TERCERA PARTE. SINGULARIDADES Y TEORÍA DE LOS RESIDUOS.

Resumen

Se estudian las singularidades aisladas: evitables, polos y esenciales y se obtiene el desarrollo en serie de Laurent.

Se define la topología de convergencia uniforme en compactos de las funciones analíticas. Se expone un teorema de aproximación de funciones meromorfas por funciones racionales. Se definen las familias normales y se prueba la compacidad secuencial de estas familias.

Se expone la teoría de los residuos para funciones meromorfas, el principio del argumento y el teorema de Rouché. Se dan aplicaciones matemáticas del cálculo de residuos.

11. Síntesis de la segunda parte.

Se suponen conocidos los siguientes conceptos previos desarrollados en las secciones 1, 2, 3.1 y 3.2:

- El plano complejo compactificado $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde un entorno de ∞ se define como $D_{1/R} = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, con $R > 0$.
- En un abierto Ω , una función f es holomorfa si existe en todo punto $z_0 \in \Omega$ el siguiente límite, llamado derivada de f en z_0 :

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

- La integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ de una función continua f en Ω a lo largo de una curva γ , C^1 a trozos en Ω , y sus propiedades.
- Si m un número entero $m \neq -1$, entonces, para toda curva cerrada γ que vaya del punto z_1 al punto z_2 se tiene:

$$\int_{\gamma} (z - a)^m dz = \frac{z_2^{m+1} - z_1^{m+1}}{m + 1}$$

Si la curva γ es cerrada entonces la integral anterior es nula.

- Los conceptos de convergencia puntual, convergencia absoluta y convergencia uniforme de series de funciones de variable compleja.
- La serie geométrica de razón z definida como $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge puntualmente a $1/(1 - z)$ para todo z tal que $|z| < 1$.
- Criterio de la mayorante de Weierstrass: Si $|f_n(z)| \leq A_n$, independiente de z , para todo $z \in K$ y si $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \text{ converge uniformemente y absolutamente en } K$$

- La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en cualquier conjunto compacto K contenido en $D_1(0)$.
- Convergencia uniforme e integración: Si para todo $n \geq 0$ la función f_n es continua en K , y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en K , entonces la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ es continua en K y

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma} f_n(z) dz \right)$$

para cualquier curva C^1 a trozos contenida en K .

11.1. Funciones analíticas.

Los detalles y demostraciones de los resultados incluidos en este resumen se encuentran en las secciones 5 y 6.

Definición 11.1.1. $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice *analítica en el punto* $z_0 \in \Omega$ si existe un disco $D_R(z_0)$, con $R > 0$ tal que:

$$\text{Para todo } z \in D_R(z_0) \cap \Omega : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

⁶ donde la serie de la derecha es convergente puntualmente para todo z fijo en $D_R(z_0)$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0)$ se llama *desarrollo en serie de potencias* centrado en z_0 de la función $f(z)$.

$f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice *analítica en Ω* si es analítica en z_0 para todo $z_0 \in \Omega$.

Nota 11.1.2. Radio de convergencia y fórmula de la raíz n-ésima.

El máximo R tal que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{converge } \forall z \in D_R(z_0)$$

es

$$R = 1 / (\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})$$

La serie de potencias **converge absolutamente** para todo z tal que $|z - z_0| < R$, y **converge uniformemente en todo compacto** $K \subset D_R(z_0)$.

(Por convención, si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ se dice que $R = +\infty$ y $D_R(z_0) = \mathbb{C}$).

Nota 11.1.3. Si f es analítica en $z_0 \in \Omega$ entonces también es analítica en todo los puntos del disco $D_R(z_0)$.

Nota 11.1.4. Si f es analítica en Ω y si R es el radio de convergencia de la serie de potencias centrada en $z_0 \in \Omega$, entonces:

a) Si $D_R(z_0)$ no está contenido en Ω , y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0) \cap \Omega$, entonces se puede extender f analíticamente a $\Omega_1 = \Omega \cup D_R(z_0)$ como la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0)$.

b) Si $D_R(z_0)$ está contenido en Ω el radio R es igual a la distancia de z_0 al complemento de Ω .

⁶Por convención $z^0 = 1$ para todo z , aún abusando de la notación, cuando $z = 0$.

Teorema 11.1.5. Analiticidad de las funciones holomorfas.

Una función f es holomorfa en el abierto Ω si y solo si es analítica en Ω .

Se denota con $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas o lo que es lo mismo analíticas en Ω .

Teorema 11.1.6. Derivabilidad infinita de las funciones analíticas.

Relación entre coeficientes del desarrollo y derivadas de la función.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z) \quad \forall z \in D_R(z_0)$ donde $R > 0$ Se cumple:

a) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \forall z \in D_R(z_0)$.

b) Existen en $D_R(z_0)$ derivadas $f^{(k)}(z)$ (respecto de z) de orden k , para todo natural $k \geq 1$.

c) Se verifica la siguiente relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de f centrado en $z_0 \in \Omega$ y la derivada n -ésima de f en z_0 :

$$a_0 = f(z_0), \quad a_1 = f'(z_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \forall n \geq 0$$

Teorema 11.1.7. Principio de prolongación analítica. Sea f analítica en Ω , donde Ω es abierto conexo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$.

b) Para algún $z_0 \in \Omega$, se cumple $f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k \geq 0$.

c) Existe una sucesión de puntos $z_n \in \Omega$ que converge $z_n \rightarrow z_0 \in \Omega$, tal que para todo $n \geq 1$, $z_n \neq z_0$ y $f(z_n) = 0$.

Nota: La afirmación c) se expresa también diciendo que: Existe un punto de acumulación $z_0 \in \Omega$ del conjunto donde se anula f .

Corolario 11.1.8. Si una función f analítica no es idénticamente nula en una región Ω entonces sus ceros (i.e. puntos donde se anula f) son aislados.

Dicho de otra manera, cada punto z_0 tal que $f(z_0) = 0$ está contenido en algún entorno $D_R(z_0)$ que no contiene otros ceros de f más que z_0 .

Corolario 11.1.9. Si dos funciones analíticas en la región Ω coinciden en un conjunto con un punto de acumulación en Ω entonces ambas coinciden en todo punto de Ω .

Teorema 11.1.10. Funciones analíticas construidas mediante integrales.

Hipótesis) Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función continua. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva. Se define para cada $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ fijo, el valor complejo $g(z_0)$ dado por la integral siguiente:

$$g(z_0) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Tesis) $g(z_0)$ como función de z_0 es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Además la derivada n -ésima de g está dada para todo $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ por la siguiente fórmula integral:

$$g^{(n)}(z_0) = n! \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

11.2. Teoría del índice.

Los detalles y las demostraciones de este párrafo se encuentran en la subsección 5.4.

Definición 11.2.1. Índice de una curva cerrada.

Dada una curva orientada y cerrada cualquiera γ , y dado un punto $z_0 \notin \gamma$, se llama *índice de γ en el punto z_0* , y se denota $Ind_\gamma(z_0)$, a la cantidad entera k neta de vueltas que da γ alrededor de z_0 .

La cantidad de vueltas que da γ alrededor de z_0 está definida con precisión en la sección 5.4, Definición 5.4.1.)

Teorema 11.2.2. Teorema del índice.

Sea γ una curva cerrada cualquiera C^1 a trozos. Para todo $z_0 \notin \gamma$ se cumple:

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

11.3. Teoría de Cauchy.

Los detalles así como las demostraciones de este párrafo se encuentran en las secciones 6 y 7.

Sea un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Teorema 11.3.1. Teorema de Cauchy global.

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω . Entonces

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

Corolario 11.3.2. Otra versión del teorema de Cauchy global. Sea $f \in H(\Omega)$. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas en Ω , ambas con el mismo extremo inicial y con el mismo extremo final. Si γ_1 es homotópica a γ_2 en Ω , entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Teorema 11.3.3. Teorema de Cauchy-Goursat extendido.

Si $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ cumple

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

entonces f puede extenderse holomórficamente a Ω .

Teorema 11.3.4. Fórmula integral de Cauchy global.

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω . Sea $z_0 \in \Omega$ un punto que no pertenece a γ^* . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \cdot Ind_\gamma(z_0)$$

Teorema 11.3.5. Fórmula integral de Cauchy global para las derivadas.

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω . Sea $z_0 \in \Omega$ un punto que no pertenece a γ^* . Entonces

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z_0)$$

El siguiente teorema dice que vale también un recíproco del Teorema de Cauchy, si se supone que la función es continua:

Teorema 11.3.6. Teorema de Morera.

Sea f una función continua en el abierto Ω . Se cumple:

a) $f \in H(\Omega)$ si y solo si

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva cerrada γ que sea homotópica a un punto en Ω .

b) $f \in H(\Omega)$ si y solo si

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

para todo rectángulo $R \subset \Omega$ que tenga lados paralelos a los ejes real e imaginario.

11.4. Consecuencias de la teoría de Cauchy.

Los detalles y demostraciones de este párrafo se encuentran en la sección 8.

Definición 11.4.1. Sea f una función continua en Ω . Se dice que $|f|$ tiene un máximo local en $z_0 \in \Omega$ si existe un disco abierto $D_R(z_0) \subset \Omega$ tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D_R(z_0)$$

Teorema 11.4.2. Principio del módulo máximo. Sea Ω un abierto conexo y sea $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ tiene algún máximo local en Ω entonces f es constante en Ω .

Corolario 11.4.3. Otro enunciado del Principio del módulo máximo.

Sea Ω un abierto conexo. Sea $f \in H(\Omega)$. Sea un disco cerrado $\overline{D} \subset \Omega$, y sea $M = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$.

Si f no es constante en Ω entonces el máximo M en $\overline{D}$ se alcanza solamente en la frontera ∂D (es estrictamente mayor que $|f(z)|$ para todo z en el interior D).

Teorema 11.4.4. Desigualdades de Cauchy.

Sea $f \in H(\Omega)$. Para todo $z_0 \in \Omega$, para todo $R > 0$ tal que $\overline{D_R(z_0)} \subset \Omega$, se cumple

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M(R)}{R^n}$$

donde $M(R) = \max_{z \in \overline{D_R(z_0)}} |f(z)|$

Definición 11.4.5. Una función $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ se llama entera si $f \in H(\mathbb{C})$.

Por ejemplo la función $f(z) = e^z$ es entera. Los polinomios en z son funciones enteras.

Teorema 11.4.6. Teorema de Liouville *Si una función entera está acotada entonces es constante.*

Teorema 11.4.7. Teorema fundamental del Álgebra.

a) *Todo polinomio con coeficientes complejos de grado mayor o igual que 1 tiene alguna una raíz compleja.*

b) *Todo polinomio con coeficientes complejos de grado $k \geq 1$ tiene exactamente k raíces complejas, contada cada una tantas veces como sea su multiplicidad.*

11.5. Lema de Jordan y de deformación de curvas.

Los detalles y demostraciones de esta parte se encuentran en la sección 9.

Para aplicar la teoría de Cauchy y la teoría de Residuos (que se verá en la sección 15), al cálculo de integrales impropias, se utilizan los siguientes lemas, llamados Lema de Jordan y Lemas de Deformación de Curvas.

Lema 11.5.1. Lema de deformación de curvas I.

Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continua. Sea para todo $R > 0$ suficientemente grande $S_R \subset \Omega$ el arco de circunferencia $z = z(t) = Re^{it}$, $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$.

a) Si $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = L$ entonces

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} f(z) dz = iL(\theta_2 - \theta_1)$$

b) Si $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$ entonces

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} f(z) dz = 0$$

Lema 11.5.2. Lema de deformación de curvas II.

Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continua. Sea para todo $R > 0$ suficientemente pequeño $S_R \subset \Omega$ el arco de circunferencia $z = z(t) = Re^{it}$, $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$.

Si $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = L$ entonces

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{S_R} f(z) dz = iL(\theta_2 - \theta_1)$$

Lema 11.5.3. Lema de Jordan.

Si $f(z)$ es una función compleja continua para todo z tal que $|z| \geq R_0$, que cumple

$$|f(z)| \leq K \quad \forall |z| \geq R_0$$

Entonces:

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi K}{s} \quad \forall R \geq R_0$$

donde $s > 0$ es constante y Γ_R es un arco contenido en la semicircunferencia: $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Además si $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ entonces:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z) dz = 0$$