10. Otros resultados y ejercicios resueltos.

10.1. Consecuencias del principio de módulo máximo.

Ejercicio 10.1.1. Mínimos locales. Sea $f \in H(\Omega)$. Se dice que $|f|$ tiene un mínimo local en $z_0 \in \Omega$ si existe un entorno $D_R(z_0) \subset \Omega$ tal que

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| \quad \forall z \in D_R(z_0)$$

Probar que si Ω es conexo y $|f|$ tiene un mínimo local en Ω entonces o ese mínimo es nulo, o f es constante en Ω .

Probemos que si ese mínimo no es nulo entonces f es constante en Ω . Llamemos $m > 0$ al mínimo local que tiene $|f|$ en z_0 . Llamemos $D = D_R(z_0)$. Se cumple

$$0 < m = |f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \forall z \in D \quad (1)$$

Luego f no se anula nunca cuando $z \in D$. Por lo tanto la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall z \in D \quad (2)$$

es analítica en D y no se anula nunca en D .

Reuniendo (1) y (2) se deduce que:

$$|g(z_0)| \geq |g(z)| \quad \forall z \in D$$

Luego g tiene un máximo local en z_0 . Por el principio del módulo máximo $g(z) = c$ constante en D . Como g no se anula nunca en D , se cumple $c \neq 0$. Por (2)

$$f(z) = \frac{1}{c} \quad \forall z \in D$$

Luego, $f(z) - 1/c = 0$ para todo $z \in D$. Por el principio de prolongación analítica, $f(z) - 1/c = 0$ para todo $z \in \Omega$, y deducimos que f es constante en Ω , como queríamos demostrar. $\square$

Ejercicio 10.1.2. Existencia de ceros en las transformaciones del disco.

Sea $f \in H(\Omega)$, donde Ω es abierto conexo; sea D un disco abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Si

$$|f(z)| \text{ es constante} \quad \forall z \in \partial D$$

probar que f tiene al menos un cero en D , es decir existe al menos un $a \in D$ tal que $f(a) = 0$, ó de lo contrario f es constante en Ω .

Sea $|f(z)| = c$ constante cuando $z \in \partial D$.

Primer caso. Si $c = 0$ entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \partial D$. Por el principio de prolongación analítica la función f es constante igual a cero en Ω .

Segundo caso. Si $c > 0$ basta probar que si f no tiene ningún cero en D entonces f es constante en D .

Si $f(z)$ no se anula en D entonces tampoco se anula en $\overline{D}$, ya que en $\partial D : |f| = c > 0$. Como f es continua, y no se anula en el compacto $\overline{D}$ entonces no se anula en un abierto V que contiene al disco cerrado $\overline{D}$. Por lo tanto la función:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall z \in V \supset \overline{D} \quad (1)$$

es analítica en V . Por el principio del módulo máximo aplicado a g se tiene:

$$\max_{z \in \overline{D}} \{|g(z)|\} = \max_{z \in \partial D} \{|g(z)|\} = \frac{1}{c} \quad (2)$$

En efecto, si g es constante, obviamente el máximo de $|g|$ se alcanza en todo punto de $\overline{D}$, en particular en la frontera ∂D . Y si g no es constante, el máximo de $|f(z)|$ en $\overline{D}$ se alcanza exclusivamente en la frontera ∂D (ver corolario 8.1.3 del principio de módulo máximo). De (1) y (2) se deduce:

$$\frac{1}{|f(z)|} = |g(z)| \leq \frac{1}{c} \quad \forall z \in D \quad (3)$$

Por otro lado, por el principio del módulo máximo aplicado a f se tiene:

$$\max_{z \in \overline{D}} \{|f(z)|\} = \max_{z \in \partial D} \{|f(z)|\} = c$$

Luego:

$$|f(z)| \leq c \quad \forall z \in D \quad (4)$$

Reuniendo (3) con (4), se deduce que

$$|f(z)| = c \quad \forall z \in D$$

lo que significa que $|f|$ tiene un máximo local en todos los puntos de D . Por el principio del módulo máximo esto implica que $f = k$ constante en D .

Luego $f(z) - k = 0 \quad \forall z \in D$. Por el principio de prolongación analítica $f(z) - k = 0 \quad \forall z \in \Omega$, lo que prueba que f es constante en Ω como queríamos. $\square$

Lema 10.1.3. Lema de Schwartz. Sea $D = D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Sea $f \in H(D)$ tal que

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in D$$

Entonces:

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D, \quad |f'(0)| \leq 1$$

Además, si $|f'(0)| = 1$ ó si existe algún $z \in D \setminus \{0\}$ para el cual se cumple la igualdad $|f(z)| = |z|$, entonces

$$f(z) = cz \quad \forall z \in D$$

donde c es una constante con módulo 1.

Demostración:

Sea la función auxiliar $g(z)$ definida para todo $z \in D$ del siguiente modo:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \quad \text{si } z \neq 0, \quad g(0) = f'(0) \quad (1)$$

La función g es analítica en $D \setminus \{0\}$ porque es cociente de funciones analíticas con el denominador que no se anula. Además es continua en $z = 0$ porque $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} [f(z) - f(0)]/z = f'(0) = g(0)$. Entonces la función g es analítica en D porque es analítica en $D \setminus \{0\}$ y es continua en $z = 0$. En efecto, por el teorema de Cauchy-Goursat extendido (ver corolario 6.3.6,) g analítica en $D \setminus \{0\}$ tiene una extensión analítica a D . Esta extensión analítica es por lo tanto una extensión continua, y entonces coincide en $z = 0$ con el valor que tiene $g(0)$.

Calculando el máximo de $|g|$ en $\overline{D_r}$, donde $0 < r < 1$ y $D_r = D_r(0)$; y aplicando el principio del módulo máximo (corolario 8.1.3) a g , se obtiene:

$$\max_{z \in \overline{D_r}} \{|g(z)|\} = \max_{z \in \partial D_r} \{|g(z)|\} = \max_{z \in \partial D_r} \left\{ \frac{|f(z)|}{|z|} \right\} \leq \frac{1}{r}$$

Haciendo $r \rightarrow 1$ se deduce:

$$\sup_{z \in D} \{|g(z)|\} \leq 1 \quad (2)$$

Combinando (1) con (2) se deduce:

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D, \quad |f'(0)| \leq 1$$

Además si $|f'(0)| = 1$ o si para algún $z_0 \in D \setminus \{0\}$ fuera $|f(z_0)| = |z_0|$ entonces, usando (1) se tendría

$$|g(z)| = 1 \quad \text{para } z = 0 \text{ o para } z = z_0 \in D \quad (3)$$

En ambos casos, usando (2) se deduce que $|g|$ tiene un máximo local en $z = 0$ o en $z = z_0$. Por el principio del módulo máximo, esto implica

$$g(z) = c \quad \forall z \in D \quad (4)$$

donde c es una constante. Combinando (3) con (4) se deduce que

$$|c| = 1$$

Luego, usando (1) y (4), y usando la condición que $f(0) = 0$, se deduce que

$$f(z) = cz \quad \forall z \in D \quad \square$$

10.2. Aplicaciones de otros teoremas.**Del teorema de Liouville.**

Ejercicio 10.2.1. En lo que sigue, a y b son dos complejos fijos diferentes, $[a, b]$ es el segmento que une a con b , y $D = D_1(0)$ es el disco unitario, es decir el disco abierto con centro en el origen y radio 1.

a) Encontrar una función analítica g que transforme biyectivamente $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ en D .

b) Demostrar el siguiente teorema:

Si una función f entera omite un segmento (es decir el recorrido de f está contenido en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$), entonces f es constante.

Nota: En realidad vale un resultado más fuerte, que se llama **Teorema pequeño de Picard**, cuyo enunciado es el siguiente:

Si f es una función entera que omita dos puntos diferentes, entonces f es constante.

En el ejercicio anterior no se pide demostrar el teorema pequeño de Picard sino el resultado más débil, asumiendo que el recorrido de f omita no solo dos puntos diferentes, sino todo el segmento que los une.

Resolución del ejercicio 10.2.1.

Parte a) Construyamos g como la composición de

- Una transformación de Moebius $w = w(z)$ que lleve el segmento $[a, b]$ sobre la semirrecta $S = \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. Toda transformación de Moebius es biyectiva del plano compactificado $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en sí mismo. Por lo tanto esta transformación de Moebius (que habrá muchas) lleva uno de los puntos a o b a ∞ , y restringida a $C \setminus [a, b]$ será analítica y llevará biyectivamente $C \setminus [a, b]$ a $C \setminus S$
- La función $v.p.\sqrt{w}$, valor principal de la raíz cuadrada de w , definida en el párrafo 1.2.3, que lleva analíticamente $C \setminus S$ al semiplano $\mathbb{I} = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ en forma biyectiva.
Esta función está definida así: dado $w \notin S$, y considerado su argumento $\theta(w) = \operatorname{Arg}_{(-\pi, \pi)}(w)$, el complejo $v.p.\sqrt{w}$ tiene como módulo $\sqrt{|w|}$ (aquí $\sqrt{|w|}$ es la raíz cuadrada real de un número real positivo, que es un número real positivo bien definido), y tiene como argumento $\theta(w)/2$. Entonces el argumento del complejo $v.p.\sqrt{w}$ está comprendido en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Eso quiere decir que la imagen de la función $v.p.\sqrt{w}$ aplicada al conjunto $C \setminus S$ es el semiplano derecho $\mathbb{I}$ de todos los complejos que tienen parte real positiva.
- Una transformación de Moebius $u = u(z)$ que lleve el semiplano $\mathbb{I}$ al disco unitario D (hay muchas).

La función g buscada finalmente será la composición

$$g(z) = u\left(v.p.\sqrt{w(z)}\right) \quad \forall z \in C \setminus [a, b]$$

Operando de esa manera, una tal función g se obtiene así:

1. Busco la única $w = w(z)$ de Moebius que cumple

$$w(a) = 0, \quad w((a+b)/2) = -1, \quad w(b) = \infty$$

Resulta:

$$w(z) = \frac{z-a}{z-b} \quad \forall z \in C \setminus [a, b] \quad (1)$$

$$w : C \setminus [a, b] \leftrightarrow C \setminus S, \quad \text{donde } S = \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

Nota: Podría haberse elegido otra combinación para construir $w = w(z)$, por ejemplo que lleve b al cero, a al infinito y un punto intermedio cualquiera a elegir en el interior del segmento $[a, b]$, al punto -1 . En ese caso se habría obtenido otra transformación de Moebius $w = w(z)$ que también serviría a los fines propuestos, porque llevaría el segmento $[a, b]$ a la semirrecta S .

2. Elijo alguna transformación analítica que lleve biunívocamente $\mathbb{C} \setminus S$ a algún semiplano abierto $\mathbb{H}$. Por ejemplo, como fue explicado más arriba, la función

$$v.p.\sqrt{w}, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus S, \quad \text{donde } S = \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \quad (2)$$

cumple:

$$v.p.\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus S \leftrightarrow \mathbb{H}, \quad \text{donde } \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

3. Busco alguna transformación de Moebius $u = u(z)$ que lleve el eje vertical imaginario a la circunferencia de centro 0 y radio 1, y que lleve el semiplano derecho $\mathbb{H}$ al interior del círculo D .

Para eso elijo tres puntos diferentes en la recta (uno puede ser ∞), que estén ordenados de modo de dejar el semiplano $\mathbb{H}$ por ejemplo a la derecha, y le hago corresponder tres puntos distintos en la circunferencia, que estén ordenados de modo de dejar el interior del círculo del mismo lado (es decir a la derecha). Por ejemplo:

$$u(0) = -1, \quad u(i) = i, \quad u(\infty) = 1 \quad \Rightarrow \quad u(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad (3)$$

$$u : \mathbb{H} \leftrightarrow D$$

Construimos

$$g(z) = u\left(v.p.\sqrt{w(z)}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$$

Sustituyendo (1), (2) y (3), resulta:

$$g(z) = \frac{v.p.\sqrt{(z-a)/(z-b)} - 1}{v.p.\sqrt{(z-a)/(z-b)} + 1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus [a, b] \quad \square$$

Parte b) Sea f entera, tal que $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus [a, b]$. Considero la composición

$$h(z) = g(f(z)), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

donde

$$g : \mathbb{C} \setminus [a, b] \leftrightarrow D$$

es la función analítica y biyectiva construida en la parte a).

La función h es analítica en todo el plano complejo, porque es composición de una función entera f con una función analítica g en un abierto que contiene al recorrido de f .

El recorrido de h está contenido en el recorrido de g , por lo tanto está contenido en el disco unitario D . Eso significa que

$$|h(z)| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Luego h es entera y acotada, y por el teorema de Liouville, (ver teorema 8.2.3), $h(z)$ es constante igual a c , para todo $z \in \mathbb{C}$.

Como g es biyectiva, se tiene:

$$h(z) = g(f(z)) \Rightarrow f(z) = g^{-1}(h(z)) = g^{-1}(c) = a \text{ constante} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad \square$$

Consecuencias de las desigualdades de Cauchy. Una consecuencia de las desigualdades de Cauchy es el resultado sobre el radio de convergencia de las series de potencias de funciones analíticas en Ω , enunciado en el teorema 8.2.5.

Otra consecuencia se enuncia en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 10.2.2. Caracterización de polinomios por su crecimiento en módulo.

Sea f una función entera. Probar que f es un polinomio si y solo si existen dos números reales no negativos A y B y un número natural $k \geq 0$ tales que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Directo: Si $f(z)$ es un polinomio de grado $k \geq 0$, entonces:

$$f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_k \neq 0$$

Luego, para $z \neq 0$:

$$|f(z)| \leq |z|^k \left| a_k + \frac{a_{k-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k} \right| \quad (1)$$

Cuando $z \rightarrow \infty$ se cumple

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| a_k + \frac{a_{k-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k} \right| = |a_k|$$

Entonces esa expresión está acotada en el exterior del disco $D_R(0)$ para cierto $R > 0$

$$\left| a_k + \frac{a_{k-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k} \right| \leq B \quad \forall z \text{ tal que } |z| \geq R$$

Sustituyendo en (1) se tiene:

$$|f(z)| \leq B|z|^k \quad \forall z \text{ tal que } |z| \geq R \quad (2)$$

Por otra parte $|f(z)|$ es continua, luego está acotada en el compacto $\{|z| \leq R\}$, es decir:

$$|f(z)| \leq A \quad \forall z \text{ tal que } |z| \leq R \quad (3)$$

Observemos que $B|z|^k \leq A + B|z|^k$ y que $A \leq A + B|z|^k$ (porque A y B son reales no negativos). Luego en (2) y (3) se puede acotar con $A + B|z|^k$ (en vez de $B|z|^k$ en (2) y en vez de A en (3)). Se deduce entonces de (2) y (3) que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad \square$$

Recíproco: Sea f entera tal que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Para probar que f es un polinomio basta probar que la derivada $k+1$ -ésima $f^{(k+1)}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ pues entonces la derivada k -ésima es una constante c_k ; luego la derivada $k-1$ -ésima es de la forma $c_k z + c_{k-1}$. Luego la derivada $k-2$ -ésima es de la forma $(c_k/2)z^2 + c_{k-1}z + c_k$; y así sucesivamente hasta llegar a la función $f(z)$ sin derivar, que queda entonces un polinomio en z .

Para probar que la derivada $k + 1$ -ésima de f es idénticamente nula, fijemos un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y usemos las desigualdades de Cauchy (ver teorema 8.2.1):

$$|f^{(k+1)}(z_0)| \leq \frac{(k+1)! M_R}{R^{k+1}} \quad (6)$$

donde R es cualquier real positivo, y

$$M_R = \max_{z \in \overline{D_R(z_0)}} |f(z)| \leq \max_{z \in \overline{D_R(z_0)}} (A + B|z|^k) = A + B(|z_0| + R)^k \quad (7)$$

En la última desigualdad de (7) se usó (5), y en la última igualdad de (7) se usó que el máximo de $|z|$ en $\overline{D_R(z_0)}$ es $|z_0| + R$. Sustituyendo (7) en (6), se deduce que

$$|f^{(k+1)}(z_0)| \leq \frac{(k+1)! (A + B(|z_0| + R)^k)}{R^{k+1}} \quad (8)$$

Haciendo tender R a $+\infty$ en (8), con z_0, A, B y k constantes, (se observa que la derivada $k + 1$ -ésima de f en z_0 , es independiente del valor de $R > 0$ elegido para usar la desigualdades de Cauchy), se obtiene:

$$|f^{(k+1)}(z_0)| = 0 \Rightarrow f^{(k+1)}(z_0) = 0$$

Como z_0 fijo era cualquier punto del plano complejo, se deduce que $f^{(k+1)}$ es idénticamente nula, como queríamos demostrar. $\square$

Consecuencia del teorema del índice.

La siguiente es una fórmula parecida a la fórmula integral de Cauchy para funciones analíticas, pero que vale para funciones continuas:

Ejercicio 10.2.3. Sea f continua en el abierto Ω y sea $z_0 \in \Omega$. Probar que

$$f(z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

donde $\partial D_r(z_0)$ indica la circunferencia de radio r y centro en z_0 , recorrida una sola vez en sentido antihorario.

Resolución: Basta demostrar que tiende a cero cuando $r \rightarrow 0$ la siguiente diferencia:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \text{Ind}_{\partial D_r(z_0)}(z_0) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{f(z_0)}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \quad (1) \end{aligned}$$

Primero hemos usado que $\text{Ind}_{\partial D_r(z_0)}(z_0) = 1$, y después el teorema del índice.

Dado $\epsilon > 0$ como $f(z)$ es continua en $z = z_0$, sea $\delta > 0$ tal que:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

En particular si $0 < r < \delta$ y si $z \in \partial D_r(z_0)$ entonces se cumple $|z - z_0| < \delta$ lo que implica la desigualdad de arriba. En conclusión:

$$0 < r < \delta, \quad z \in \partial D_r(z_0) \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad (2)$$

Acotemos entonces la última integral de la igualdad (1), usando (2):

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{r} |dz| < \frac{\epsilon}{2\pi r} \int_{\partial D_r(z_0)} |dz| = \epsilon, \quad \text{si } 0 < r < \delta \end{aligned}$$

La desigualdad anterior, por definición de límite prueba que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

Luego, usando (1) se deduce que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \quad \square$$

10.3. Teoremas de la función inversa y forma local de las transformaciones analíticas.

El siguiente teorema afirma que si la derivada de una función analítica f es no nula en un punto, entonces existe una función inversa *local*, que es también analítica. Pero esto no significa que f tenga que ser invertible. En efecto, aunque la derivada $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$, la función f puede no ser invertible de Ω a $f(\Omega)$, aunque lo sea de algún disco $D_r(a)$ a su imagen $f(D_r(a))$, para cada $a \in \Omega$.

Por ejemplo la función exponencial $\exp(z) = e^z$ es analítica en todo el plano complejo con derivada que no se anula nunca, pero no es invertible (no existe función inversa $\exp^{-1}$ que vaya del recorrido $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de la función $\exp$ a su dominio $\mathbb{C}$). Esto se debe a que e^z no es inyectiva: z y $z + 2k\pi i$ con k número entero cualquiera, tienen la misma imagen $e^z = e^{z+i2k\pi}$.

Sin embargo, fijemos un punto $a \in \mathbb{C}$ y un disco $D_r(a)$ que no corta a las rectas horizontales $y = \text{Im}(a) + \pi i$ ni $y = \text{Im}(a) - \pi i$ (hacer un dibujo). La función e^z restringida a este disco es inyectiva (es decir dos puntos diferentes de ese disco tienen correspondientes diferentes por la función e^z). Luego es biyectiva sobre su imagen V , y existe una función inversa local. Esta función inversa es la restricción al abierto V de la rama del logaritmo $\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}$ donde $\theta_0 = -\pi + \arg(a)$.

En resumen:

Nota 10.3.1. Aunque $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, la función f NO es necesariamente inyectiva, y NO es necesariamente invertible.

Teorema 10.3.2. Teorema de la función inversa local. Si $f \in H(\Omega)$ cumple $f'(a) \neq 0$ para algún $a \in \Omega$ entonces existe un entorno $D_r(a) \subset \Omega$ y un abierto $V = f(D_r(a))$ tal que f lleva biyectivamente $D_r(\Omega)$ a V y la función inversa f^{-1} es analítica en V teniendo como derivada:

$$f^{-1}'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in D_r(a)$$

Demostración: Consideremos las partes real e imaginaria u y v de $f = u + iv$. La derivada $f'(z)$ se expresa como

$$f' = u_x - iv_y$$

Como $f'(a) \neq 0$ y f' es continua, tenemos $f'(z) \neq 0$ en un entorno de $z = a$. Luego

$$u_x^2 + u_y^2 \neq 0 \quad (1)$$

Calculemos el Jacobiano de la transformación de dos variables reales (x, y) a dos variables reales (u, v) mediante el siguiente determinante, y apliquemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y = u_x u_x - (-u_y) u_y = u_x^2 + u_y^2$$

Usando (1) se tiene que el jacobiano $J \neq 0$ en un entorno de $z = a$. Aplicando el teorema de la función inversa para funciones de dos variables de clase C^1 , existe un entorno abierto $D_r(a)$ y un entorno abierto V de $f(a)$ tal que f lleva biyectivamente $D_r(a)$ en V y la función inversa f^{-1} es diferenciable en todo punto de V . Por lo tanto f^{-1} es continua. Aplicando el teorema 2.1.12, se deduce que la función inversa local f^{-1} es analítica en V y tiene por derivada

$$f^{-1}'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in D_r(a) \quad \square$$

Ejercicio 10.3.3. Rama del logaritmo definida en simplemente conexos.

Sea D un abierto simplemente conexo (por ejemplo un disco abierto). Probar que si $f \in H(D)$ y $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$ entonces existe $h \in H(D)$ tal que

$$e^{h(z)} = f(z) \quad \forall z \in D$$

Nota: A esta función $h(z)$ se la llama rama analítica del logaritmo de $f(z)$ y se la denota como $\text{Log}(f(z))$. La función $h(z)$ no es única, ya que dada una $h(z)$ que cumple las condiciones del ejercicio 10.3.3, si se le suma $2k\pi i$ con k número entero cualquiera, se obtiene otra función $h(z)$ que también cumple las condiciones requeridas.

Resolución del ejercicio 10.3.3:

Consideremos la función $f'(z)/f(z)$. Es analítica en D porque es el cociente de dos funciones analíticas con el denominador que no se anula. El conjunto D es simplemente conexo. Luego, por el corolario 7.1.4 del teorema de Cauchy, existe una primitiva $G(z)$ de la función $f'(z)/f(z)$ en D . Consideremos la función $H(z) = e^{G(z)}/f(z)$. Es analítica en D porque es la composición de funciones analíticas y el cociente de funciones analíticas con el denominador que no se anula. Calculemos la derivada de H :

$$H'(z) = e^{G(z)} \left(\frac{G'(z)}{f(z)} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \right) = e^{G(z)} \left(\frac{f'(z)}{f^2(z)} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \right) = 0 \quad \forall z \in D$$

Luego H es igual a una constante k en D . Determinemos la constante k :

$$H(a) = \frac{e^{G(a)}}{f(a)} = k \neq 0$$

Entonces se obtuvo:

$$H(z) = \frac{e^{G(z)}}{f(z)} = k \neq 0 \quad \forall z \in D \quad (1)$$

Elijamos un número b constante cualquiera tal que $e^b = k$ (existen infinitos posibles b porque $k \neq 0$). Definamos

$$h(z) = G(z) - b$$

$h \in H(D)$ porque G es analítica y b es una constante. Verifiquemos que h cumple las condiciones deseadas:

$$e^{h(z)} = e^{G(z)-b} = e^{G(z)}e^{-b} = \frac{e^{G(z)}}{k} = f(z) \quad \forall z \in D$$

En la última igualdad se usó (1). Hemos construido una función analítica $h(z)$ en el disco D tal que $e^{h(z)} = f(z) \quad \forall z \in D$, como queríamos. $\square$

Ejercicio 10.3.4. Forma local de las funciones analíticas:

Las funciones analíticas son localmente “traslados de z^k ”.

Sea f analítica en la región Ω y no constante; y sea $a \in \Omega$. Probar que existe un disco abierto D con centro en a contenido en Ω , una función analítica φ en D tal que $\varphi'(a) \neq 0$, $\varphi(a) = 0$, y un número $k \geq 1$ tales que:

$$f(z) - f(a) = (\varphi(z))^k \quad \forall z \in D \quad (1)$$

Además $k \geq 1$ indica el lugar del primer coeficiente $a_k \neq 0$ del desarrollo en serie de potencias de $f(z) - f(a)$ y cumple:

$$f(z) - f(a) = (z - a)^k g(z) \quad \forall z \in D$$

donde $g(z)$ es una función analítica tal que $g(a) \neq 0$.

Definición 10.3.5. Orden o multiplicidad de un cero. Al número $k \geq 1$ que cumple las condiciones del ejercicio 10.3.4, se lo llama *orden o multiplicidad de a* como cero de la función $f(z) - f(a)$.

Nota: La interpretación de la igualdad (1) en el ejercicio 10.3.4 es como sigue:

La función $\varphi(z)$, como tiene derivada no nula en a , tiene derivada no nula en un entorno de a y es localmente invertible (ver teorema 10.3.2), con inversa local analítica. Entonces puede interpretarse φ meramente como un cambio de variable, que lleva la variable original z , analíticamente y en forma biyectiva, a una nueva variable $z_2 = \varphi(z)$. Con esa interpretación $(\varphi(z))^k$ es z_2^k , o sea la función potencia k -ésima donde $k \geq 1$ es fijo. Siendo $f(z) = f(a) + z_2^k$ con $f(a) = c$ constante, resulta $f(z)$ igual a la composición de la función potencia k -ésima con una traslación (de vector c). Toda función analítica es entonces, dicho en forma rápida y poco precisa, localmente igual al “traslado de la función potencia k -ésima”. Con esa frase queremos resumir el resultado del teorema a probar en este ejercicio.

Consideremos el desarrollo en serie de potencias de f centrado en a en un cierto disco D :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

Tenemos $a_0 = f(a)$. Tomando a_k el primer coeficiente a partir de a_1 que no sea nulo, resulta:

$$f(z) - f(a) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^{n-k} \quad a_k \neq 0$$

Llamando $g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^{n-k}$ resulta g analítica en el disco D (porque es la suma de una serie de potencias), y además $g(a) = a_k \neq 0$. En resumen:

$$f(z) - f(a) = (z-a)^k g(z) \quad \forall z \in D, \quad g \in H(D), \quad g(a) \neq 0 \quad (1)$$

Como $g(a) \neq 0$, entonces $g(z) \neq 0$ en algún entorno de a . Sustituyendo el disco D por un disco más pequeño centrado en a , tal que $g(z) \neq 0$ en él (y volviendo a llamar D a ese disco más pequeño), se tiene:

$$g(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$$

Aplicando lo demostrado en el ejercicio 10.3.3, existe una función $h \in H(D)$ tal que

$$e^{h(z)} = g(z) \quad \forall z \in D \quad (2)$$

Tomemos

$$\varphi(z) = (z-a)e^{h(z)/k} \quad \forall z \in D \quad (3)$$

φ es analítica en D porque es la composición de la exponencial con una función analítica $h(z)/k$ (recordar que k es constante mayor o igual que 1), y luego multiplicada por otra función analítica $(z-a)$.

Juntando (1), (2) y (3), resulta:

$$f(z) - f(a) = (z-a)^k e^{h(z)} = (z-a)^k \left(e^{h(z)/k} \right)^k = \left((z-a)e^{h(z)/k} \right)^k = (\varphi(z))^k \quad \forall z \in D$$

La última es la igualdad de la tesis que queremos probar.

Solo resta probar que $\varphi'(a) \neq 0$. En efecto, usando (3)

$$\varphi'(z) = e^{h(z)/k} + (z-a)e^{h(z)/k} \frac{h'(z)}{k}$$

Para $z = a$, usando (2) y el final de (1) se deduce:

$$|\varphi'(a)| = |e^{h(a)/k}| = \sqrt[k]{|e^{h(a)}|} = \sqrt[k]{|g(a)|} \neq 0 \quad \square$$

Nota: La raíz k -ésima que se toma en la igualdad anterior es en los reales positivos que está siempre bien definida. No es raíz k -ésima compleja.

Ejercicio 10.3.6. Probar que si $f \in \Omega$ es inyectiva entonces

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$$

y para todo $a \in \Omega$ es $k = 1$ el orden o multiplicidad de a como cero de la función $f(z) - f(a)$.

Sea $a \in \Omega$ un punto cualquiera, que dejamos fijo. Hay que probar que $f'(a) \neq 0$. Considerando los coeficientes a_n del desarrollo en serie de potencias de f centrado en a , y recordando que

$$a_1 = f'(a)$$

basta probar que $a_1 = 0$. Por lo visto en el ejercicio que muestra que f es localmente igual al “trasladado de z^k ” (ejercicio 10.3.4), hay que probar que $k \geq 1$, donde k es el primer natural positivo tal que $a_k \neq 0$, que coincide con el orden de a como cero de la función $f(z) - f(a)$.

Supongamos por absurdo que $k \geq 2$.

Aplicamos el resultado del ejercicio del “trasladado de z^k ” (ejercicio 10.3.4). En un cierto disco D , entorno del punto a , existe una función analítica φ tal que $\varphi'(a) \neq 0$, $\varphi(a) = 0$ y que cumple:

$$f(z) - f(a) = (\varphi(z))^k \quad \forall z \in D \quad (1)$$

Aplicando el teorema 10.3.2, de la desigualdad $\varphi'(a) \neq 0$ se deduce que φ es biyectiva de un cierto entorno D del punto a a un cierto abierto $V = \varphi(D)$ que contiene $\varphi(a) = 0$; es decir $\varphi : D \mapsto \varphi(D)$ tiene inversa local, que es $\varphi^{-1} : \varphi(D) \mapsto D$.

Elijamos $z_1 \in D$, $z_1 \neq a$. Consideremos $w_1 = \varphi(z_1)$. Como φ es inyectiva en D y $\varphi(a) = 0$, se deduce $w_1 \neq 0$. Tomemos $w_2 = w_1 e^{i2\pi/k}$. Si $k \geq 2$, entonces $w_2 \neq w_1$. Sea $z_2 = \varphi^{-1}(w_2)$. Como φ^{-1} también es inyectiva, se cumple $z_2 \neq z_1$. En resumen, tenemos:

$$z_2 \neq z_1 \in D, \quad \varphi(z_2) = w_2 = w_1 e^{i2\pi/k} = \varphi(z_1) e^{i2\pi/k} \quad (2)$$

Reuniendo (1) con (2) se cumple:

$$z_2 \neq z_1 \in D, \quad f(z_2) - f(a) = \varphi(z_2)^k = \varphi(z_1)^k \left(e^{i2\pi/k} \right)^k = \varphi(z_1)^k e^{i2\pi} = \varphi(z_1)^k = f(z_1) - f(a)$$

Luego:

$$z_2 \neq z_1 \in D, \quad f(z_2) - f(a) = f(z_1) - f(a) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$$

Lo anterior muestra que f no es inyectiva, lo que es absurdo porque contradice la hipótesis. $\square$

Teorema 10.3.7. Teorema de la función inversa global. *Sea $f \in H(\Omega)$ inyectiva. Entonces*

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$$

y $f : \Omega \mapsto f(\Omega)$ es invertible con inversa analítica $f^{-1} : f(\Omega) \mapsto \Omega$ en el abierto $f(\Omega)$. Además la derivada de la función inversa es:

$$f^{-1}'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in \Omega$$

Además para todo $a \in \Omega$ es $k = 1$ el orden de a como cero de la función $f(z) - f(a)$.

Demostración: En el ejercicio 10.3.6, se probó que $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$. Entonces, aplicando el teorema de inversa local (teorema 10.3.2), se deduce que f es localmente invertible para todo punto $a \in \Omega$, con inversa local analítica $f_a^{-1} : f(D(a)) \mapsto D(a)$, donde $D(a)$ es un entorno abierto de a y $f(D(a))$ un entorno abierto de $f(a)$.

El recorrido $f(\Omega)$ es abierto, porque cada $f(a)$ en él está en el entorno $f(D(a))$, abierto y contenido en $f(\Omega)$.

Por hipótesis, f es inyectiva en Ω . Cualquier función f inyectiva de Ω a $f(\Omega)$, es invertible. (Porque cualquier función es sobreyectiva sobre su recorrido).

La inversa $f^{-1} : f(\Omega) \mapsto \Omega$, como es la única, cuando se la restringe a $f(D(a))$ para cualquier punto $a \in \Omega$, coincide con la inversa local f_a^{-1} que sabemos que es analítica. Luego la inversa global f^{-1} es analítica.

Aplicando a cada $z \in \Omega$ la última igualdad del teorema 10.3.2 se deduce:

$$f^{-1}'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in \Omega \quad \square$$

10.4. Transformaciones del disco unitario en sí mismo.

Sea $D = D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el *disco unitario* abierto. En esta subsección estudiaremos las transformaciones analíticas que llevan el disco unitario D en sí mismo (aunque el recorrido no sea todo D).

Los siguientes resultados ya probados son aplicables en particular a estas transformaciones:

- **Lema de Schwartz.** Ver lema 10.1.3.
- **Existencia de ceros.** Ver ejercicio 10.1.2.

Ejercicio 10.4.1. Transformaciones de Moebius del disco unitario en sí mismo.

Sea α un complejo constante tal que $|\alpha| < 1$. Sea φ_α la siguiente transformación de Moebius:

$$\varphi_\alpha = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

- a) Probar que $\varphi_\alpha \in H(D)$, $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$, $\varphi_\alpha(0) = -\alpha$.
- b) Probar que φ_α es biyectiva de D en D y de ∂D en ∂D , con función inversa

$$\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$$

- c) Probar que

$$\varphi_\alpha'(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}, \quad \varphi_\alpha'(0) = 1 - |\alpha|^2$$

Resolución: Parte a): La transformación de Moebius φ_α es analítica para todo punto z que no anule el denominador, pues es el cociente de dos funciones analíticas. Entonces es analítica para todo $z \neq 1/\bar{\alpha}$. Como $|1/\bar{\alpha}| = 1/|\alpha| > 1$ entonces es analítica para todo $z \in D$. Es inmediato verificar que $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$, $\varphi_\alpha(0) = -\alpha$.

Parte b): La transformación de Moebius φ_α es biyectiva del plano compactificado $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en sí mismo. Entonces es biyectiva de D en la imagen de D y de ∂D en la imagen de ∂D . Para probar que es biyectiva de D en D y de ∂D en ∂D basta probar entonces que la imagen de ∂D es ∂D y que la imagen de D es D .

Primero verifiquemos que $\varphi_\alpha(\partial D) \subset \partial D$:

Sea $z \in \partial D$, es decir $|z| = 1$. Probemos que $\varphi_\alpha(z) \in \partial D$, es decir que $|\varphi_\alpha(z)| = 1$:

$$|z| = 1 \Rightarrow |\varphi_\alpha(z)| = \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = |\bar{z}| \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = \left| \frac{z\bar{z} - \bar{z}\alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = \left| \frac{1 - \alpha\bar{z}}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = 1 \quad (1)$$

El módulo del último cociente en la igualdad (1) es 1 porque el numerador es el conjugado del denominador, y entonces tienen el mismo módulo.

Como φ_α es una transformación de Moebius, lleva la circunferencia ∂D a una circunferencia o a una recta. En (1) probamos que lleva la circunferencia ∂D dentro de sí misma. Entonces la lleva a sí misma. Hemos probado entonces que la imagen de la circunferencia ∂D es sí misma.

Ahora probemos que la imagen del disco D es el mismo disco D . Como φ_α es una transformación de Moebius, lleva el interior D de la circunferencia ∂D a una de las dos regiones del plano complejo que tienen como frontera ∂D . Como para $0 \in D$ se cumple $\varphi_\alpha(0) = -\alpha \in D$, entonces la imagen de D es la única región del plano complejo que contiene a $-\alpha$ y que tiene como frontera ∂D : esto es D . Hemos probado que la imagen de D es D .

Por lo explicado antes, esto basta para probar que φ_α es biyectiva de D en sí mismo. Por lo tanto existe función inversa φ_α^{-1} de D en D , que es la única función que compuesta con φ_α da la identidad.

Para probar que la función inversa de φ_α es $\varphi_{-\alpha}$ basta verificar que

$$\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z)) = z \quad \forall z \in \overline{D} \quad (\text{a probar})$$

En efecto

$$\begin{aligned} \varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z)) &= \varphi_\alpha \left(\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right) = \frac{(z - \alpha/1 - \bar{\alpha}z) - (-\alpha)}{1 - (z - \alpha/1 - \bar{\alpha}z)(-\bar{\alpha})} = \\ &= \frac{z - \alpha + \alpha(1 - \bar{\alpha}z)}{1 - \bar{\alpha}z + \bar{\alpha}(z - \alpha)} = \frac{z - |\alpha|^2 z}{1 - |\alpha|^2} = z \end{aligned}$$

Parte c): Calculemos la derivada de $\varphi_\alpha(z)$:

$$\varphi'_\alpha(z) = \frac{(1 - \bar{\alpha}z) + \bar{\alpha}(z - \alpha)}{(1 - \bar{\alpha}z)^2}$$

Sustituyendo $z = \alpha$ y $z = 0$ se obtiene:

$$\varphi'_\alpha(\alpha) = \frac{1 - \bar{\alpha}\alpha}{(1 - \bar{\alpha}\alpha)^2} = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}, \quad \varphi'_\alpha(0) = \frac{1 - \bar{\alpha}\alpha}{1} = 1 - |\alpha|^2 \quad \square$$

Ejercicio 10.4.2. Acotación de la derivada de las transformaciones analíticas del disco unitario en sí mismo.

Sean α y β dos complejos fijos con módulo menor que 1. Sea $f \in H(D)$ tal que $f(D) \subset D$ y $f(\alpha) = \beta$.

a) Probar que

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}$$

b) Probar que la igualdad se da si y solo si existe c constante tal que $|c| = 1$ y

$$f(z) = \varphi_{-\beta}(c\varphi_\alpha(z)) \quad \forall z \in D$$

donde φ_α es la transformación definida en el ejercicio 10.4.1.

Resolución: Tomemos la composición:

$$h(z) = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}(z) \quad (1)$$

Se tiene $h(D) \subset D$ y $h \in H(D)$ porque es composición de funciones analíticas que llevan del disco D en sí mismo. Por el lema de Schwartz (ver lemma 10.1.3), se cumple:

$$h'(0) \leq 1 \quad (2a)$$

y además

$$h'(0) = 1 \Leftrightarrow h(z) = cz \quad \forall z \in D \quad \text{donde } c \text{ es constante tal que } |c| = 1 \quad (2b)$$

Aplicando la regla de la cadena a la ecuación (1) se obtiene:

$$h'(0) = \varphi'_\beta(f(\varphi_{-\alpha}(0))) \cdot f'(\varphi_{-\alpha}(0)) \cdot \varphi'_{-\alpha}(0) = \varphi'_\beta(\beta) \cdot f'(\alpha) \varphi'_{-\alpha}(0) = \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |\beta|^2} f'(\alpha)$$

En la última igualdad se usó el resultado de la parte c) del ejercicio 10.4.1. En definitiva:

$$|h'(0)| = \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |\beta|^2} |f'(\alpha)| \quad (3)$$

Reuniendo (2a) con (3) se deduce que:

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2} \quad (4)$$

Reuniendo (2b) con (3), y usando (1), se deduce que:

$$|f'(\alpha)| = \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2} \Leftrightarrow \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}(z) = cz \quad \forall z \in D \quad \text{donde } c \text{ es constante tal que } |c| = 1 \quad (5)$$

Veamos el significado de la última condición en (5), usando $w = \varphi_{-\alpha}(z)$, $z = \varphi_{-\alpha}^{-1}(w)$:

$$\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}(z) = cz \Leftrightarrow f(w) = \varphi_\beta^{-1}(c\varphi_{-\alpha}^{-1}(w)) = \varphi_{-\beta}(c\varphi_\alpha(w))$$

En la última igualdad se usó la parte b) del ejercicio 10.4.1. Luego la afirmación en (5) es:

$$|f'(\alpha)| = \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2} \Leftrightarrow f(w) = \varphi_{-\beta}(c\varphi_\alpha(w)) \quad \forall w \in D \quad \text{donde } c \text{ es constante tal que } |c| = 1 \quad (6)$$

Las afirmaciones (4) y (6) son la tesis de las partes a) y b) respectivamente, como queríamos probar. $\square$

Ejercicio 10.4.3. Transformaciones invertibles del disco unitario en sí mismo.

a) Sea α un complejo fijo con módulo menor que 1. Sea $f \in H(D)$ inyectiva tal que $f(D) = D$ y $f(\alpha) = 0$ con $\alpha \in D$. Probar que existe c constante, con $|c| = 1$, tal que

$$f(z) = c\varphi_\alpha(z) \quad \forall z \in D$$

donde φ_α es la transformación definida en el ejercicio 10.4.1.

b) Probar que si f es una función entera e inyectiva tal que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$ entonces f tiene un único cero en el disco unitario D y existe una constante c con módulo igual a 1 tal que

$$f(z) = cz \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Parte a): Si f es analítica e inyectiva de D sobre D , entonces por el teorema 10.3.7, f es invertible sobre su imagen D ; $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$, y la función inversa $g = f^{-1} : D \mapsto D$ es analítica y su derivada cumple

$$g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$

Como por hipótesis se tiene $f(\alpha) = 0$, la igualdad anterior aplicada en particular a $z = \alpha$ conduce a:

$$g'(0) = \frac{1}{f'(\alpha)} \quad (1)$$

Aplicando el resultado del ejercicio 10.4.2 a la función f , con $\beta = 0$, donde $\varphi_\beta(z) = \varphi_0(z) = z$, y $\varphi_\alpha = (z - \alpha)/(1 - \bar{\alpha}z)$ son las funciones definidas en el ejercicio 10.4.1; se obtiene:

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1 - |\alpha|^2} \quad (2)$$

y además

$$|f'(\alpha)| = \frac{1}{1 - |\alpha|^2} \Leftrightarrow f(z) = c\varphi_\alpha(z) \quad \forall z \in D \quad \text{donde } c \text{ es constante tal que } |c| = 1 \quad (3)$$

Como por hipótesis se tiene $f(\alpha) = 0$, entonces la función inversa $g = f^{-1} : D \mapsto D$ cumple $g(0) = \alpha$. Aplicando el resultado del ejercicio 10.4.2 a la función g , (intercambiando los roles de α y β en el enunciado del ejercicio 10.4.2 y usando que $\beta = 0$), se obtiene:

$$|g'(0)| \leq 1 - |\alpha|^2 \quad (4)$$

Reuniendo (1) con (4) se deduce:

$$|f'(\alpha)| \geq \frac{1}{1 - |\alpha|^2} \quad (5)$$

Reuniendo (2) con (5) se deduce que:

$$|f'(\alpha)| = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

y usando (3) se deduce que

$$f(z) = c\varphi_\alpha(z) \quad \forall z \in D \quad \text{donde } c \text{ es constante tal que } |c| = 1. \quad \square$$

Parte b): Usando el resultado probado en el ejercicio 10.1.2, existe al menos un cero en el disco D . Este cero es único porque f es inyectiva. Llamándolo α tenemos $f(\alpha) = 0$ con $\alpha \in D$.

Además f lleva inyectivamente el disco D sobre su imagen. f es analítica y biyectiva de todo el plano complejo sobre su imagen. Entonces el borde de la imagen $f(D)$ es la imagen del borde de D . Como la imagen de ∂D es ∂D (por hipótesis), concluimos que la imagen $f(D)$ tiene como borde a la circunferencia ∂D . Entonces $f(D)$ es una de las dos regiones que tienen como borde a la circunferencia ∂D . Como $\alpha \in D$ y $f(\alpha) = 0 \in D$ se deduce que la región imagen $f(D)$ es D .

En resumen tenemos:

$$f(D) = D; \quad f \text{ analítica e inyectiva}; \quad f(\alpha) = 0 \text{ con } \alpha \in D$$

Usando la parte a) se deduce que

$$f(z) = c\varphi_\alpha(z) = \frac{c(z-\alpha)}{1-\bar{\alpha}z} \quad \forall z \in D \quad \text{donde } c \text{ es constante con } |c| = 1$$

Como $f(z)$ coincide con $c\varphi_\alpha(z)$ para todo $z \in D$, la función $f(z) - c\varphi_\alpha(z)$ se anula en D . Por el principio de prolongación analítica, se anula para todo $z \in \Omega$ donde Ω es la región que contiene a D donde ambas funciones f y φ_α sean analíticas. Es decir:

$$f(z) = \frac{c(z-\alpha)}{1-\bar{\alpha}z} \quad \forall z \in \Omega \quad \text{donde } c \text{ es constante con } |c| = 1 \quad (6)$$

Probemos que $\alpha = 0$ y por lo tanto $\Omega = \mathbb{C}$.

Por absurdo, si $\alpha \neq 0$ tomando límite en (6) para $z \rightarrow 1/\bar{\alpha}$ y usando que f es continua porque es entera, se deduce:

$$f(1/\bar{\alpha}) = \lim_{z \rightarrow 1/\bar{\alpha}} \frac{c(z-\alpha)}{1-\bar{\alpha}z} = \infty \quad \text{Absurdo.}$$

Luego tenemos $\alpha = 0$ y la región Ω donde f y φ_α son analíticas, es todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

Sustituyendo $\alpha = 0$ y $\Omega = \mathbb{C}$ en (6) se deduce

$$f(z) = cz \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{donde } c \text{ es constante con } |c| = 1. \quad \square$$

Ejercicio 10.4.4. Caracterización de transformaciones analíticas del disco unitario en sí mismo.

Sea $f \in H(\Omega)$, donde Ω es abierto conexo que contiene al disco unitario cerrado

$$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

a) Probar que si f no es constante y si $|f(z)| = 1 \quad \forall z \in \partial D$ entonces existe una constante M con $|M| = 1$ tal que

$$f(z) = M \prod_{j=1}^m \varphi_{\alpha_j}(z) \quad \forall z \in \Omega$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_m$ son los ceros de f contenidos en D , repetido cada uno tantas veces como su multiplicidad, y φ_{α_j} es la transformación definida en el ejercicio 10.4.1.

b) Probar que si f es entera y cumple $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$, entonces existe una constante c con $|c| = 1$ y un número natural $k \geq 0$ tales que

$$f(z) = cz^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Parte a): Por el resultado del ejercicio 10.1.2, como la función f no es constante, f tiene al menos un cero en D .

La transformación f es analítica en $\Omega \supset \bar{D}$, no constante y transforma ∂D en ∂D por hipótesis. Luego, transforma D en una de las dos regiones que tiene como frontera a ∂D . Como existe $\alpha \in D$ tal que $f(\alpha) = 0 \in D$, entonces f transforma D en D .

Llamemos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_m$ a los ceros de f en D , repetido cada uno tantas veces como su multiplicidad.

Recordar que, por lo visto en la definición 10.3.5, la multiplicidad de un cero α_j de f es el número natural $k_j \geq 1$ tal que

$$f(z) = (z - \alpha_j)^{k_j} g_j(z), \quad \text{donde } g_j \in H(D_r(\alpha_j)), \quad g_j(\alpha_j) \neq 0$$

siendo $D_r(\alpha_j)$ un entorno de radio $r > 0$ del punto α_j .

Luego:

$$\lim_{z \rightarrow \alpha_j} \frac{f(z)}{(z - \alpha_j)^{k_j}} = g_j(\alpha_j) = L_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (1)$$

Construyamos la función auxiliar $g(z)$, definida para todo $z \in \Omega$ tal que $z \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_m$, del siguiente modo:

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^m \varphi_{\alpha_j}(z)} \quad (2)$$

Recordando que $\varphi_{\alpha_j}(z) = (z - \alpha_j)/(1 - \bar{\alpha}_j z)$, consideremos la primera raíz α_1 de f en D , que tiene multiplicidad $k_1 \geq 1$.

En la productoria $\prod_{j=1}^m \varphi_{\alpha_j}(z)$ aparece el factor $(z - \alpha_1)/(1 - \bar{\alpha}_1 z)$ exactamente k_1 veces (en los primeros k_1 factores). Luego, esa productoria se escribe como:

$$\prod_{j=1}^m \varphi_{\alpha_j}(z) = \frac{(z - \alpha_1)^{k_1}}{(1 - \bar{\alpha}_1 z)^{k_1}} \prod_{j=k_1+1}^m \varphi_{\alpha_j}(z), \quad \text{siendo } \alpha_j \neq \alpha_1 \text{ si } j > k_1 \quad (3)$$

donde, por convención, la última productoria es 1 si $m \leq k_1$.

Tomando límite en (2) y usando (3) y (1), se deduce que:

$$\lim_{z \rightarrow \alpha_1} g(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha_1} \frac{f(z)(1 - \bar{\alpha}_1 z)^{k_1}}{(z - \alpha_1)^{k_1}} \cdot \frac{1}{\prod_{j=k_1+1}^m \varphi_{\alpha_j}(z)} = L_1 \cdot \frac{(1 - |\alpha_1|^2)}{\prod_{j=k_1+1}^m \varphi_{\alpha_j}(\alpha_1)} = M_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Se observa que no se anula el denominador a la derecha (para definir el número complejo M_1) porque $\alpha_j \neq \alpha_1$ si $j > k_1$. Además $M_1 \neq 0$ porque $L_1 \neq 0$ y $|\alpha_1| < 1$.

Análogamente para las otras raíces $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ de f en D se obtiene:

$$\lim_{z \rightarrow \alpha_j} g(z) = M_j \neq 0 \quad (4)$$

Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow \alpha_j} (z - \alpha_j)g(z) = 0 \cdot M_j = 0$$

Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat extendido (ver corolario 6.3.6) se deduce que la función g definida en (2) se extiende analíticamente a todo el disco D .

Probemos que $|g(z)| = 1$ para todo z tal que $|z| = 1$. En efecto, usando (2), usando que $f(\partial D) \subset \partial D$ y usando la propiedad (b) del ejercicio 10.4.1 que dice que $\varphi_{\alpha_j}(\partial D) = \partial D$, se deduce que

$$|z| = 1 \Rightarrow |g(z)| = \frac{|f(z)|}{\prod_{j=1}^m |\varphi_{\alpha_j}(z)|} = \frac{1}{1} = 1$$

En resumen tenemos una transformación $g \in H(D)$ tal que $|g(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Usando el resultado del ejercicio 10.1.2, la función g es, o bien constante igual a M (con $|M| = 1$ porque $|g(z)| = 1$ si $|z| = 1$); o bien g tiene algún cero en D .

Probemos que g no tiene ningún cero en D . (Por lo tanto g es constante igual a M con $|M| = 1$.) En efecto: Por absurdo, si $\alpha \in D$ es un cero de g entonces usando (2), α es uno de los ceros de f en D , digamos que es α_j . Entonces aplicando la continuidad de $g(z)$ en $z = \alpha_j$ (porque g es analítica en D), y usando la igualdad (4) se deduce:

$$0 = g(\alpha_j) = \lim_{z \rightarrow \alpha_j} g(z) = M_j \neq 0. \text{ Absurdo.}$$

Esto termina de probar que $g \in H(D)$ no tiene ningún cero en D . Por lo tanto g es constante igual a M con $|M| = 1$. Sustituyendo en (2) se deduce:

$$f(z) = M \prod_{j=1}^m \varphi_{\alpha_j}(z) \quad \forall z \in \Omega, \text{ donde } M \text{ es una constante tal que } |M| = 1 \quad \square$$

Parte b): Si f es entera y es constante igual a c , y además cumple $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$, entonces $|c| = 1$ y se obtiene la tesis que queríamos probar, con $k = 0$:

$$f(z) = c \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{ donde } c \text{ es una constante tal que } |c| = 1.$$

Ahora estudiemos el caso en que f es entera y no constante tal que $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$.

Entonces f cumple todas las hipótesis de la parte a), donde $\Omega = \mathbb{C}$. Luego, usando lo probado en la parte a):

$$f(z) = c \prod_{j=1}^m \varphi_{\alpha_j}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{ donde } c \text{ es una constante tal que } |c| = 1 \quad (5)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_m$ son las raíces de f en el disco unitario, repetida cada una tantas veces como su multiplicidad.

Probemos que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, m$. Por absurdo, si alguna raíz α_j de f en D fuera $\alpha_j \neq 0$ entonces la función $\varphi_{\alpha_j}(z) = (z - \alpha_j)/(1 - \overline{\alpha_j} z)$ no sería analítica en $z = 1/\overline{\alpha_j}$. Por lo tanto, usando (5) la función f no sería analítica en ese punto, contradiciendo la hipótesis de que f es una función entera.

Hemos probado que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, m$. Entonces f tiene en el disco unitario D una única raíz $\alpha = 0$ con multiplicidad $k = m \geq 1$. Sustituyendo en (5), $\alpha_j = 0$, $m = k$ y observando que $\varphi_0(z) = z$ se obtiene

$$f(z) = cz^k \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{ donde } c \text{ es una constante tal que } |c| = 1. \quad \square$$