos que  $a_n \rightarrow s$  como queríamos demostrar. ✓

✓ **Prueba de la parte (a): Segundo caso: la sucesión dada es monótona decreciente.** Basta reproducir la prueba anterior usando el teorema del ínfimo en lugar del axioma del supremo,  $i = \inf\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  en lugar del supremo  $s$ , usando  $i + \epsilon$  en lugar de  $s - \epsilon$  y sustituyendo las desigualdades menor, menor o igual, por mayor y mayor o igual, respectivamente. ✓

✓ **Tarea:** Escribir los detalles de la demostración en este segundo caso. ✓

✓ **Prueba de la parte (b1).**  $a_n$  es monótona creciente por hipótesis, y entonces es acotada inferiormente, pudiendo tomarse como cota inferior al primer término de la sucesión.

Por hipótesis la sucesión no es acotada, y como recién vimos que es acotada inferiormente, se deduce que no es acotada superiormente.

Por lo tanto, dada  $k > 0$  real cualquiera,  $k$  no puede ser cota superior de la sucesión. Por lo tanto se tiene que

- (I) Existe algún  $\hat{n}$  natural tal que  $a_{\hat{n}} > k$ .

Por hipótesis la sucesión es creciente, entonces:

- (II)  $a_n \geq a_{\hat{n}}$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Reuniendo las afirmaciones (I) y (II) deducimos que:

Dado  $k > 0$  real arbitrario existe  $\hat{n}$  natural tal que  $a_n > k$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Por la definición 7.2 de sucesión que va a más infinito, la afirmación anterior significa que  $a_n \rightarrow +\infty$  como queríamos demostrar. ✓

✓ **Prueba de la parte (b2):** Puede repetirse la prueba de la parte (b) sustituyendo la palabra creciente por decreciente, acotada superiormente por acotada inferiormente y viceversa, y sustituyendo las desigualdades  $>$  y  $\geq$  por  $<$  y  $\leq$  respectivamente. □ ✓

✓ **Tarea:** Escribir los detalles de la demostración de la parte (b2). ✓

✓ **Proposición 8.7** La sucesión de reales

$$\{a_n = (1 + \frac{1}{n})^n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$$

tiene todos sus términos racionales, es monótona creciente estrictamente y acotada, luego es convergente. ✓

No incluiremos la demostración de esta proposición, para no distraer de los objetivos del curso, pero puede encontrarse en el libro de Courant y John, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Vol. I, sección 1.7 parágrafo e), páginas 100 a 103.

✓ **Definición 8.8** NÚMERO DE EULER  $e$  y LOGARTIMO NEPERIANO  $\log x$ .

Se llama *número de Euler* al número real  $e$  límite de la sucesión  $a_n = (1 + 1/n)^n$  que en virtud de la proposición anterior y del teorema 8.6 existe y coincide con el supremo de  $a_n$

Se llama *logaritmo neperiano*  $\log$  o también *logaritmo con base  $e$* , a la función real de variable real  $x$  con dominio el conjunto de los reales positivos estrictamente, y tal que para cada  $x > 0$  real le asocia el único real  $y = \log x$  que cumple  $e^y = x$ . (Habría que demostrar que existe y es único para cada  $x > 0$  un número real  $y$  que cumple  $e^y = x$ .) Dicho de otra forma  $y = \log x$  si y solo si  $e^y = x$ .

## 9 ◇ Límite superior e inferior de sucesiones acotadas de reales.

◇ **Proposición 9.1** SUCESION DE SUPREMOS DE UNA SUCESION ACOTADA DE REALES

Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  es cualquier sucesión acotada de reales, entonces existe una sucesión auxiliar de reales relacionada con ella, que denotamos  $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}^+}$  y llamamos *sucesión de supremos*, que cumple las siguientes condiciones:

- (i)  $s_m$  es monótona decreciente
- (ii)  $s_m$  es acotada
- (iii) Para cada  $m \in \mathbb{N}^+$  fijo el número real  $s_m$  es igual al supremo de la cola  $m$ -ésima de la sucesión dada  $\{a_n\}$ , lo cual se denota como  $s_m = \sup_{n > m} (a_n)$  o también como  $s_m = \sup\{a_n\}_{n > m}$ .

La condición (iii) se puede también escribir de la siguiente forma:

- (iii) Para todo  $m$  natural positivo fijo,  $s_m$  es la menor de las cotas superiores del conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : x = a_n \text{ para algún natural } n > m\}$ . ◇

◊ *Demostración de la proposición 9.1.*

Como la sucesión dada es acotada, cualquier subsucesión de ella también lo es, en particular cualquiera de sus colas.

Por el axioma del supremo, y como toda cola es acotada, existe para cada cola un número real que llamamos  $s_m$  que es el supremo de la cola  $m$ -ésima de la sucesión dada.

Por definición de supremo tenemos que:

(iii) Para cada  $m$  natural fijo positivo  $s_m$  es la menor de las cotas superiores del conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : x = a_n \text{ para algún natural } n > m\}$ .

Ahora probemos (ii), o sea que la sucesión  $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}^+}$  está acotada.

Como la sucesión dada  $\{a_n\}$  es acotada por hipótesis, existe algún número real  $k$  que es cota inferior de todos los  $a_n$ . En particular, para cualquier cola  $m$ -ésima, con  $m$  fijo, el *mismo* número real  $k$  es cota inferior de todos los  $a_n$  que cumplen  $n > m$ , y por lo tanto:

El mismo real  $k$  es menor o igual que el supremo  $s_m$  de la cola  $m$ -ésima, cualquiera haya sido el natural positivo  $m$  elegido fijo.

Es decir, el mismo número real  $k$  cumple  $k \leq s_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}^+$ . Por lo tanto:

La sucesión  $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}^+}$  está acotada inferiormente.

Para terminar de demostrar (ii) y para demostrar (i), resta probar que la sucesión de los números reales  $s_m$  está también acotada superiormente y que es decreciente. Si probáramos solo que  $\{s_m\}$  es decreciente, entonces toda la sucesión  $\{s_m\}$  estará acotada superiormente por el primero de sus términos  $s_1$  y habríamos terminado la demostración del lema.

Probemos pues que  $s_m \geq s_{m+1}$  para todo  $m \in \mathbb{N}^+$ ,

Fijemos  $m \in \mathbb{N}^+$ . Por construcción  $s_m$  es una de las tantas cotas superiores de todos los términos  $a_n$  de la cola  $m$ -ésima de la sucesión. Es decir:

(I)  $s_m \geq a_n$  para todo  $n > m$ .

En particular la afirmación (I) implica que  $s_m \geq a_n$  cuando  $n = m + 2, m + 3, \dots$ . Luego tenemos que

(II)  $s_m$  es también cota superior de la cola  $m + 1$ -ésima de la sucesión.

Por otra parte

(III)  $s_{m+1}$  es el supremo de la cola  $m + 1$ -ésima de la sucesión, es decir,  $s_{m+1}$  es la menor de las cotas superiores de la cola  $m + 1$ -ésima.

Juntando (II) y (III) se obtiene que

(IV)  $s_{m+1} \leq s_m$ .

Como  $m$  era un natural positivo fijo pero cualquiera, se tiene de (IV) que la sucesión  $s_m$  es decreciente como queríamos demostrar.  $\square$   $\diamond$

◊ Por la proposición anterior, la sucesión de supremos es una sucesión monótona decreciente y acotada. Aplicando a ella el teorema 8.6 se deduce que la sucesión de supremos es convergente, y que su límite es el ínfimo de los supremos. Más precisamente, existe un número real  $\bar{a}$  que se denota así:

$$\bar{a} = \lim_{m \rightarrow +\infty} s_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} [\sup_{n > m} (a_n)] = \inf_{m \in \mathbb{N}^+} [\sup_{n > m} (a_n)] \quad \diamond$$

◊ **Nota 9.2 NOTACIÓN**

Las igualdades anteriores deben leerse (y fueron escritas) de *derecha a izquierda*. Deben entenderse como se explica a continuación. Comenzando por la derecha, la notación:

$$s_m = \sup_{n>m} (a_n)$$

dice que  $s_m$  es el supremo de la cola  $m$ -ésima de la sucesión  $\{a_n\}$ , donde  $m$  natural *fijo*, y  $n$  es natural variable en el conjunto de todos los naturales mayores que  $m$ .

La notación

$$\bar{a} = \inf_{m \in \mathbb{N}^+} [\sup_{n>m} (a_n)]$$

dice que  $\bar{a}$  es el ínfimo de la sucesión de supremos de las colas  $m$ -ésimas de la sucesión  $\{a_n\}$ , donde  $m$  era fijo cuando se calculó cada uno de estos supremos  $s_m = \sup_{n>m} (a_n)$ , pero es  $m$  variable *después*, para formar la sucesión de supremos  $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}^+}$  y poder calcular su ínfimo  $\bar{a} = \inf_{m \in \mathbb{N}^+} s_m$ . La notación

$$\bar{a} = \lim_{m \rightarrow +\infty} [\sup_{n>m} (a_n)]$$

dice que  $\bar{a}$  es el límite de la sucesión de supremos  $s_m$  de las colas  $m$ -ésimas de la sucesión, con las mismas convenciones que antes, es decir  $m$  era fijo primero para calcular cada uno de los supremos  $s_m$ , y  $m$  es variable después  $m \in \mathbb{N}^+$ , para formar la sucesión de supremos  $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}^+}$  y poder calcular su límite  $\bar{a} = \lim_{m \rightarrow +\infty} s_m$ .  $\diamond$

$\diamond$  **Corolario 9.3** Para toda sucesión acotada de reales  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ , la sucesión asociada de supremos  $s_m = \sup\{a_n\}_{n>m}$  es convergente, es decir existe un real  $\bar{a}$  (que puede pertenecer o no a la sucesión dada, y puede pertenecer o no a la sucesión de supremos) tal que

$$\bar{a} = \lim_{m \rightarrow +\infty} s_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} [\sup_{n>m} (a_n)] = \inf_{m \in \mathbb{N}^+} [\sup_{n>m} (a_n)] \quad \diamond$$

$\diamond$  **Definición 9.4** LIMITE SUPERIOR DE UNA SUCESSION ACOTADA DE REALES. Dada una sucesión de reales  $\{a_n\}$  acotada (convergente o no), se llama *límite superior* de  $a_n$  y se denota  $\limsup a_n$  al número real

$$\limsup a_n = \bar{a} = \lim_{m \rightarrow +\infty} s_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} [\sup_{n>m} (a_n)] = \inf_{m \in \mathbb{N}^+} [\sup_{n>m} (a_n)] \quad \diamond$$

$\diamond$  **Ejercicio 9.5** Demostrar la siguiente proposición (se sugiere imitar la demostración de la proposición 9.1 invirtiendo las desigualdades y sustituyendo los supremos por los ínfimos):

Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  es cualquier sucesión acotada de reales, entonces existe una sucesión auxiliar de reales relacionada con ella, que denotamos  $\{r_m\}_{m \in \mathbb{N}^+}$  y llamamos *sucesión de ínfimos*, que cumple las siguientes condiciones:

- (i)  $r_m$  es monótona creciente
- (ii)  $r_m$  es acotada
- (iii) Para cada  $m \in \mathbb{N}^+$  fijo el número real  $r_m$  es igual al ínfimo de la cola  $m$ -ésima de la sucesión dada  $\{a_n\}$ , lo cual se denota como  $r_m = \inf_{n>m} (a_n)$  o también como  $r_m = \inf\{a_n\}_{n>m}$ .

La condición (iii) se puede también escribir de la siguiente forma:

- (iii) Para todo  $m$  natural positivo fijo,  $r_m$  es la mayor de las cotas inferiores del conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : x = a_n \text{ para algún natural } n > m\}$ .  $\diamond$

(iv) La sucesión de ínfimos  $\{r_m\}$  es convergente y su límite que llamamos  $\underline{a}$  es el supremo de la sucesión de ínfimos, es decir cumple:

$$\underline{a} = \lim_{m \rightarrow +\infty} r_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} [\inf_{n > m} (a_n)] = \sup_{m \in \mathbb{N}^+} [\inf_{n > m} (a_n)] \quad \diamond$$

◇ **Definición 9.6** LIMITE INFERIOR DE UNA SUCESSION ACOTADA DE REALES. Dada una sucesión de reales  $\{a_n\}$  acotada (convergente o no), se llama *límite inferior de  $a_n$*  y se denota  $\liminf a_n$  al número real

$$\liminf a_n = \underline{a} = \lim_{m \rightarrow +\infty} r_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} [\inf_{n > m} (a_n)] = \sup_{m \in \mathbb{N}^+} [\inf_{n > m} (a_n)] \quad \diamond$$

◇ **Ejemplo 9.7** La sucesión de reales  $a_n = (-1)^n + 3 + 1/n$  es acotada superiormente por 5 e inferiormente por 2. No es convergente porque la subsucesión de los  $n$  pares converge a 4 y la subsucesión de los  $n$  impares converge a 2. Aplicando el teorema 3.10 la sucesión dada no puede ser convergente.

Para cada  $m$  fijo el supremo  $s_m$  de la cola  $m$ -ésima de la sucesión es  $s_m = \sup_{n > m} [(-1)^n + 3 + 1/n] = 4 + 1/m$  si  $m$  es par, y es  $s_m = 4 + 1/(m+1)$  si  $m$  es impar. Luego el límite de la sucesión de supremos es 4. Por lo tanto  $\limsup [(-1)^n + 3 + 1/n] = 4$ .

Para cada  $m$  fijo el ínfimo  $r_m$  de la cola  $m$ -ésima de la sucesión es  $r_m = \inf_{n > m} [(-1)^n + 3 + 1/n] = 2 + 1/m$  si  $m$  es impar, y es  $r_m = 2 + 1/(m+1)$  si  $m$  es par. Luego el límite de la sucesión de ínfimos es 2. Por lo tanto  $\liminf [(-1)^n + 3 + 1/n] = 2$ . ◇

◇ **Ejercicio 9.8** Dada cualquier sucesión de reales  $\{a_n\}$  acotada (convergente o no) demostrar que

- (a) Existe una subsucesión que converge al real  $\bar{a} = \limsup a_n$ .
- (b) Existe una subsucesión que converge al real  $\underline{a} = \liminf a_n$ .
- (c)  $\liminf a_n \leq \limsup a_n$
- (d) Toda subsucesión convergente de  $\{a_n\}$  tiene su límite  $a$  que cumple  $\liminf a_n \leq a \leq \limsup a_n$ . ◇

◇ **Ejercicio 9.9** Dada una sucesión de reales  $\{a_n\}$  acotada, se define la sucesión de ínfimos  $r_m$  y de supremos  $s_m$ , y se construyen los intervalos cerrados  $I_m = [r_m, s_m]$  con extremos  $r_m = \inf_{n > m} (a_n)$  y  $s_m = \sup_{n > m} (a_n)$  respectivamente. Demostrar que:

- (a) Si  $\{a_n\}$  es convergente entonces la sucesión de intervalos  $\{I_m\}$  es una sucesión de intervalos encajados en la recta real (según la definición 6.13).
- (b) Si la sucesión de intervalos  $\{I_m\}$  es una sucesión de intervalos encajados en la recta real (según la definición 6.13), entonces la sucesión  $\{a_n\}$  es convergente. ◇

◇ **Ejercicio 9.10** Dada una sucesión de reales acotada demostrar que es convergente si y solo si su límite superior y su límite inferior coinciden. ◇

## 10 Completitud del conjunto de números reales.

Demostraremos el teorema 5.6 ya enunciado la sección 5, que afirma lo siguiente:

✓ **TEOREMA 5.6** *El espacio métrico  $\mathbb{R}$  de números reales, o de puntos en la recta, con la distancia usual, es completo.* ✓

✓ De acuerdo a la definición 5.4: un espacio métrico es *completo, por definición*, cuando toda sucesión de Cauchy es convergente.

Por otra parte en cualquier espacio métrico, según lo probado en el teorema 5.3, toda sucesión convergente es de Cauchy.

Luego, una vez probado el teorema 5.6, tendremos demostrado el siguiente corolario: ✓

✓ **Corolario 10.1** CARACTERIZACION DE CAUCHY DE SUCESSIONES DE REALES CONVERGENTES.

*Una sucesión en  $\mathbb{R}$  es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy.* ✓

✓ **Demostración del teorema 5.6.**

Tenemos que probar, de acuerdo a la definición de completitud dada en 5.4, que toda sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$  es convergente.

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  una sucesión de reales que por hipótesis es de Cauchy. Debemos probar como tesis que existe un número real  $a$  tal que  $a_n \rightarrow a$ .

✓ **Primer paso: Demostrar que toda sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$  es acotada.**

Apliquemos la definición 5.1 de sucesión de Cauchy a nuestra sucesión  $\{a_n\}$ . La condición de esa definición vale para todo  $\epsilon > 0$ , entonces vale en particular para  $\epsilon = 1$ . Deducimos que existe un natural  $\hat{n}$  tal que:

(I)  $\text{dist}(a_n, a_m) < 1$  para todos  $m$  y  $n$  naturales mayores que  $\hat{n}$ .

Elijamos ahora un natural fijo  $n_0$  mayor que  $\hat{n}$ , por ejemplo  $n_0 = \hat{n} + 1$ . Usando en (I)  $m = n_0$  y  $n > n_0$  concluimos que:

Todos los términos  $a_n$  de la cola  $n_0$ -ésima de la sucesión dada, distan de  $a_{n_0}$  menos que 1. Dicho de otra forma:

(II) La cola  $n_0$ -ésima de la sucesión está acotada superiormente por  $a_{n_0} + 1$  e inferiormente por  $a_{n_0} - 1$ .

Por otra parte:

(III) Los primeros  $n_0$  términos de la sucesión son una cantidad finita, luego están acotados superiormente por el mayor de ellos e inferiormente por el menor de ellos.

Como la unión de dos conjuntos acotados de reales está acotado superiormente por la mayor de las dos cotas superiores respectivas a cada uno de ambos conjuntos, y acotado inferiormente por la menor de las dos cotas inferiores respectivas, se deduce de (II) y (III) que la sucesión dada está acotada, como queríamos probar. ✓

✓ **Segundo paso: Probar que la sucesión dada  $\{a_n\}$  tiene una subsucesión convergente.** En efecto, la sucesión dada es acotada como probamos en el paso anterior, y toda sucesión acotada de reales tiene alguna subsucesión convergente, como enunciamos en el teorema 3.15 demostrado en la sección 9.

✓ **Tercer paso: Probar que la sucesión dada  $\{a_n\}$  es convergente.** En efecto, la sucesión dada es de Cauchy por hipótesis y tiene alguna subsucesión convergente como demostramos en el paso anterior. Por otra parte toda sucesión de Cauchy que tenga alguna subsucesión convergente es convergente, como enunciamos en el teorema 3.16 demostrado en la sección 5. □ ✓

## 11 Caracterización secuencial de los conjuntos compactos de reales.

✓ El siguiente teorema 11.1 da una caracterización de los conjuntos compactos de la recta real (es decir los conjuntos cerrados y acotados), a través de sucesiones cuyos elementos pertenecen al compacto. ✓

◇ Para un espacio métrico cualquiera  $A$  se define un conjunto  $H \subset A$  como *acotado* cuando  $H$  está contenido en alguna bola  $B_r(a)$  del espacio  $A$ . Cuando el espacio métrico  $A$  es el de los puntos de la recta con la distancia usual, o el conjunto de los puntos del plano euclídeo, o el conjunto de puntos del espacio euclídeo tridimensional, (o también cuando  $A = \mathbb{R}^k$  es el conjunto de todas las  $k$ -uplas ordenadas de números reales), se dice que un subconjunto es *compacto* cuando es cerrado y acotado, y en estos espacios también es cierto el teorema 11.1 de caracterización secuencial que veremos a continuación, aunque la demostración deberá ser diferente a la que veremos aquí, porque no hay una relación de orden entre los elementos del espacio considerado.

Se advierte que en NO TODOS los espacios métricos  $A$  es cierto el teorema 11.1. ◇

✓ **Teorema 11.1** CARACTERIZACION SECUENCIAL DE COMPACTOS.

*Un conjunto cualquiera de reales  $H \subset \mathbb{R}$  es compacto (esto es: cerrado y acotado) si y solo si toda sucesión de reales  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  tal que  $a_n \in H$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  tiene alguna subsucesión convergente y el respectivo límite  $b$  de cada una de las subsucesiones convergentes cumple  $b \in H$ .*

◇ **Nota:** Para quien no haya omitido la sección 4 este teorema es un corolario de demostración casi inmediata a partir del teorema de caracterización secuencial de conjuntos cerrados (teorema 4.4) y del teorema de caracterización secuencial de conjuntos acotados de reales (teorema 6.10). Desarrollamos la demostración para quien haya omitido la lectura de la sección 4. ◇

✓ *Demostración:* Primero tomemos como hipótesis que  $H$  es compacto, es decir, cerrado y acotado, y probemos como tesis que toda sucesión  $\{a_n\}$  de reales tal que  $a_n \in H$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ , tiene alguna subsucesión convergente  $b_j = a_{n_j}$  y que el límite  $b$  de esta subsucesión cumple  $b \in H$ .

Como por hipótesis  $H$  es acotado, el teorema 3.15 dice que la sucesión  $a_n$  tiene alguna subsucesión convergente  $b_j \rightarrow b \in \mathbb{R}$ . Basta probar ahora que  $b \in H$ .

Por absurdo, supongamos que  $b \notin H$ . Entonces  $b \in H^c$ . Pero por hipótesis  $H$  es cerrado, o lo que es lo mismo,  $H^c$  es abierto. Luego todos los puntos de  $H^c$ , en particular  $b$ , son interiores a  $H^c$ . Entonces existe un entorno  $B_r(b)$  de  $b$ , que cumple

$$[1] \quad B_r(b) \subset H^c$$

Sabemos que  $b_j \rightarrow b \in \mathbb{R}$ , luego por la definición 2.1 de límite, tomando en particular  $\epsilon = r$  se tiene que existe un natural  $\hat{j}$  tal que  $b_j \in B_r(b)$  para todo  $j > \hat{j}$ . Luego, por [1] tenemos que

$$[2] \quad b_j \in H^c \text{ para todo } j > \hat{j}$$

Por otra parte  $b_j = a_{n_j}$  porque  $b_j$  es una subsucesión de  $a_n$ , y  $a_n \in H$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ . Eso implica que

$$[3] \quad b_j \in H \text{ para todo } j \in \mathbb{N}^+$$

Las afirmaciones [2] y [3] son contradictorias, pues los elementos  $b_j$  para  $j > \hat{j}$ , no pueden pertenecer a un conjunto  $H$  y a su complemento  $H^c$  al mismo tiempo.

Ahora demostremos la afirmación recíproca. Tomemos como hipótesis que  $H \subset \mathbb{R}$  es un conjunto para el cual toda sucesión de reales  $\{a_n\}$  que cumpla  $a_n \in H \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$ , tiene necesariamente alguna subsucesión convergente y el límite  $b$  de cada una de estas subsucesiones convergentes cumple  $b \in H$ . Probemos como tesis que  $H$  es compacto, es decir, probemos que  $H$  es acotado y cerrado.

Por el corolario 6.12 que caracteriza secuencialmente a los conjuntos acotados, nuestra hipótesis implica que  $H$  es acotado, porque toda sucesión con elementos en  $H$  tiene alguna subsucesión que es convergente en  $\mathbb{R}$ .

Pero además sabemos por hipótesis, que

(I) Cada una de las subsucesiones convergentes de sucesiones que tienen sus elementos en  $H$  tiene su límite  $b$  que pertenece a  $H$ .

Para terminar la demostración del teorema 11.1 basta probar que  $H$  es cerrado, usando la afirmación (I).

Sabemos que  $H$  es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos frontera.

Sea  $a \in \partial H$ , donde  $\partial H$  indica el conjunto de todos los puntos de frontera (o de borde) de  $H$ . Basta probar que  $a \in H$ .

Por definición de punto de frontera o de borde, en todo entorno del punto  $a$  existe algún punto de  $H$  (y algún otro punto de  $H^c$ ).

Entonces, en particular, dado el natural positivo  $n$ , tomaremos el entorno  $B_r(a)$  de centro  $a$  y radio  $r = 1/n$ . En él existe algún o algunos puntos que pertenecen a  $H$ . Elegiremos uno de esos puntos, que llamamos  $a_n$ .

Por lo tanto, hemos construido una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  tal que:

$$[4] \quad \text{dist}(a_n, a) < 1/n; \quad a_n \in H \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^+$$

Dado  $\epsilon > 0$ , sea  $\hat{n}$  el primer natural mayor que  $1/\epsilon$ . Tenemos  $1/n < 1/\hat{n} < \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ . Luego, reuniendo esta condición con [4] se deduce lo siguiente:

Para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $\hat{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, a) < \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Por la definición 2.1 de límite, la afirmación anterior significa que  $a_n$  es convergente y su límite es  $a$ .

Ahora, aplicando el teorema 3.10 se obtiene lo siguiente:

(II) Toda subsucesión de  $\{a_n\}$  es también convergente y su límite es  $a$ .

Por [4]  $a_n \in H \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$ . Luego juntando (I) y (II) deducimos que  $a \in H$  como queríamos demostrar.  $\square$ .  $\checkmark$

Ahora veremos otra demostración del teorema de existencia de máximo y mínimo de conjuntos compactos, enunciado y demostrado en la parte I de estas notas, pero ahora como corolario del teorema 11.1

## Parte [II-C] CÁLCULO PRÁCTICO DE LÍMITES.

### 12 Sucesiones potencial, exponencial, geométrica y de la serie geométrica.

◇ Revisemos la definición de  $x^\alpha$ , llamada la potencia  $\alpha$ -ésima de un real  $x$  positivo, donde  $\alpha$  es un real fijo (positivo, negativo o nulo).

Sea  $x > 0$  real. Se define para todo  $n \in \mathbb{N}$  la potencia  $n$ -ésima de  $x$  como el producto  $x^n = x \cdot x \cdot x \dots x$  de  $x$  consigo mismo  $n$  veces si  $n \geq 2$ ; si  $n = 1$  se define como  $x^1 = x$  y si  $n = 0$  se define como  $x^0 = 1$ .

Si  $m = -n$  es un entero negativo, se define  $x^{-n} = 1/(x^n)$ . Si  $q$  es un entero positivo cualquiera, se define  $x^{1/q} = \sqrt[q]{x}$  la raíz  $q$ -ésima de  $x$  que es el número  $y$  tal que  $y^q = x$ . Así por ejemplo  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ .

Se define, para  $p$  entero y  $q$  natural positivo  $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$  demostrándose que es igual a  $(\sqrt[q]{x})^p$ . Así para todo  $\alpha = p/q$  racional tenemos definido la potencia  $\alpha$ -ésima de  $x$ , es decir  $x^\alpha$ .

Cuando  $\alpha$  es un real irracional, se le aproxima por racionales  $\alpha_n$  (por ejemplo  $\alpha_n$  es el racional que se obtiene aproximando al número  $\alpha$  en notación decimal, con  $n$  lugares después de la coma. Se demuestra que la sucesión  $x^{\alpha_n}$  converge, y a su límite por definición se le llama  $x^\alpha$ . En particular tenemos que  $x^\alpha = y$  si y solo si  $x = \sqrt[\alpha]{y} = y^{1/\alpha}$ .

En particular tomando  $e$  (número de Euler) tenemos definido  $e^\alpha$ , la potencia  $\alpha$ -ésima de  $e$ , cualquiera sea  $\alpha$  real.

Se define  $\log \beta$  para todo real  $\beta > 0$ , llamado logaritmo en base  $e$  de  $\beta > 0$  o logaritmo neperiano de  $\beta > 0$ , como el número real  $\alpha$  tal que  $e^\alpha = \beta$ . Es decir  $\log \beta = \alpha$  si y solo si  $e^\alpha = \beta$ .

Se demuestran las identidades siguientes para  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  y  $\alpha$  real cualquiera:

$$\begin{aligned} e^{\log \beta} &= \beta; & \log(e^\alpha) &= \alpha; & \log(\beta\gamma) &= \log(\beta) + \log(\gamma); & \log 1 &= 0; & \log e &= 1; \\ \log(1/\beta) &= -\log \beta; & \log(\beta^\alpha) &= \alpha \log \beta; & e^{\alpha \log \beta} &= e^{\log(\beta^\alpha)} = \beta^\alpha \end{aligned} \quad \diamond$$

#### ✓ Definición 12.1 SUCESIÓN DE POTENCIAS

Se llama sucesión de potencias *alpha*-ésimas de  $n$  a la sucesión  $a_n = n^\alpha$  donde  $\alpha$  es un real cualquiera fijo.

#### ✓ Proposición 12.2 $a_n = n^\alpha$ es:

- (a) convergente con límite 0 si  $\alpha < 0$ .
- (b) no convergente y tiende a  $+\infty$  si  $\alpha > 0$ .
- (c) constante igual a 1, y por lo tanto convergente con límite 1, si  $\alpha = 0$ .

*Demostración de la parte (a):* Dado  $\epsilon > 0$  cualquiera, sea  $\hat{n}$  el primer natural mayor que el número real  $e^{(1/\alpha) \log \epsilon} > 0$ . Como la función  $\log x$  es creciente cuando crece la variable real  $x > 0$ , se tiene, para todo  $n > \hat{n} > e^{(1/\alpha) \log \epsilon} > 0$  la siguiente desigualdad:

$$\log n > (1/\alpha) \log \epsilon$$

Multiplicando por  $\alpha$  y observando que  $\alpha < 0$  se deduce:

$$\alpha \log n < \log \epsilon, \quad \text{y por lo tanto} \quad \log(n^\alpha) < \log \epsilon$$

Recordando que la función exponencial  $e^x$  es creciente cuando crece la variable real  $x$ , deducimos que

$$n^\alpha < \epsilon \quad \text{para todo } n > \hat{n}$$

Por la definición 2.1 de límite de una sucesión, concluimos que  $n^\alpha \rightarrow 0$  como queríamos demostrar.

□ ✓

✓ **Ejercicio 12.3** Demostrar las partes (b) y (c) del teorema anterior.

✓ **Definición 12.4** SUCESIÓN EXPONENCIAL

Se llama *sucesión exponencial con base  $\lambda$  y primer término  $k$* , donde  $\lambda$  y  $k$  son números reales fijos dados, a la sucesión  $a_n = k\lambda^n$  para todo natural  $n > 0$ .

Se observa que cada término  $a_{n+1}$  es exactamente igual al producto del término anterior  $a_n$  por la constante  $\lambda$ .

El término que correspondería a un eventual lugar 0 en la sucesión, es decir para  $n = 0$  se toma por convención como  $a_0 = k\lambda^0 = k$  cuando  $\lambda \neq 0$ , y también como  $a_0 = k$  si  $\lambda = 0$ ; por razones de conveniencia, lo llamamos “primer término”, aunque es en realidad el que aparecería por convención en el lugar 0 de la sucesión, antes del término  $a_1$  que ocupa el lugar 1.

La sucesión exponencial con base  $\lambda$ , no debe confundirse con la llamada serie geométrica de razón  $\lambda$  que veremos en la definición 12.7.

✓ **Proposición 12.5** LIMITE DE LA SUCESION EXPONENCIAL.

La sucesión  $a_n = k\lambda^n$  es:

- (a) convergente con límite 0 si  $|\lambda| < 1$ , cualquiera sea  $k$ .
- (b) constante igual a 0, y por lo tanto convergente a 0, si  $k = 0$  cualquiera sea  $\lambda$ , o si  $\lambda = 0$  cualquiera sea  $k$ .
- (c) no convergente y tiende a  $+\infty$  si  $\lambda > 1$  y  $k > 0$
- (d) no convergente y tiende a  $-\infty$  si  $\lambda > 1$  y  $k < 0$
- (e) constante igual a  $k$ , y por lo tanto convergente con límite  $k$ , si  $\lambda = 1$ .
- (f) no convergente y acotada si  $\lambda = -1$  y  $k \neq 0$ .
- (g) No convergente y no acotada, y además que no tiende a  $+\infty$  ni tiende a  $-\infty$  si  $\lambda < -1$  y  $k \neq 0$ .

*Demostración de la parte (a):* Si  $\lambda = 0$  y  $k$  cualquiera, o si  $k = 0$  y  $\lambda$  es cualquiera, entonces la sucesión  $k\lambda^n$  es, para todo  $n \geq 1$ , la sucesión constante igual a cero, y por lo tanto converge a cero.

Resta probar que si  $0 \neq |\lambda| < 1$  y  $k \neq 0$ , entonces la sucesión  $a_n = k\lambda^n$  tiende a cero, cualquiera sea el valor de la constante real  $k$  dada.

Como  $\lambda \neq 0$  y  $k \neq 0$  entonces existen los reales  $\log |\lambda|$  y  $\log |k|$  y podemos hacer la siguiente construcción:

Dado  $\epsilon > 0$  cualquiera, sea  $\hat{n}$  el primer natural mayor que el número real  $[(\log \epsilon - \log |k|) / \log |\lambda|] > 0$ . Siendo  $|\lambda| < 1$  su logaritmo es negativo, y multiplicando por  $\log |\lambda|$  ambos miembros de una desigualdad, se invierte el sentido de la misma.

Deducimos que para todo  $n > \hat{n}$  se cumple

$$n \log |\lambda| < \log \epsilon - \log |k|; \quad \text{por lo tanto } \log(|\lambda|^n) < \log(\epsilon/|k|)$$

Como la función  $e^x$  es creciente cuando crece la variable real  $x$ , se deduce finalmente que:

$$|\lambda|^n < \epsilon/|k| \quad \text{y por lo tanto } |k||\lambda|^n < \epsilon \text{ para todo } n > \hat{n}$$

Observando que  $|k||\lambda|^n = |k\lambda^n|$  la desigualdad anterior es la definición 2.1 de límite de la sucesión  $k\lambda^n \rightarrow 0$  como queríamos demostrar.  $\square \checkmark$

✓ **Ejercicio 12.6** Demostrar las partes (b), (c), (d), (e), (f) y (g) del teorema anterior.

✓ **Definición 12.7** SERIE GEOMÉTRICA

Dados los números reales  $\lambda$  y  $k$  cualesquiera fijos, se llama *serie geométrica de razón  $\lambda$  y primer término  $k$*  a la sucesión  $\{S_n\}$  cuyo elemento  $n$ -ésimo  $S_n$  es la Suma Acumulada de los primeros  $n$  términos de la sucesión exponencial con base  $\lambda$  y primer término  $k$ .

Dicho lo mismo de otra forma:

$$S_n = k + k\lambda + k\lambda^2 + k\lambda^3 + \dots + k\lambda^{n-2} + k\lambda^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} k\lambda^j$$

Por convención se llama *Suma geométrica  $S$*  de razón  $\lambda$  y primer término  $k$ , no a una suma de nada sino al límite (cuando existe real) de la serie geométrica (o sea al límite en  $\mathbb{R}$  cuando existe, de la sucesión de sumas acumuladas de la sucesión exponencial con razón  $\lambda$  y primer término  $k$ ). Se denota como

$$S = \sum_{j=0}^{+\infty} k\lambda^j$$

El símbolo de sumatoria NO indica en este caso una suma de reales, sino el Límite de una sucesión, cuyos elementos son, esos sí, sumas de reales, cada vez con más sumandos.

Por convención se dice que la Suma geométrica es  $+\infty$  cuando la serie geométrica (o sea la sucesión de sumas acumuladas de la sucesión exponencial) tiende a  $+\infty$ . En este caso se denota

$$\sum_{j=0}^{+\infty} k\lambda^j = +\infty$$

Por convención se dice que la Suma geométrica  $S$  no existe, cuando la serie geométrica (o sea la sucesión de sumas acumuladas de la sucesión exponencial) no converge o sea no tiene en  $\mathbb{R}$  ningún límite. (Si no existe la Suma geométrica real  $S$ , entonces puede ser que la serie tienda a  $+\infty$ , a  $-\infty$  o ninguna de las dos cosas.)

Se llama *reducida  $n$ -ésima  $S_n$*  de la serie geométrica de razón  $\lambda$  y primer término  $k$  a la suma acumulada  $S_n$  de los primeros  $n$  términos de la sucesión exponencial con base  $\lambda$  y primer término  $k$ . Las reducidas  $n$ -ésimas entonces son las sumas verdaderas, números reales obtenidos como resultado de sumar una cantidad finita de otros números reales. La sucesión de las reducidas  $n$ -ésimas es entonces la sucesión llamada Serie geométrica. Dicho de otra forma:

$$S_n = k + k\lambda + k\lambda^2 + k\lambda^3 + \dots + k\lambda^{n-2} + k\lambda^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} k\lambda^j$$

El símbolo de sumatoria en este caso indica efectivamente una suma de reales, desde el primer sumando  $k\lambda^j$  que ocupa el lugar  $j = 0$  hasta el que ocupa el lugar  $j = n - 1$ . Por lo tanto es una suma real de exactamente  $n$  sumandos reales.

✓ **Teorema 12.8** SUMA DE LA SERIE GEOMETRICA.

Sea  $\{S_n\}$  la serie geométrica de razón  $\lambda$  y primer término  $k$ , es decir

$$S_n = k + k\lambda + k\lambda^2 + k\lambda^3 + \dots + k\lambda^{n-2} + k\lambda^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} k\lambda^j$$

- (a) Si  $k = 0$  o si  $\lambda = 0$  entonces  $S_n = 0$  constante para todo  $n \geq 1$ , y por lo tanto  $S_n \rightarrow 0$ .
- (b) Si  $\lambda = 1$  y  $k \neq 0$ , entonces  $S_n = kn$  para todo  $n \geq 1$ , y por lo tanto  $S_n \rightarrow +\infty$  si  $k > 0$ ,  $S_n \rightarrow -\infty$  si  $k < 0$ .
- (c) Si  $\lambda \neq 1$  y  $k$  es cualquiera, entonces

$$S_n = \frac{k(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda}$$

y por lo tanto:

- (c1) Si  $|\lambda| < 1$  entonces  $S_n \rightarrow k/(1 - \lambda)$
- (c2) Si  $\lambda > 1$  entonces  $S_n \rightarrow +\infty$  si  $k > 0$ ,  $S_n \rightarrow -\infty$  si  $k < 0$ .
- (c3) Si  $\lambda = -1$  entonces  $S_n$  no converge y es acotada.
- (c4) Si  $\lambda < -1$  entonces  $S_n$  no converge, es no acotada y no tiende a  $+\infty$  ni a  $-\infty$ .

*Demostración de la parte (c).*

Tomemos la definición de la suma acumulada o reducida  $n$ -ésima  $S_n$  de la serie geométrica:

$$S_n = k + k\lambda + k\lambda^2 + k\lambda^3 + \dots + k\lambda^{n-2} + k\lambda^{n-1}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por  $\lambda$  se obtiene:

$$\lambda S_n = k\lambda + k\lambda^2 + k\lambda^3 + k\lambda^4 + \dots + k\lambda^{n-1} + k\lambda^n$$

Restando miembro a miembro las igualdades anteriores se obtiene:

$$(1 - \lambda)S_n = k - k\lambda^n$$

Como  $\lambda \neq 1$  por hipótesis, podemos dividir ambos miembros de la igualdad anterior entre  $1 - \lambda$  y resulta:

$$(I) \quad S_n = (k - k\lambda^n)/(1 - \lambda)$$

con lo que probamos ya la primera igualdad de la afirmación (c).

Ahora reuniendo (I) con los distintos casos de la tesis de la proposición 12.5. Resulta directamente la tesis (c1), (c2), (c3), y (c4), recordando que (ver sección 14) la suma (o el producto) del límite de una sucesión más (o por) una constante es el límite de la suma (o del producto respectivamente) de la sucesión más (o por) esa constante.  $\square$  ✓

✓ **Ejercicio 12.9** Demostrar las partes (a) y (b) del teorema anterior.

### 13 Desigualdades con límites de sucesiones de reales.

✓ **Teorema 13.1** LIMITE EN UNA DESIGUALDAD.

Si  $a_n$  y  $b_n$  son dos sucesiones de reales convergentes y tales que  $a_n \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  entonces se cumple  $\lim a_n = a \leq b = \lim b_n$ . ✓

◇ *Demostración:* Supongamos por absurdo que  $a > b$ , y llamemos  $r$  al número positivo

$$(I) \quad r = (a - b)/3 > 0 \quad \text{o sea} \quad a - b = 3r > 0$$

Por definición de límite, como  $a_n \rightarrow a$ , se tiene para todo  $\epsilon > 0$  ( y por lo tanto también en particular para  $\epsilon = r$ ), la siguiente afirmación:

(\*) Existe algún natural  $\hat{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, a) < \epsilon = r$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Análogamente, como  $b_n \rightarrow b$ , se tiene en particular para  $\epsilon = r$  la siguiente afirmación:

(\*\*) Existe algún natural  $\bar{n}$  tal que  $\text{dist}(b_n, b) < \epsilon = r$  para todo  $n > \bar{n}$ .

Elijamos un valor fijo de la variable natural  $n$  que sea a la vez mayor que  $\bar{n}$  y que  $\hat{n}$  para que cumpla con las afirmaciones (\*) y (\*\*) a la vez. Deducimos que, para ese valor de  $n$  se verifica:

$\text{dist}(a_n, a) < r$  y  $\text{dist}(b_n, b) < r$ , lo cual implica que:

$a_n > a - r$  y  $b_n < b + r$ .

Restando miembro a miembro las desigualdades anteriores, resulta

$$(II) \quad b_n - a_n < (b - a) + 2r$$

(I) y (II) implican que  $b_n - a_n < -3r + 2r = -r < 0$  y sumando en ambos miembros inicial y final de esta desigualdad el número  $a_n$  se deduce  $b_n < a_n$  lo que contradice nuestra hipótesis. □.

◇

✓ **Ejemplo 13.2** La sucesión  $a_n = (1 + 1/n)^n$  sabemos que es convergente al número de Euler  $e$  y que está acotada superiormente por 3, es decir  $a_n \leq 3$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ . Tomando como  $b_n$  la sucesión constante  $b_n = 3$ , y aplicando el teorema anterior, se deduce que  $e \leq 3$ .

✓ **Nota 13.3** Se observa que aunque uno sepa que  $a_n < b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ , con la desigualdad estricta, NO puede afirmarse que  $\lim a_n$  sea necesariamente menor estricto que  $\lim b_n$ . Por ejemplo, si  $a_n = 0$  constante, y  $b_n = 1/n$ , entonces se cumple que  $a_n < b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  pero  $\lim a_n = 0 = \lim b_n$ .

✓ **Teorema 13.4** TEOREMA DEL SANDWICH <sup>12</sup>

Si  $a_n, b_n$  y  $c_n$  son tres sucesiones de reales, tales que

$$a_n \leq b_n \leq c_n; \quad a_n \rightarrow h \quad \text{y} \quad c_n \rightarrow h$$

con el mismo  $h$  (ya sea  $h$  real, o por abuso de lenguaje y notación también  $h = +\infty$  o  $h = -\infty$ ), entonces

$$b_n \rightarrow h \quad \checkmark$$

---

<sup>12</sup>El pan de ajo  $a_n$  está abajo, el pan de miga  $c_n$  arriba, y en el medio se cree que está sola,  $b_n$  la bondiola. Los dos panes se van juntos, al lugar  $h$  a reposar, y la bondiola sin quererlo, termina en  $h$  con los panes, los tres en el mismo lugar.

◊ *Demostración:* Probemos en el caso que  $h$  sea real. Sabemos que  $a_n \rightarrow h$ . Luego, por la definición de límite dada en 2.1, para todo  $\epsilon > 0$  se cumple lo siguiente:

(\*) Existe  $\bar{n}$  tal que  $\text{dist}(a_n, h) < \epsilon$  para todo  $n > \bar{n}$ .

Análogamente, siendo  $c_n \rightarrow h$ , para todo  $\epsilon > 0$  (y en particular para el mismo  $\epsilon > 0$  que tenía antes), se cumple

(\*\*) Existe  $\hat{n}$  tal que  $\text{dist}(c_n, h) < \epsilon$  para  $n > \hat{n}$ .

Sea  $n_0$  el mayor entre los naturales  $\hat{n}$  y  $\bar{n}$  de las afirmaciones (\*) y (\*\*) respectivamente. Para todo  $n > n_0$  se cumplen a la vez las dos desigualdades en (\*) y (\*\*). Concluimos que

(\*\*\*) Existe  $n_0$  tal que  $h - \epsilon < a_n$  y  $c_n < h + \epsilon$  para todo  $n > n_0$ .

Pero sabemos que para todo  $n$ , y en particular para todo  $n > n_0$ ,  $a_n \leq b_n \leq c_n$ . Juntando esta desigualdad con la de (\*\*\*) deducimos que  $h - \epsilon < b_n < h + \epsilon$  para todo  $n > n_0$ .

Como la construcción anterior se puede hacer para  $\epsilon > 0$  arbitrario, entonces, resulta, por la definición 2.1 que  $b_n \rightarrow h$  como queríamos probar.  $\square \diamond$

✓ **Ejemplo 13.5** Sea  $a_n$  una sucesión que no está dada explícitamente ni mediante ninguna fórmula, pero de la que se sabe que  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$  y además  $a_{n+1} \leq (4/5)a_n$  para todo  $a_n$  de alguna cola  $\hat{n}$ -ésima de la sucesión. (O sea  $a_{n+1}/a_n \leq 4/5$ ). Por ejemplo  $a_n = 4^n/(n!)$

Entonces  $a_2 \leq (4/5)a_1$ ,  $a_n \leq (4/5)a_{n-1} \leq (4/5)^2 a_{n-2} \leq (4/5)^3 a_{n-3} \leq \dots \leq (4/5)^{n-1} a_1 = (4/5)^n k$  donde llamamos  $k$  al número elegido como  $k = (5/4)a_1$ . Entonces  $k > 0$  y  $a_1 = (4/5)k$ . Deducimos entonces lo siguiente:

(\*)  $0 \leq a_n \leq (4/5)^n k$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ .

Sea  $c_n$  la sucesión  $c_n = (4/5)^n k = e^{n \log(4/5) + \log k}$ . Sabemos que  $\log(4/5) = \log 4 - \log 5 < 0$ . Luego  $x_n = \log k + n \log(4/5) = \log k + n(\log 4 - \log 5) \rightarrow -\infty$ , ya que  $k > 0$  y  $\log k$  son constantes.

Veremos en la siguiente sección que cuando el exponente  $x_n$  de  $e^{x_n}$  cumple  $x_n \rightarrow -\infty$ , entonces  $e^{x_n} \rightarrow 0$ . Así que en nuestro caso tenemos  $c_n = (4/5)^n k = e^{x_n} \rightarrow 0$ .

Por lo tanto deducimos de (\*) y del teorema 13.4 que  $a_n \rightarrow 0$ . ✓

✓ **Ejercicio 13.6** (a) Probar que si una sucesión de reales  $a_n$  cumple  $|a_{n+1}|/|a_n| \leq \lambda$  para todos los términos  $a_n$  de una cierta cola, y para alguna constante  $\lambda$  real tal que  $0 \leq \lambda < 1$ , entonces  $a_n \rightarrow 0$ .

(b) Sea  $a_n = n!/(n^n)$ . Demostrar que  $a_n \rightarrow 0$ . (Sugerencia: Probar que  $a_n/(a_n + 1) \rightarrow e$ . Tomar  $\epsilon_0 = (e - 1)/2$  y aplicando la definición de límite, deducir que  $a_n/(a_n + 1) > e - \epsilon_0$  para todos los términos  $a_n$  de una cierta cola. Deducir que  $a_n$  cumple las condiciones de la parte a) para  $\lambda = 1/(e - \epsilon_0)$  siendo  $0 < \lambda < 1$ .

(c) Probar que si una sucesión de reales  $a_n$  cumple  $a_n > \lambda a_{n+1}$  para todos los términos  $a_n$  de una cierta cola, y para alguna constante  $\mu$  real tal que  $\mu > 1$ , entonces  $a_n \rightarrow +\infty$  si algún término de la cola de la sucesión  $a_n$  es positivo, y  $a_n \rightarrow -\infty$  en caso contrario.

(d) Probar que  $a_n = n!/2^n \rightarrow +\infty$ .

## 14 Operaciones con límites de sucesiones de reales.

✓ Sean dadas las sucesiones de reales  $a_n$  y  $b_n$ . En lo que sigue indicamos  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  tanto sea con  $a$  y  $b$  reales cuando las sucesiones son convergentes y  $a$  y  $b$  indican sus límites respectivos en  $\mathbb{R}$ , o con la expresión por abuso de notación  $a = +\infty$  o  $a = -\infty$ , cuando las sucesiones no

son convergentes pero tienden a más infinito o a menos infinito según las definiciones 7.2 y 7.6 respectivamente. ✓

✓ **Teorema 14.1** LÍMITE DE LA SUMA

- (i) Si  $a$  y  $b$  son reales entonces  $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- (ii) Si  $a = +\infty$  y  $b$  es real o  $+\infty$  o bien  $b$  real no existe pero la sucesión  $b_n$  es acotada, entonces  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$
- (iii) Si  $a = -\infty$  y  $b$  es real o  $-\infty$  o bien  $b$  real no existe pero la sucesión  $b_n$  es acotada, entonces  $a_n + b_n \rightarrow -\infty$
- (iv) Si  $a = +\infty$  y  $b = -\infty$  entonces, sin estudiar las sucesiones en particular, no se puede determinar a priori y en general cuál es el límite de  $a_n + b_n$ .<sup>13</sup> ✓

✓ *Demostración de la parte (i)* Por hipótesis,  $a_n \rightarrow a$ , luego, para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, existe  $\hat{n}$  tal que:

(\*)  $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Análogamente, como  $b_n \rightarrow b$ , existe  $\tilde{n}$  tal que

(\*\*)  $b - \epsilon < b_n < b + \epsilon$  para todo  $n > \tilde{n}$ .

Llamemos  $n_0$  al mayor entre  $\hat{n}$  y  $\tilde{n}$ . Sumando miembro a miembro las desigualdades (\*) y (\*\*) se obtiene lo siguiente:

Para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, existe  $n_0$  tal que:

$$[I] \quad (a + b) - 2\epsilon < a_n + b_n < (a + b) + 2\epsilon$$

Llamando  $\epsilon^* = 2\epsilon$ , es decir  $\epsilon = \epsilon^*/2$ , como  $\epsilon$  es cualquier real positivo, entonces tenemos que  $\epsilon^*$  es también cualquier real positivo, y concluimos de [I] lo siguiente:

Para todo  $\epsilon^* > 0$  existe  $n_0$  tal que  $\text{dist}((a_n + b_n) - (a + b)) < \epsilon$ .

Por la definición de límite en 2.1 la afirmación anterior muestra que  $a_n + b_n \rightarrow a + b$  como queríamos demostrar. □ ✓

✓ **Ejercicio 14.2** Demostrar la parte (ii) del teorema 14.1, en el caso que  $a = +\infty$  y  $b$  sea real cualquiera. ✓

◇ **Ejercicio 14.3** Demostrar las partes (iii), y (iv) del teorema 14.1. ◇

---

<sup>13</sup>Esto quiere decir que sin conocer exactamente a ambas sucesiones no se puede hacer afirmaciones generales sobre si el límite de la sucesión suma existe o no, y si existe cuánto vale. Pero en cada ejemplo particular siempre sucede que existe o no existe, y si existe tiene un único valor. O sea literalmente está determinado; que uno no pueda determinarlo a priori sin analizar las sucesiones en particular, ni enunciar resultados generales que valgan para todos los ejemplos, no quiere decir que esté indeterminado el límite de la suma. En cada caso y todos los casos particulares está determinado si existe o no, y cuando existe tiene un único valor que sirve para ese ejemplo. Sin embargo, en el lenguaje corriente entre los estudiantes y docentes de matemática se suele decir que ese límite está “indeterminado”, abusando del lenguaje. Se pueden dar ejemplos que cumplen con las hipótesis  $a_n \rightarrow +\infty$  y  $b_n \rightarrow -\infty$  en los que el límite de  $a_n + b_n$  existe y es real, incluso dando de antemano cualquier número real que se desee. Se pueden dar otros ejemplos que cumplen las mismas hipótesis y tales que la suma tiende a  $+\infty$ , otros ejemplos para los cuales la suma tiende a  $-\infty$  y otros ejemplos para los cuales la sucesión suma no es convergente pero es acotada, luego no tiende a más infinito ni a menos infinito ni a ningún número real, y también existen ejemplos “todo en contra” en que la sucesión suma no converge a ningún real, no es acotada, no tiende a más infinito, y tampoco tiende a menos infinito.

✓ **Ejemplo 14.4** Veremos cómo calcular el límite de  $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n}$ , si es que existe.

$a_n$  es la suma de dos sucesiones  $\sqrt{n+1}$  que tiende a más infinito, con  $-\sqrt{n}$  que tiende a menos infinito. Por lo tanto corresponde al caso (iv) del teorema 14.1, y para calcular su límite no disponemos de un teorema o receta general, sino que hay que estudiar las particularidades del ejemplo.

Sabemos que para  $x$  e  $y$  reales cualesquiera, vale la identidad siguiente:  $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ . Usando  $x = \sqrt{n+1} > 1$  e  $y = \sqrt{n} > 1$ , podemos multiplicar y dividir  $a_n$  por  $x+y = (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \neq 0$  y resulta:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Ahora dividiendo entre  $\sqrt{n}$  el dividendo y el divisor del cociente anterior, y dentro del divisor, cada uno de los sumandos, resulta:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$$

Hemos usado en el último paso algunas operaciones con límites que todavía no enunciamos: por ejemplo que si una sucesión  $b_n \geq 0$  tiende al real  $b \geq 0$  entonces la nueva sucesión raíz cuadrada de la dada  $\sqrt{b_n}$  tiende al real  $\sqrt{b}$ . También usamos que si una sucesión  $c_n \neq 0$  tiende al real  $c \neq 0$  entonces la nueva sucesión de inversos de la sucesión dada  $1/c_n$  tiende al real  $1/c$ . Los enunciados de estos y otros teoremas para el cálculo práctico de límites están en los párrafos siguientes de esta sección. ✓

#### ✓ Teorema 14.5 LÍMITE DEL PRODUCTO

- (i) Si  $a$  y  $b$  son reales entonces  $a_n b_n \rightarrow ab$
- (ii) Si  $a = +\infty$  y  $b > 0$  es real o  $+\infty$  o bien  $b$  real no existe pero  $b_n > 0$ , entonces  $a_n b_n \rightarrow +\infty$
- (iii) Si  $a = -\infty$  y  $b > 0$  es real o  $+\infty$  o bien  $b$  real no existe pero  $b_n > 0$ , entonces  $a_n b_n \rightarrow -\infty$
- (iv) Si  $a = +\infty$  y  $b < 0$  es real o  $-\infty$  o bien  $b$  real no existe pero  $b_n < 0$ , entonces  $a_n b_n \rightarrow -\infty$
- (v) Si  $a = -\infty$  y  $b < 0$  es real o  $-\infty$  o bien  $b$  real no existe pero  $b_n < 0$ , entonces  $a_n b_n \rightarrow +\infty$
- (vi) Si  $a = +\infty$  o  $a = -\infty$  y  $b = 0$  entonces, sin estudiar las sucesiones en particular, no se puede determinar a priori y en general cuál es el límite de  $a_n b_n$ . ✓

✓ **Ejercicio 14.6** Probar la parte (i) del teorema 14.5. ✓

◇ **Ejercicio 14.7** Probar el teorema 14.5. ◇

#### ✓ Teorema 14.8 LÍMITE DE LA SUCESIÓN DE INVERSOS.

Suponemos que la sucesión de reales dada  $a_n$  tiene sus términos diferentes de cero, para poder calcular la sucesión de inversos  $1/a_n$ . Denotamos  $a_n \rightarrow a$  con  $a$  real, o por abuso de notación y lenguaje, con  $a = +\infty$ , o  $a = -\infty$ .

- (i) Si  $a \neq 0$  es real entonces  $1/a_n \rightarrow 1/a$
- (ii) Si  $a = +\infty$  entonces  $1/a_n \rightarrow 0^+$  ( es decir tiende a 0 y además todos los términos de alguna de sus colas son estrictamente positivos).
- (iii) Si  $a = -\infty$  entonces  $1/a_n \rightarrow 0^-$  ( es decir tiende a 0 y además todos los términos de alguna de sus colas son estrictamente negativos).

(iv) Si  $a = 0^+$  entonces  $1/a_n \rightarrow +\infty$   
 (v) Si  $a = 0^-$  entonces  $1/a_n \rightarrow -\infty$   
 (vi) Si  $a = 0$  pero no es ni  $0^+$  ni  $0^-$  entonces  $1/a_n$  no converge, ni tiende a  $+\infty$  ni tiende a  $-\infty$ , ni es acotada superiormente, ni es acotada inferiormente, ni tiene subsucesiones convergentes.  
 Ejemplo:  $a_n = 1/(-2)^n \rightarrow 0$ , y  $1/a_n = 2^n$  si  $n$  es par y  $1/a_n = -2^n$  si  $n$  es impar. ✓

✓ **Ejercicio 14.9** Probar la parte (i) del teorema 14.8. ✓

◇ **Ejercicio 14.10** Probar el teorema 14.8. ◇

✓ **Nota 14.11** LÍMITE DEL COCIENTE. Para estudiar a cuánto tiende la sucesión cociente  $b_n/a_n$  aplicamos combinados los resultados del límite del producto y del límite de la sucesión de inversos, ya que  $b_n/a_n = (1/a_n)b_n$ . ✓

✓ **Teorema 14.12** LÍMITE DE LAS RAICES CUADRADAS DE UNA SUCESIÓN.

Sea  $\{b_n\}$  una sucesión de reales todos positivos, y denotamos  $b_n \rightarrow b$ , donde  $b$  es real positivo, o  $b = 0^+$  o  $b = +\infty$ .

(i) Si  $b$  es real positivo, entonces  $\sqrt{b_n} \rightarrow \sqrt{b}$

(ii) Si  $b = 0^+$  entonces  $\sqrt{b_n} \rightarrow 0^+$

(iii) Si  $b = +\infty$  entonces  $\sqrt{b_n} \rightarrow +\infty$ . ✓

◇ *Demostración de (i):* Como  $b_n \rightarrow b$  y  $b$  es real positivo por hipótesis, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\hat{n}$  tal que (I)  $|b_n - b| < \epsilon$  para todo  $n > \hat{n}$ .

Sabemos que  $b_n - b = (\sqrt{b_n} - \sqrt{b})(\sqrt{b_n} + \sqrt{b})$ , y entonces tomando valor absoluto en ambos miembros de la igualdad, sabiendo que el valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos, y finalmente usando la desigualdad (I) obtenemos que:

$$|\sqrt{b_n} - \sqrt{b}| |\sqrt{b_n} + \sqrt{b}| = |b_n - b| < \epsilon \quad \text{para todo } n > \hat{n}$$

Ahora pasamos dividiendo el segundo factor de la izquierda, hacia la derecha, dividiendo al número  $\epsilon > 0$  y acotamos inferiormente en el divisor, (y por lo tanto superiormente en el resultado de la división), al sumando  $\sqrt{b_n} > 0$ .

$$|\sqrt{b_n} - \sqrt{b}| < \frac{\epsilon}{|\sqrt{b_n} + \sqrt{b}|} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{b}} = \epsilon^* \quad \text{para todo } n > \hat{n}$$

Hemos llamado  $\epsilon^* = \epsilon/\sqrt{b}$ . Entonces  $\epsilon^*$  es cualquier real positivo si  $\epsilon$  lo es, ya que  $\sqrt{b} > 0$  y está fijo.

En conclusión tenemos que dado  $\epsilon^* > 0$  real cualquiera positivo, existe un natural  $\hat{n}$  tal que

$$|\sqrt{b_n} - \sqrt{b}| < \epsilon^* \quad \text{para todo } n > \hat{n}$$

Por definición, eso significa que  $\sqrt{b_n} \rightarrow \sqrt{b}$  como queríamos probar. □ ◇

◇ **Teorema 14.13** LIMITE DE LA EXPONENCIAL DE UNA SUCESION.

(i)  $a_n \rightarrow a$  real (cualquiera) si y solo si  $e^{a_n} \rightarrow e^a$  real positivo.

(ii)  $a_n \rightarrow +\infty$  si y solo si  $e^{a_n} \rightarrow +\infty$

(iii)  $a_n \rightarrow -\infty$  si y solo si  $e^{a_n} \rightarrow 0^+$  ◇

◇ *Demostración de (i):* La condición  $a_n \rightarrow a$  es por definición de límite equivalente <sup>14</sup> a la siguiente afirmación:

(\*) Para todo  $\epsilon > 0$  dado cualquiera, existe  $\hat{n}$  tal que, para todo  $n > \hat{n}$  se cumple

$$(I) \quad -\epsilon < a_n - a < \epsilon.$$

Siendo la función real  $e^x$  una función estrictamente creciente para todo  $x \in \mathbb{R}$ , la desigualdad (I) es equivalente a la siguiente desigualdad siguiente:

$$(II) \quad e^{-\epsilon} < e^{a_n - a} < e^{\epsilon}.$$

Recordando que  $e^{b-a} = e^b e^{-a} = e^b (1/e^a)$ , si multiplicamos (II) por  $e^a \neq 0$  obtenemos la siguiente desigualdad que es equivalente a (II).

$$(III) \quad e^a e^{-\epsilon} < e^{a_n} < e^a e^{\epsilon}.$$

Sumando y restando  $e^a$  al primer y al último término de la desigualdad (III), y después sacando de factor común  $e^a$  en ambos, obtenemos la siguiente desigualdad equivalente a (III):

$$(IV) \quad e^a [1 - (1 - e^{-\epsilon})] < e^{a_n} < e^a [1 + (e^{-\epsilon} - 1)].$$

En definitiva concluimos de (\*), (I) y (IV), sabiendo que (I) es equivalente a (IV), lo siguiente:  $a_n \rightarrow a$  si y solo si:

(\*\*) Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\hat{n}$  tal que, para todo  $n > \hat{n}$  se cumple

$$(V) \quad e^a - e^a(1 - e^{-\epsilon}) < e^{a_n} < e^a + e^a(e^{-\epsilon} - 1).$$

Por otra parte, y en forma independiente totalmente de lo hecho hasta ahora, podemos aplicar la definición 2.1 de límite de una sucesión, a la sucesión  $b_n = e^{a_n}$  y llamando  $b$  al número real fijo  $b = e^a$ , obtenemos el siguiente enunciado:

$e^{a_n} \rightarrow e^a$  si y solo si:

(\*\*\*) Para todo  $\epsilon^* > 0$  existe  $\hat{n}$  tal que, para todo  $n > \hat{n}$  se cumple

$$(VI) \quad e^a - \epsilon^* < e^{a_n} < e^a + \epsilon^*.$$

Para demostrar que  $a_n \rightarrow a$  si y solo si  $e^{a_n} \rightarrow e^a$  basta probar que la afirmación (\*\*) implica la (\*\*\*) y que la afirmación (\*\*\*) implica la (\*\*).

**Primero:** Demostración de que (\*\*\*). Queremos probar (\*\*) como tesis. Basta probar que dado  $\epsilon > 0$  cualquiera se puede encontrar  $\hat{n}$  que cumple la desigualdad (V). Pero por hipótesis sabemos que se cumple la desigualdad (VI) para todo  $\epsilon^* > 0$ , y además la desigualdad (VI) implica la (V) si en particular elegimos  $\epsilon^* > 0$  igual al mayor de los números  $e^a(1 - e^{-\epsilon}) > 0$  y  $e^a(e^{-\epsilon} - 1) > 0$ .

**Segundo:** Demostración de que (\*\*) implica (\*\*\*). Queremos probar (\*\*\*) como tesis. Basta probar que dado  $\epsilon^* > 0$  cualquiera se puede encontrar  $\hat{n}$  que cumple la desigualdad (VI). Pero por hipótesis sabemos que se cumple la desigualdad (V) para todo  $\epsilon > 0$ , y además la desigualdad (V) implica la (VI) si en particular elegimos  $\epsilon > 0$  tal que el menor de los números  $e^a(1 - e^{-\epsilon}) > 0$  y  $e^a(e^{-\epsilon} - 1) > 0$  sea menor o igual que el valor de  $\epsilon^* > 0$  dado. □ ◇

◇ **Ejercicio 14.14** Desmostrar las partes (ii) y (iii) del teorema 14.13. ◇

✓ **Ejemplo 14.15** Hallar el límite de  $e^{(3n^2-1)/(5n^2)}$ . Sabemos, usando los teoremas 14.1 y 14.5 que  $(3n^2 - 1)/5n^2 = 3/5 - 1/5(1/n)^2 \rightarrow 3/5 - 1/5(0)^2 = 3/5$ . Luego la sucesión dada tiene límite  $e^{3/5} = \sqrt[5]{e^3}$ . ✓

---

<sup>14</sup>Dos afirmaciones son equivalente cuando cada una de ellas implica la otra.

Los siguientes dos resultados son corolarios del teorema 14.13.

◇ **Corolario 14.16** LÍMITE DEL LOGARITMO DE UNA SUCESIÓN POSITIVA.

Sea  $b_n$  una sucesión de reales positivos estrictamente. Denotamos  $b_n \rightarrow b$  tanto si  $b$  es real ( $b > 0$  ó  $b = 0^+$  pues es el límite de una sucesión  $b_n > 0$ ), como cuando, por abuso de lenguaje y notación, es  $b = +\infty$ .

- (i)  $b_n \rightarrow b$  real estrictamente positivo si y solo si  $\log b_n \rightarrow \log b$  es real.
- (ii)  $b_n \rightarrow +\infty$  si y solo si  $\log b_n \rightarrow +\infty$ .
- (iii)  $b_n \rightarrow 0^+$  si y solo si  $\log b_n \rightarrow -\infty$ . ◇

◇ *Demostración como consecuencia del teorema 14.13:* Basta definir  $a_n \log b_n$  y  $a = \log b$  cuando  $b$  es real positivo. Entonces tenemos  $e^{a_n} = b_n$  y  $e^a = b$ . Sustituyendo a lo largo de todo el enunciado del teorema 14.13  $a_n$  y  $a$  por las igualdades anteriores, resulta el corolario 14.16. □ ◇

◇ **Corolario 14.17** LÍMITE DE LAS POTENCIAS DE UNA SUCECION CON EXPONENTE OTRA SUCESIÓN.

Sea  $b_n$  una sucesión de reales positivos estrictamente y sea  $a_n$  una sucesión de reales cualesquiera. Denotamos  $b_n \rightarrow b$  y  $a_n \rightarrow a$ , tanto si  $b$  es real ( $b > 0$  ó  $b = 0^+$  pues es el límite de una sucesión  $b_n > 0$ ),  $a$  es real, como cuando, por abuso de lenguaje y notación, es  $b = +\infty$ , y/o es  $a = +\infty$  o  $a = -\infty$ .

- (i) Si  $a$  es real cualquiera, y  $b$  es real estrictamente positivo entonces  $b_n^{a_n} = e^{a_n \log b_n} \rightarrow e^{a \log b} = b^a$  real.
- (ii) Si  $b = +\infty$  y  $a \neq 0$  es real, entonces  $b_n^{a_n} = e^{a_n \log b_n} \rightarrow +\infty$  cuando  $a$  es positivo, y  $b_n^{a_n} = e^{a_n \log b_n} \rightarrow 0^+$  cuando  $a$  es negativo.
- (iii) Si  $b = 0^+$  y  $a \neq 0$  es real, entonces  $b_n^{a_n} = e^{a_n \log b_n} \rightarrow 0^+$  cuando  $a$  es positivo, y  $b_n^{a_n} = e^{a_n \log b_n} \rightarrow +\infty$  cuando  $a$  es negativo.
- (iv) Si  $a = +\infty$  o  $a = -\infty$  y  $b > 0$  es real, o  $b = +\infty$  entonces  $b_n^{a_n} = e^{a_n \log b_n} \rightarrow +\infty$  o respectivamente  $b_n^{a_n} = e^{a_n \log b_n} \rightarrow 0^+$
- (v) si  $a = +\infty$  o  $a = -\infty$  y  $b = 0^+$  entonces sin estudiar las sucesiones en particular, no se puede determinar a priori y en general cuál es el límite de  $b_n^{a_n} = e^{a_n \log b_n}$ . ◇

◇ *Demostración* Es una consecuencia inmediata de los teoremas 14.5, 14.16 y 14.13, usados en ese orden. □ ◇

◇ **Nota:** El corolario 14.17 incluye, como caso particular, al teorema 14.12 cuando la sucesión en el exponente  $a_n$  usado en 14.17 es la sucesión constante  $a_n = 1/2$ , ya que  $\sqrt{b_n} = b_n^{1/2}$ . ◇

## 15 Límites de funciones de variable real y su relación con los límites de sucesiones de reales.

## 16 Cálculo de límites de sucesiones tipo en $\mathbb{R}$ .

Usando los resultados de la sección 15 se deducen límites de las sucesiones de los teoremas 16.1 y 16.2, que llamaremos “límites tipo” (que “recuerdan”<sup>a</sup> la regla de L'Hopital para funciones que se ve en los cursos de liceo).

✓ **Teorema 16.1** Sea por hipótesis  $\{a_n\}$  una sucesión dada tal que

$$a_n \rightarrow 0, \quad a_n \neq 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^+$$

(Por ejemplo:  $a_n = x = 1/n \rightarrow 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ ; o lo que es lo mismo se puede sustituir  $n = 1/x$  donde  $x \rightarrow 0$  es una variable real evaluada solamente en aquellos puntos donde  $1/x$  queda natural positivo.)

Se cumple la siguiente tesis:

$$(a) \quad \lim \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = \lim \frac{e^{a_n}}{1} = 1$$

$$(b) \quad \lim \frac{\text{sen } a_n}{a_n} = \lim \frac{\cos a_n}{1} = 1$$

$$(c) \quad \lim \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \lim \frac{0 + \text{sen } a_n}{2a_n} = \lim \frac{\cos a_n}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(d) \quad \lim \frac{\tan a_n}{a_n} = \lim \frac{(1 + \tan^2 a_n)}{1} = 1$$

$$(e) \quad \lim \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = \lim \frac{1}{1 + a_n} = 1$$

$$(f) \quad \lim \frac{(1 + a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \lim \frac{\alpha(1 + a_n)^{\alpha-1}}{1} = \alpha$$

cualquiera sea el valor fijo real dado de la constante  $\alpha$ .

En particular la afirmación (f) en el caso  $\alpha = 1/2$  implica la siguiente:

$$(g) \quad \frac{\sqrt{1 + a_n} - 1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Todos los enunciados (a) hasta (g) anteriores son casos particulares del siguiente enunciado más general (h):

Sea la función real dada  $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  (continua o discontinua, diferenciable o no) sabiendo por hipótesis que cumple  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \rho$  y además que  $a_n \rightarrow 0$  y  $a_n \neq 0$  para todo  $n$ . Entonces:

$$(h) \quad F(a_n) \rightarrow \rho$$

( $h^*$ ) Si además por hipótesis sabemos que la función  $F(x)$  es continua en  $x = 0$ , entonces además podemos admitir que  $a_n = 0$  para infinitos valores de  $n$  y agregar lo siguiente al enunciado ( $h$ ):

$$(h^*) \quad \rho = F(0)$$

( $h^{**}$ ) Si sabemos en cambio que  $F(x)$  no es continua en  $x = 0$  pero por hipótesis  $F(x)$  es el cociente

$$F(x) = f(x)/g(x) \quad \text{para todo } x \neq 0$$

de dos funciones reales dadas  $f(x)$  y  $g(x)$ , que por hipótesis sabemos son ambas continuas y diferenciables en  $x = 0$  y además tales que ambas tienden a 0 cuando  $x \rightarrow 0$ , y tal que el cociente  $f'(x)/g'(x)$  de sus derivadas tiene un límite  $\rho$  real cuando  $x \rightarrow 0$  entonces podemos, por la regla de l'Hopital, agregar lo siguiente al enunciado (h):

$$(h^{**}) \quad \rho = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Nota importante:** Los recíprocos de las partes (h),  $(h^*)$  y  $(h^{**})$  son falsos: Si conocemos el límite real  $\rho$  de la sucesión  $F(a_n)$ ,  $\rho = \lim F(a_n)$ , donde  $a_n$  es una sucesión dada y fija que sabemos que tiende a cero y nunca se anula, entonces No necesariamente se cumple que  $F(x)_{x \rightarrow 0} = \rho$ . Se pueden dar ejemplos en que no existe ese límite de  $F(x)$ , cuando  $x \rightarrow 0$  aunque exista el límite de la sucesión  $F(a_n)$  (sabiendo siempre que  $a_n \neq 0$  es una cierta sucesión dada de antemano, cuyos términos no se anulan pero que tiende a cero).✓

✓ **Teorema 16.2** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión no convergente tal que

$$a_n \rightarrow +\infty$$

(Por ejemplo:  $a_n = x = n \rightarrow +\infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}^+$ ; o lo que es lo mismo se puede sustituir  $n$  por  $x$  donde  $x$  es una variable real evaluada solamente en aquellos valores naturales positivos.)

Entonces se cumple la siguiente tesis:

$$(a) \quad \frac{b_n}{e^{b_n}} \rightarrow 0$$

$$(b) \quad \frac{\log b_n}{b_n} \rightarrow 0$$

Los enunciados (a) y (b) anteriores son casos particulares del siguiente enunciado más general (h):

Sea la función real dada  $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  (continua o discontinua, diferenciable o no) sabiendo por hipótesis que cumple  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \rho$ . Además está dada la sucesión  $a_n \rightarrow +\infty$ . Entonces:

$$(c) \quad F(a_n) \rightarrow \rho$$

**Nota importante:** El recíproco de la parte (c) es falso. Si conocemos el límite real  $\rho$  de la sucesión  $F(a_n)$ ,  $\rho = \lim F(a_n)$ , donde  $a_n$  es una sucesión dada y fija que sabemos que tiende a  $+\infty$  entonces No necesariamente se cumple que  $F(x)_{x \rightarrow +\infty} = \rho$ . Se pueden dar ejemplos en que no existe ese límite de  $F(x)$ , cuando  $x \rightarrow +\infty$  aunque exista el límite de la sucesión  $F(a_n)$  (sabiendo siempre que  $a_n \neq +\infty$  es una cierta sucesión dada de antemano).✓

## Referencias

[B 1975] Autor: *Título del libro* Editorial **Número** Año