

Funciones de variable compleja.

Eleonora Catsigeras *

15 de mayo de 2006

Notas para el curso de Funciones de Variable Compleja
de la Facultad de Ingeniería

*Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingeniería. Universidad de la República. Uruguay. Address: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

PRÓLOGO:

Este curso está dirigido a estudiantes universitarios de grado de las carreras de Ingeniería. Se supone conocido el cuerpo de los complejos, la interpretación geométrica en el plano complejo de las operaciones de cuerpo, los conceptos básicos de topología del plano complejo o de \mathbb{R}^2 , el cálculo diferencial e integral en una y dos variables reales, la geometría de curvas paramétricas planas diferenciables, y el cálculo vectorial, diferencial e integral de campos reales en \mathbb{R}^2 .

El texto está dividido en tres partes. Cada parte está separada en secciones temáticas.

En las secciones 4, 11 y 17, se hace la síntesis de los resultados más importantes de las secciones anteriores.

El curso se completa con el tema de Transformada de Laplace que se encuentra en las notas de J. Vieitez y N. Möller, y con las listas 1 a 7 de ejercicios publicadas en el año 2006.

BIBLIOGRAFÍA:

Ahlfors, L. : *Análisis de Variable Compleja*. Editorial Aguilar, España, 1966.

Rudin, W. : *Análisis Real y Complejo*. Editorial Alhambra, España, 1979.

Universidad de Zaragoza : *Notas de Funciones de Variable Compleja*.

Guelfond, A. : *Los residuos y sus aplicaciones*. Editorial MIR, Moscú, 1968.

Vieitez, J. - Möller, N. : *Apuntes para el curso de funciones de variable compleja. Transformada de Laplace*.

IMERL, Facultad de Ingeniería, Udelar. Montevideo, 2005.

(<http://imerl.fing.edu.uy/varcompleja/materiales.htm>)

IMERL: *Listas de ejercicios para el curso de funciones de variable compleja*.

Repartidos 1 a 7. IMERL, Facultad de Ingeniería, Udelar. Montevideo, 2006.

(<http://imerl.fing.edu.uy/varcompleja/>)

Índice

Prólogo y Bibliografía	1
Primera parte: FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN.	5
1. Funciones complejas de variable compleja.	5
1.1. <i>Notaciones y conceptos previos.</i>	5
1.2. <i>Argumento, Logaritmo y Raíz n-ésima.</i>	9
1.3. <i>Compactificación del plano complejo.</i>	11
1.4. <i>Transformaciones de Moebius o bilineales.</i>	12
2. Derivación y funciones holomorfas.	18
2.1. <i>Derivación de funciones complejas y funciones holomorfas.</i>	18
2.2. <i>Transformaciones conformes.</i>	24
2.3. <i>Funciones armónicas.</i>	25
3. Integración y Convergencia Uniforme.	30
3.1. <i>Integración compleja.</i>	30
3.2. <i>Convergencia uniforme de series de funciones complejas.</i>	36
Segunda parte: FUNCIONES ANALÍTICAS Y TEORÍA DE CAUCHY.	42
4. Síntesis de la primera parte.	42
4.1. <i>Derivación y funciones holomorfas.</i>	42
4.2. <i>Integración compleja.</i>	43
4.3. <i>Convergencia uniforme de series de funciones complejas.</i>	45
5. Funciones analíticas y teoría del índice.	47
5.1. <i>Definición y derivabilidad infinita de las funciones analíticas.</i>	47
5.2. <i>Principio de prolongación analítica.</i>	51
5.3. <i>Construcción de funciones analíticas mediante integración.</i>	53
5.4. <i>Teoría del índice.</i>	55
6. Teoría de Cauchy local.	59
6.1. <i>Sucesión de rectángulos encajados convergentes para acotar integrales.</i>	59
6.2. <i>Teoría de Cauchy-Goursat en rectángulos.</i>	60
6.3. <i>Analiticidad de las funciones holomorfas.</i>	65
7. Teoría de Cauchy global.	68
7.1. <i>Teorema de Cauchy global.</i>	68
7.2. <i>Fórmulas integrales de Cauchy global.</i>	70
7.3. <i>Recíprocos de los Teoremas de Cauchy.</i>	72

8. Consecuencias de la Teoría de Cauchy.	77
8.1. Principio del módulo máximo.	77
8.2. Otras consecuencias de la Teoría de Cauchy.	78
8.3. Series de Fourier.	81
9. Aplicaciones al cálculo de integrales impropias.	85
9.1. Lema de deformación de curvas y sus aplicaciones.	85
9.2. Lema de Jordan y sus aplicaciones.	87
9.3. Transformada de Fourier.	90
10. Otros resultados y ejercicios resueltos.	93
10.1. Consecuencias del principio de módulo máximo.	93
10.2. Aplicaciones de otros teoremas.	95
10.3. Teoremas de la función inversa y forma local de las transformaciones analíticas. . .	100
10.4. Transformaciones del disco unitario en sí mismo.	105
Tercera parte: SINGULARIDADES Y TEORÍA DE LOS RESIDUOS.	112
11. Síntesis de la segunda parte.	112
11.1. Funciones analíticas.	113
11.2. Teoría del índice.	115
11.3. Teoría de Cauchy.	115
11.4. Consecuencias de la teoría de Cauchy.	116
11.5. Lema de Jordan y de deformación de curvas.	117
12. Ceros y singularidades aisladas.	118
12.1. Funciones racionales.	118
12.2. Ceros de las funciones analíticas.	120
12.3. Clasificación de las singularidades aisladas.	124
12.4. Polos complejos y en ∞	127
12.5. Singularidades esenciales.	131
13. Series de Laurent.	133
13.1. Definición de serie de Laurent y corona de convergencia.	133
13.2. Desarrollo en serie de Laurent.	134
13.3. Caracterización de singularidades aisladas por su desarrollo de Laurent.	139
13.4. Ejemplos de desarrollo de Laurent.	141
14. Funciones meromorfas y teoremas de aproximación.	145
14.1. Funciones meromorfas.	145
14.2. Aproximación por funciones racionales.	148
14.3. Convergencia uniforme en compactos de funciones analíticas.	150
14.4. Familias normales.	154

15. Teoría de los residuos.	162
15.1. Residuos.	162
15.2. Principio del argumento.	167
15.3. Teorema de Rouché.	170
15.4. Ejemplos.	172
16. Ejercicios resueltos sobre cálculo de residuos.	174
16.1. Integrales de funciones racionales en la circunferencia.	174
16.2. Integrales impropias mediante el cálculo de residuo en alguna raíz n -ésima.	175
16.3. Integrales impropias de potencias reales de z	178
16.4. Otros ejemplos.	181
17. Síntesis de la tercera parte.	185
17.1. Ceros y singularidades aisladas.	185
17.2. Series de Laurent.	188
17.3. Teoremas de aproximación en compactos.	191
17.4. Teoría de los residuos.	192