12. Ceros y singularidades aisladas.

12.1. Funciones racionales.

Una función racional es un cociente de dos polinomios no idénticamente nulos, con coeficientes complejos:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Está definida y es holomorfa en todos los puntos del plano complejo que no sean raíces del polinomio $Q(z)$.

Siempre podemos suponer que los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ son primos entre sí, esto es, no tienen raíces comunes. En efecto, si ambos polinomios tienen alguna(s) raíz(es) z_0 en común, dividiendo ambos entre $(z - z_0)$ tantas veces como sea necesario, alguno de ellos, o ambos, deja de tener a z_0 como raíz.

Por el teorema fundamental del Álgebra, cada polinomio tiene tantas raíces $z_1, z_2, \dots, z_n$ como su grado n (repetiendo cada raíz tantas veces como su multiplicidad). Entonces dividiendo sucesivas veces el polinomio entre $z - z_i$ se factoriza el polinomio.

Llamando $z_1, z_2, \dots, z_n$ a las raíces de $P(z)$ (repetiendo cada una tantas veces como su multiplicidad) y llamando $p_1, p_2, \dots, p_m$ a las raíces de $Q(z)$, se obtiene:

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

$$Q(z) = b(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_m)$$

donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$ son los coeficientes de los términos de mayor grado de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ que tienen grado n y m respectivamente. (Alguno de los dos polinomios o ambos puede tener grado 0. Si ambos tienen grado 0, la función racional $P(z)/Q(z)$ es constante.)

Se tiene

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)}{b(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_m)}$$

Extendemos continuamente la función racional $f(z)$ al plano compactificado $\overline{\mathbb{C}}$, definiendo:

$$f(p_i) = \infty = \lim_{z \rightarrow p_i} f(z), \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Además:

$$m > n \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0. \quad \text{Definimos } f(\infty) = 0$$

$$m < n \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \infty. \quad \text{Definimos } f(\infty) = \infty$$

$$m = n \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a}{b} \neq 0. \quad \text{Definimos } f(\infty) = \frac{a}{b}$$

En lo que sigue consideramos la función racional $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios primos entre sí, de grado n y m respectivamente.

Definición 12.1.1. Ceros de una función racional.

Se llaman ceros de la función $f(z) = P(z)/Q(z)$ a las raíces de $P(z)$ y además, si $m > n$ se llama también cero de la función racional a ∞

Se llama orden de un cero $z_i \in \mathbb{C}$ a su multiplicidad como raíz de $P(z)$. Se llama orden de ∞ , cuando es un cero de la función, al número natural positivo $m - n$.

Definición 12.1.2. Polos de una función racional.

Se llaman polos de la función $f(z) = P(z)/Q(z)$ a las raíces de $Q(z)$ y además, si $m < n$ se llama también polo de la función racional a ∞

Se llama orden de un polo $p_i \in \mathbb{C}$ a su multiplicidad como raíz de $Q(z)$. Se llama orden de ∞ , cuando es un polo de la función, al número natural positivo $n - m$.

Proposición 12.1.3. Cantidad de ceros y polos de una función racional.

La cantidad de ceros de la función racional $f(z) = P(z)/Q(z)$ (contado cada uno tantas veces como su orden) es igual a la cantidad de polos (contado cada uno tantas veces como su orden) y es igual a $\max\{m, n\}$.

En efecto, esta proposición se deduce de las definiciones de ceros y polos, discutiendo según $m > n$, $m < n$ y $m = n$.

Proposición 12.1.4. Caracterización de ceros y polos de una función racional.

$z_0 \in \mathbb{C}$ es un cero de $f(z) = P(z)/Q(z)$ con orden $k \geq 1$ si y solo si existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} \notin \{0, \infty\}$$

∞ es un cero de $f(z) = P(z)/Q(z)$ con orden $k \geq 1$ si y solo si existe

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^k f(z) \notin \{0, \infty\}$$

$p_0 \in \mathbb{C}$ es un polo de $f(z) = P(z)/Q(z)$ con orden $k \geq 1$ si y solo si existe

$$\lim_{z \rightarrow p_0} (z - p_0)^k f(z) \notin \{0, \infty\}$$

∞ es un polo de $f(z) = P(z)/Q(z)$ con orden $k \geq 1$ si y solo si existe

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^k} \notin \{0, \infty\}$$

La demostración es una simple verificación que se realiza factorizando los polinomios primos entre sí $P(z)$ y $Q(z)$, y aplicando la definición de ceros y polos.

Hallemos la cantidad de preimágenes de $f(z) = P(z)/Q(z)$, es decir, dado un elemento $c \in \overline{\mathbb{C}}$ encontrar la cantidad de elementos $z \in \overline{\mathbb{C}}$ (contado cada uno con su multiplicidad) tales que:

$$z \in f^{-1}\{c\} \Leftrightarrow f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = c$$

Notación: $f^{-1}\{c\}$ indica el conjunto preimagen por f del elemento c . No indica función inversa. Es solamente el conjunto, que podría hasta ser vacío, formado por todos los elementos del dominio de la función f cuyos correspondientes por f son c .

Si $c = \infty$, entonces por definición de polo, la cantidad de preimágenes de c es la cantidad de polos (contado cada uno con su orden), es decir

$$\#(f^{-1}\{\infty\}) = \text{máx}\{m, n\}$$

Si $c \in \mathbb{C}$, entonces la cantidad de preimágenes de c por f es la cantidad de ceros de la función racional $f(z) - c = (P(z) - cQ(z))/Q(z)$. El numerador y el denominador son primos entre sí porque lo son $P(z)$ y $Q(z)$. Entonces la cantidad de ceros de $f(z) - c$ es igual al máximo M de los grados de $P(z) - cQ(z)$ y $Q(z)$. Si $m \neq n$ entonces $M = \text{máx}\{m, n\}$. Si $m = n$ entonces el numerador $P(z) - cQ(z)$ tiene grado menor o igual que $m = n$; luego $M = \text{máx}\{m, n\}$. Se concluye que

$$\#(f^{-1}\{c\}) = \text{máx}\{m, n\}$$

Lo anterior demuestra la siguiente proposición:

Proposición 12.1.5. Cantidad de preimágenes por una función racional.

Sea $f(z) = P(z)/Q(z)$ una función racional, donde P y Q son polinomios primos entre sí de grados n y m respectivamente.

Para todo $c \in \overline{\mathbb{C}}$ la cantidad de preimágenes por f de c , contada cada una tantas veces como su multiplicidad, es

$$\#(f^{-1}\{c\}) = \text{máx}\{m, n\}$$

12.2. Ceros de las funciones analíticas.

Definición 12.2.1. Ceros de una función analítica.

Un cero de la función analítica $f \in H(\Omega)$ es un punto $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$.

Por el teorema de prolongación analítica, si f no es idénticamente nula en la componente conexa de Ω que contiene a a , entonces el cero a es aislado. (Ver corolario 5.2.2.)

Estudiaremos entonces los ceros de las funciones analíticas que no son idénticamente nulas en una región Ω .

Si a es un cero de f , desarrollando f en serie de potencias centrada en a en un disco $D_R(a) \subset \Omega$ con $R > 0$, como el coeficiente $a_0 = f(a) = 0$ se obtiene:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^n = (z-a)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^{n-k} = (z-a)^k g(z) \quad \forall z \in D_R(a), \quad g(a) = a_k \neq 0 \quad (1)$$

donde $a_k \neq 0$, $k \geq 1$ es el primer coeficiente del desarrollo que no es nulo. Existe tal a_k porque f no es idénticamente nula en $D_R(a)$. Y la función $g(z)$ es igual a la suma de la serie de potencias

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^{n-k} \quad \forall z \in D_R(a)$$

Luego g es analítica en $D_R(a)$ y además $g(a) = a_k \neq 0$.

Por otra parte, dividiendo (1) entre $(z - a)^k$ y tomando límite cuando $z \rightarrow a$ se obtiene que:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z - a)^k} = g(a) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (2)$$

Además, siendo $a_k = f^{(k)}(a)/k!$, el número natural $k \geq 1$ que verifica (1) y (2) es el primer natural para el cual la derivada k -ésima de $f(z)$ en $z = a$ no es nula. (3)

Definición 12.2.2. Orden o multiplicidad de un cero.

Sea a un cero de la función analítica f no idénticamente nula en la región Ω . Se llama *multiplicidad u orden de a* al único entero $k \geq 1$ tal que:

$$f(z) = (z - a)^k g(z)$$

donde $g(z)$ es una función analítica en un disco $D_R(a)$ con $R > 0$, tal que

$$g(a) \neq 0$$

En resumen, el orden $k \geq 1$, o multiplicidad del cero a , es igual a:

- El único entero $k \geq 1$ tal que: $f(z) = (z - a)^k g(z)$, donde $g(z)$ es una función analítica en un disco $D_R(a)$ con $R > 0$, tal que $g(a) \neq 0$. (Por definición.)
- El lugar del primer coeficiente $a_k \neq 0$ del desarrollo en potencias de f centrado en a . (Por (1).)
- El único entero k tal que

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z - a)^k} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (\text{Por (2).})$$

- El primer natural para el cual la derivada k -ésima de $f(z)$ en $z = a$ no es cero. (Por (3).)

En particular, si a es un cero de f entonces $f'(a) \neq 0$ si y solo si el orden o multiplicidad de a es $k = 1$.

Definición 12.2.3. Ceros simples y múltiples.

Un cero aislado se llama simple si tiene orden o multiplicidad igual a 1, y se llama múltiple (doble, triple, etc) si tiene orden o multiplicidad ≥ 2 (2, 3, etc. respectivamente).

12.2.4. Ejemplos.

1. $f(z) = 2e^z - 2$ tiene un cero en cada $z = 2h\pi i$ donde h es entero. La derivada de $f(z)$ en $z = 2h\pi i$ es $2 \neq 0$. Luego, el orden del cero $2h\pi i$ es 1. Considerando el desarrollo en serie de potencias de $f(z)$ centrado en $z = 2h\pi i$ se obtiene:

$$f(z) = 2e^z - 2 = 2e^z e^{-2h\pi i} - 2 = 2e^{z-2h\pi i} - 2 = -2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(z - 2h\pi i)^n}{n!} =$$

$$f(z) = (z - 2h\pi i) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(z - 2h\pi i)^{n-1}}{n!}$$

(Se usó que el desarrollo en serie de potencias de e^u centrado en $u = 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty} u^n/n!$ ya que su coeficiente n -ésimo es $(e^u)^{(n)}|_{u=0}/n! = 1/n!$).

Luego la función analítica $g(z)$ tal que $g(2\pi hi) \neq 0$ y que cumple $f(z) = (z - 2\pi hi)g(z)$ es

$$g(z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - 2h\pi i)^{n-1}}{n!}, \quad g(2\pi hi) = 2$$

Se obtiene

$$\lim_{z \rightarrow 2h\pi i} \frac{2e^z - 2}{z - 2\pi hi} = g(2\pi hi) = 2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

2. La función $2\text{Log}_{(-\pi, \pi]}(z)$ tiene un cero en $z = 1$. Como su derivada en $z = 1$ es $2/z|_{z=1} = 2 \neq 0$ entonces el orden del cero $z = 1$ es $k = 1$.

3. La función polinómica $f(z) = (z^2 + 4)^2$ tiene dos ceros $z = 2i$ y $z = -2i$ que son las únicas raíces del polinomio. El orden de ambas raíces es 2 ya que $f(z) = (z - 2i)^2(z + 2i)^2$, luego $f(z) = (z - 2i)^2 g_1(z)$ con g_1 analítica que no se anula en $z = 2i$ y $f(z) = (z + 2i)^2 g_2(z)$ con g_2 analítica que no se anula en $z = -2i$. En general: los ceros de un polinomio son sus raíces, y el orden o multiplicidad de cada cero es la multiplicidad de la raíz.

Algunos resultados relativos a los ceros de funciones analíticas.

En la sección 10 se exponen algunos resultados relativos a la existencia o inexistencia de ceros de funciones analíticas, más precisamente en el lema de Swchartz (ver lema 10.1.3) y en los ejercicios 10.1.2, 10.3.3, 10.4.3, y 10.4.4.

Otros resultados se exponen en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 12.2.5. Comparación de funciones enteras.

Sean f y g funciones enteras tales que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

a) Probar que si g tiene un cero de orden m en a entonces f tiene un cero en a que, si f no es idénticamente nula, tiene orden $n \geq m$.

b) Deducir que $f(z) = kg(z)$ con k constante de módulo menor o igual que 1.

Parte a): Si $g(a) = 0$ y $|f(a)| \leq |g(a)| = 0$ entonces $f(a) = 0$. Por lo tanto todo cero de g es un cero de f .

Si a es un cero de g con orden $m \geq 1$ entonces

$$g(z) = (z - a)^m h(z)$$

con $h(a) \neq 0$. Sea

$$L_m = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z - a)^m}$$

Se cumple

$$|L_m| = \lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z)|}{|z - a|^m} \leq \lim_{z \rightarrow a} \frac{|g(z)|}{|z - a|^m} = |h(a)| \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad L_m \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Sea n el orden de $z = a$ como cero de f . Se cumple:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z - a)^n} = L_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Entonces, para todo $h > n$ se cumple:

$$L_h = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z-a)^h} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z-a)^n} \frac{1}{(z-a)^{h-n}} = L_n \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(z-a)^{h-n}} = \infty$$

En resumen, hemos probado que $L_h = \infty$ para todo $h > n$. Por otro lado en (1) teníamos $L_m \in \mathbb{C}$. Esto implica que $m \leq n$ como queríamos probar.

Parte b) Sea la función

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

analítica excepto en los ceros de la función g .

Tomemos un cero a cualquiera de g . Por la parte a) sea m el orden de a como cero de g y sea $n \geq m$ el orden de a como cero de f . Se cumple:

$$f(z) = (z-a)^n f_1(z), \quad f_1 \in H(\mathbb{C}), \quad f_1(a) \neq 0$$

$$g(z) = (z-a)^m g_1(z), \quad g_1 \in H(\mathbb{C}), \quad g_1(a) \neq 0$$

Luego

$$\lim_{z \rightarrow a} h(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)^{n-m} f_1(z)}{g_1(z)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^{n-m} = L \in \mathbb{C}$$

(Si $n > m$ entonces $L = 0$, y si $n = m$ entonces $L \neq 0$.)

Entonces $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)h(z) = 0 \cdot L = 0$, y aplicando el teorema de Cauchy-Goursat extendido (ver teorema 11.3.3), la función h se extiende a una función analítica en $z = a$. Esto vale para cualquier cero a de la función g . Luego h es entera.

Como por hipótesis el módulo de h está acotado superiormente por 1, aplicando el teorema de Liouville (ver teorema 11.4.6), la función h es igual a una constante k con $|k| \leq 1$. Luego

$$f(z) = kg(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{donde } k \text{ es una constante con } |k| \leq 1. \quad \square$$

Ejercicio 12.2.6. Regla de L'Hôpital. Sean f y g analíticas en una región Ω y no idénticamente nulas. Sea a un cero de f y de g . Probar que

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Sea n el orden de a como cero de f , y sea m el orden de a como cero de g . Y sea $D \subset \Omega$ un disco abierto centrado en a . Llamando a_j a los coeficientes del desarrollo en potencias de $z-a$ de la función f y llamando b_j a los del desarrollo de la función g , tenemos:

$$f(z) = (z-a)^n f_1(z) = (z-a)^n \sum_{j=n}^{\infty} a_j (z-a)^{j-n}, \quad f_1(a) = a_n \neq 0. \quad (1)$$

$$g(z) = (z-a)^m g_1(z) = (z-a)^m \sum_{j=m}^{\infty} b_j (z-a)^{j-m}, \quad g_1(a) = b_m \neq 0. \quad (2)$$

$$f'(z) = \sum_{j=n}^{\infty} j a_j (z-a)^{j-1} = (z-a)^{n-1} \sum_{j=n}^{\infty} j a_j (z-a)^{j-n}. \quad (3)$$

$$g'(z) = \sum_{j=m}^{\infty} j b_j (z-a)^{j-1} = (z-a)^{m-1} \sum_{j=m}^{\infty} j b_j (z-a)^{j-m}. \quad (4)$$

Primer caso: $n = m$ Usando (1), (2), (3) y (4) se deduce:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)^n f_1(z)}{(z-a)^n g_1(z)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} = \frac{a_n}{b_n} = \\ &= \frac{na_n}{nb_n} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)^{n-1}}{(z-a)^{n-1}} \cdot \frac{na_n}{nb_n} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} \end{aligned}$$

Segundo caso: $n > m$ Usando (1), (2), (3) y (4) se deduce:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)^n f_1(z)}{(z-a)^m g_1(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)^{n-m} f_1(z)}{g_1(z)} = 0 \cdot \frac{a_n}{b_m} = 0 \\ 0 &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)^{n-1}}{(z-a)^{m-1}} \frac{na_n}{mb_m} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} \end{aligned}$$

Tercer caso: $n < m$ Usando (1), (2), (3) y (4) se deduce:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)^n f_1(z)}{(z-a)^m g_1(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z)}{(z-a)^{m-n} g_1(z)} = \infty \cdot \frac{a_n}{b_m} = \infty \\ \infty &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)^{n-1}}{(z-a)^{m-1}} \frac{na_n}{mb_m} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad \square \end{aligned}$$

12.3. Clasificación de las singularidades aisladas.

En lo que sigue dado $a \in \mathbb{C}$ denotamos para $R > 0$ con

$$D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$$

al disco abierto de centro a y radio $R > 0$, y denotamos con

$$D_R^*(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$$

al disco abierto pinchado de centro a y radio $R > 0$, es decir el conjunto que resulta del disco abierto $D_R(a)$ retirando su centro a . Denotamos con

$$D_{1/R}(\infty) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

al entorno abierto en $\overline{\mathbb{C}}$ de centro ∞ y radio $1/R$. Denotamos con

$$D_{1/R}^*(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

al entorno abierto pinchado de ∞ con radio $1/R$, es decir al conjunto que resulta del entorno $D_{1/R}(\infty)$ en $\overline{\mathbb{C}}$ retirando su centro ∞ .

Definición 12.3.1. Singularidad aislada. Un punto $a \in \mathbb{C}$ se dice que es *una singularidad de f* si f o bien no está definida en $z = a$, o bien está definida y no es analítica en ningún entorno de a (por ejemplo si es discontinua en a).

Se dice que una singularidad de f es *una singularidad aislada* si $f \in H(D_R^*(a))$ para algún entorno pinchado $D_R^*(a)$ de a con radio $R > 0$.

El punto ∞ del plano complejo compactificado se dice que es *una singularidad aislada de f* si $f \in H(D_{1/R}^*(\infty))$ para algún entorno pinchado $D_{1/R}^*(\infty)$ con radio $1/R > 0$.

12.3.2. Ejemplos.

- 1) La función $\text{Log}_{(-\pi, \pi]} z$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ no tiene singularidades aisladas.
- 2) Si $f(z)$ es holomorfa en Ω y $z_0 \in \Omega$, entonces la función $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$ y por lo tanto tiene en z_0 una singularidad aislada.
- 3) Los polos de las funciones racionales son singularidades aisladas.
- 4) La función e^z tiene en ∞ una singularidad aislada.
- 5) La función $e^{1/z}$ tiene en 0 una singularidad aislada.
- 6) Si f es holomorfa en la región Ω y no es idénticamente nula, entonces los ceros de f son aislados. (Ver corolario 11.1.8.) Luego la función $1/f$ es holomorfa en $\Omega \setminus Z$ donde Z es el conjunto de ceros de f , y tiene en cada punto de Z una singularidad aislada.

Definición 12.3.3. Clasificación de las singularidades aisladas.

Dada una singularidad aislada $a \in \mathbb{C}$ de f , se define:

- a es *singularidad evitable de f* si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$.
- a es *un polo de f* si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.
- a es *una singularidad esencial de f* si no existe $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

Dado ∞ singularidad aislada de f se define:

- ∞ es *singularidad evitable de f* si $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$.
- ∞ es *un polo de f* si $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.
- ∞ es *una singularidad esencial de f* si no existe $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

12.3.4. Ejemplos.

- 1) Los polos de una función racional son polos también según la definición anterior.
- 2) Si $f(z)$ es holomorfa en la región Ω y no es idénticamente nula, entonces $1/f(z)$ es holomorfa en $\Omega \setminus Z$ donde Z es el conjunto de ceros de f . Cada cero a de f es un polo de $1/f$. En efecto, si $k \geq 1$ es el orden del cero a de f , entonces $f(z) = (z - a)^k g(z)$ con g analítica y $g(a) \neq 0$. Luego $1/f = 1/((z - a)^k g(z)) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow a$.
- 3) Si f es holomorfa en Ω y $z_0 \in \Omega$ entonces $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ tiene en z_0 una singularidad evitable.
- 4) La función e^z tiene en ∞ una singularidad esencial.
- 5) La función $e^{1/z}$ tiene en 0 una singularidad esencial.
- 6) Los polinomios de grado $n \geq 1$ tienen en ∞ un polo.

El siguiente teorema identifica una singularidad evitable a como aquella que es singularidad sólo porque faltó definir en forma adecuada la función f en ese punto. Definiendo adecuadamente $f(a)$, entonces a deja de ser una singularidad de f .

Teorema 12.3.5. Caracterización de las singularidades evitables.

a) Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- i) a es singularidad evitable de f .
- ii) $f(z)$ es acotada en $D_R^*(a)$ para algún $R > 0$.
- iii) $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$.
- iv) f admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$ para algún $R > 0$

b) Sea ∞ una singularidad aislada de f . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- i) ∞ es singularidad evitable de f .
- ii) $f(z)$ es acotada en $D_{1/R}^*(\infty)$ para algún $R > 0$.
- i) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z = 0$.

Demostración.

Parte a) A lo largo de la prueba, aplicando la definición de singularidad aislada, sea $D_R^*(a)$ con $R > 0$ el disco pinchado donde f es holomorfa.

Probemos que $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$

Prueba de que i) $\Rightarrow$ ii): Por hipótesis existe $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Luego, por definición de límite, f es acotada en $D_R^*(a)$, como queríamos demostrar.

Prueba de que ii) $\Rightarrow$ iii): Por hipótesis f es acotada en $D_R^*(a)$. Luego, como $(z - a) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow a$, se obtiene $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$, como queríamos demostrar.

Prueba de que iii) $\Rightarrow$ iv): Por hipótesis $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$. Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat extendido (ver teorema 11.3.3) se deduce que existe una extensión holomorfa de f a $D_R(a)$, como queríamos demostrar.

Prueba de que iv) $\Rightarrow$ i): Por hipótesis existe una extensión holomorfa g de f a $D_R(a)$. Entonces $g(z) = f(z) \forall z \in D_R^*(a)$ y además $g(z) \in \mathbb{C}$ está definida y es continua en $z = a$. Luego $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} g(z) = g(a) \in \mathbb{C}$. Concluimos que existe en $\mathbb{C}$ el límite de $f(z)$ cuando $z \rightarrow a$, como queríamos demostrar.

Parte b) Aplicando la definición de singularidad aislada en ∞ , sea $D_{1/R}^*(\infty)$ con $R > 0$ el entorno pinchado de ∞ donde f es holomorfa.

Consideremos la función auxiliar $g(w) = f(1/w)$ definida y holomorfa para todo $w \in D_{1/R}^*(0)$. En efecto:

$$z = 1/w \in D_{1/R}^*(\infty) \Leftrightarrow \left| \frac{1}{w} \right| = |z| > R \Leftrightarrow 0 < |w| < \frac{1}{R} \Leftrightarrow w \in D_{1/R}^*(0)$$

Entonces 0 es una singularidad aislada de g . Se observa que ∞ es singularidad evitable de f si y solo si 0 es singularidad evitable de g . Aplicando la parte a) ya demostrada, esto es equivalente a:

$$g(w) \text{ acotada } \forall w \in D_{1/R}^*(0) \Leftrightarrow f(z) = g(w) \text{ para } z = \frac{1}{w} \text{ es acotada } \forall z \in D_{1/R}^*(\infty)$$

Análogamente:

$$\lim_{w \rightarrow 0} wg(w) = 0 \Leftrightarrow f(z) = g(w) \text{ para } z = \frac{1}{w} \text{ cumple } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 0 \quad \square$$

12.4. Polos complejos y en ∞ .

Teorema 12.4.1. Caracterización de los polos complejos.

Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- i) a es un polo de f .
- ii) Para un primer natural $k \geq 1$ la función $(z - a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$ para algún $R > 0$. En consecuencia a es una singularidad evitable de $(z - a)^k f(z)$.
- iii) Para un primer natural $k \geq 1$ la función $(z - a)^k f(z)$ es acotada en $D_R^*(a)$ para algún $R > 0$.
- iv) Para un primer natural $k \geq 1$ existe

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) \notin \{0, \infty\}$$

En consecuencia

$$0 \leq n < k \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n f(z) = \infty$$

$$n > k \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n f(z) = 0$$

- v) La función $1/f(z)$ tiene una extensión analítica en un entorno de $z = a$, y $z = a$ es un cero de orden $k \geq 1$ de la extensión analítica de $1/f$.

Demostración: A lo largo de la prueba, aplicando la definición de singularidad aislada, sea $D_R^*(a)$ con $R > 0$ el disco pinchado donde f es holomorfa.

Probaremos que $i) \Rightarrow v) \Rightarrow iv) \Rightarrow iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i)$.

i) $\Rightarrow$ v): Por hipótesis $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Entonces $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D_r^*(a)$ para cierto $0 < r < R$. Definamos la función h :

$$h(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall z \in D_r^*(a)$$

h es holomorfa en $D_r^*(a)$ porque es el cociente de dos funciones holomorfas que no se anulan. Luego h también tiene en a una singularidad aislada.

Además $\lim_{z \rightarrow a} h(z) = \lim_{z \rightarrow a} 1/f(z) = 0$. Por lo tanto, a es una singularidad evitable de h . Definiendo $h(a) = 0$ se tiene $h \in H(D_r(a))$. Por construcción a es un cero aislado de h y por lo tanto tiene un orden $k \geq 1$.

v) $\Rightarrow$ iv):

Escribiendo el desarrollo en serie de potencias centrada en a de la función h , extensión analítica $1/f$, se obtiene:

$$h(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - a)^n = (z - a)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - a)^{n-k} \quad \forall z \in D_r(a)$$

donde $k \geq 1$ es el primer tal que $a_k \neq 0$. Existe tal $k \geq 1$ porque, si bien $h(a) = a_0 = 0$, la función $h(z) = 1/f(z)$ no se anula en ningún otro punto de $D_r(a)$, luego su desarrollo en serie de potencias no puede ser idénticamente nulo.

Consideremos entonces:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(z-a)^k f(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{h(z)}{(z-a)^k} = a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Luego

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = \frac{1}{a_k} \notin \{\infty, 0\} \quad (1)$$

como queríamos demostrar. Las consecuencias enunciadas en la tesis (iv) son inmediatas a partir de (1), escribiendo:

$$(z-a)^n f(z) = (z-a)^{n-k} (z-a)^k f(z)$$

iv) $\Rightarrow$ iii): Por hipótesis

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = L \notin \{\infty, 0\}$$

Luego, por definición de límite $(z-a)^k f(z)$ es acotada en un disco $D_r^*(a)$.

iii) $\Rightarrow$ ii): Sea $g(z) = (z-a)^k f(z)$. Por hipótesis $g(z)$ es acotada en un disco $D_r^*(a)$. Luego

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)g(z) = 0$$

Usando el teorema de caracterización de las singularidades evitables (ver teorema 12.3.5), el punto a es una singularidad evitable de $g(z)$, y por lo tanto $g(z) = (z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_r(a)$ como queríamos demostrar.

ii) $\Rightarrow$ i): Por hipótesis existe $k \geq 1$ que es el primer natural tal que $g(z) = (z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_r(a)$. Entonces $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = g(a) = L \in \mathbb{C}$.

Afirmación: $L \neq 0$. En efecto, por absurdo si fuera $L = 0$, entonces

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)(z-a)^{k-1} f(z) = 0$$

Como resultado de aplicar el teorema 12.3.5 a la función $(z-a)^{k-1} f(z)$, esta tendría en a una singularidad evitable, y por lo tanto una extensión holomorfa a $D_r(a)$. Entonces no sería k el primer natural tal que $(z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa al disco. Hemos probado la afirmación.

Luego, como existe $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = L \neq 0$ se deduce:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{(z-a)^k} = \infty$$

y por definición a es un polo de f como queríamos demostrar. $\square$

Teorema 12.4.2. Caracterización de polo en ∞ .

Sea ∞ singularidad aislada de f . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) ∞ es un polo de f .

ii) Para un primer natural $k \geq 1$ la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D_{1/R}^*(\infty)$ para algún $R > 0$.

iii) Para un primer natural $k \geq 1$ existe

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^k} \notin \{0, \infty\}$$

En consecuencia

$$0 \leq n < k \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = \infty$$

$$n > k \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$$

Demostración: Aplicando la definición de singularidad aislada en ∞ , sea $D_{1/R}^*(\infty)$ con $R > 0$ el entorno pinchado de ∞ donde f es holomorfa.

Análogamente a la demostración de la parte b) del teorema 12.3.5 consideremos la función auxiliar $g(w) = f(1/w)$ definida y holomorfa para todo $w \in D_{1/R}^*(0)$.

Se observa que ∞ es un polo de f si y solo si 0 es un polo de g . Aplicando el teorema 12.4.1, esto es equivalente a:

$$w^k g(w) \text{ acotada } \forall w \in D_{1/R}^*(0) \Leftrightarrow \frac{f(z)}{z^k} = w^k g(w) \text{ para } z = \frac{1}{w} \text{ es acotada } \forall z \in D_{1/R}^*(\infty)$$

Análogamente:

$$\lim_{w \rightarrow 0} w^k g(w) = L \Leftrightarrow \frac{f(z)}{z^k} = w^k g(w) \text{ para } z = \frac{1}{w} \text{ cumple } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^k} = L \quad \square$$

Definición 12.4.3. Orden de un polo.

a) En virtud del teorema 12.4.1, el orden o multiplicidad $k \geq 1$ de un polo $a \in \mathbb{C}$ de f es:

- El primer natural $k \geq 1$ tal que la función $(z - a)^k f(z)$ es acotada en $D_R^*(a)$ para algún $R > 0$.
- El orden o multiplicidad de a como cero de la función analítica que extiende a $1/f$ a un entorno de a .
- El primer $k \geq 1$ tal que la función $(z - a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$.
- El único número entero k tal que $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) \notin \{0, \infty\}$.

En consecuencia: $0 \leq n < k \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n f(z) = \infty$;

$$n > k \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n f(z) = 0.$$

b) En virtud del teorema 12.4.2, el orden o multiplicidad $k \geq 1$ del polo ∞ de f es

- El primer natural $k \geq 1$ tal que la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D_{1/R}^*(\infty)$ para algún $R > 0$ (por definición)

- El único entero k tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^k} \notin \{0, \infty\}$.

En consecuencia $0 \leq n < k \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = \infty$; $n > k \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$.

- El orden de $z = 0$ como polo de la función $f(1/z)$.

Definición 12.4.4. Polos simples y múltiples.

Un polo se llama simple si tiene orden 1, y se llama múltiple (doble, triple, etc) si tiene orden ≥ 2 (2, 3, etc. respectivamente).

12.4.5. Ejemplos:

1) Si $f \in H(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$ es tal que $f'(z_0) \neq 0$ entonces $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)^2$ tiene en z_0 un polo simple.

2) Un polo de multiplicidad k de una función racional es un polo de orden k también de acuerdo a la definición anterior.

3) Los polinomios de grado $n \geq 1$ tienen en ∞ un polo de orden n .

4) Si $f \in H(\Omega)$ donde Ω es una región, no es idénticamente nula, entonces un cero de orden k de f es un polo de orden k de la función $1/f(z)$ y recíprocamente.

5) Se define la función $\operatorname{sen} z$ para z complejo, como la función $(e^{iz} - e^{-iz})/2i$. Es una función entera.

Sea $f(z) = 1/\operatorname{sen}(z)$. Encontramos y clasificamos todas las singularidades de f . Tiene singularidades en ∞ y donde se anula el denominador $\operatorname{sen}(z)$. Estudiemos después la singularidad en ∞ y primero las singularidades complejas, donde se anula $\operatorname{sen}(z)$. Son aisladas y son polos, porque son los ceros de la función entera $\operatorname{sen}(z)$ no idénticamente nula. Hallemos todos esos polos y sus órdenes.

$\operatorname{sen}(z) = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz}$. Sustituyendo $z = x + iy$, con x e y reales, se obtiene:

$$e^{ix-y} = e^{-ix+y} \Rightarrow e^{-y} = |e^{ix-y}| = |e^{-ix+y}| = e^y, \quad e^{ix} = e^{-ix}$$

Por un lado la igualdad $e^{-y} = e^y$ se cumple para todo y real tal que $e^y - e^{-y} = 0$. Recordando que el seno hiperbólico de y es $\operatorname{senh}(y) = (e^y - e^{-y})/2$ los valores de y buscados son los que anulan el $\operatorname{senh}(y)$ o sea $y = 0$. Por lo tanto los complejos z buscados tienen todos parte imaginaria nula.

Ahora encontremos los valores de la parte real x que cumplen $e^{ix} = e^{-ix}$. Esto es: $\cos x + i \operatorname{sen} x = \cos x - i \operatorname{sen} x$. Luego $\operatorname{sen} x = 0$. Esto se cumple si y solo si $x = k\pi$ con k entero cualquiera.

En definitiva los polos de $f(z)$, que son los ceros de $\operatorname{sen}(z)$, son los números reales $z = k\pi$ con k entero.

Para hallar el orden de $k\pi$ como polo de f recordemos que es el orden de $k\pi$ como cero de $\operatorname{sen} z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. La derivada es $\operatorname{sen}'(z) = (ie^{iz} + ie^{-iz})/2i = (e^{iz} + e^{-iz})/2$. (Esta última función se define como $\operatorname{cos} z$ con z complejo.)

En $z = k\pi$ la derivada es $\operatorname{sen}'(k\pi) = (e^{ik\pi} + e^{-ik\pi})/2 = \operatorname{cos}(k\pi) = \pm 1 \neq 0$. Luego el orden de todos los ceros de $\operatorname{sen}(z)$ es 1, y entonces el orden de todos los polos complejos de f es 1.

Ahora clasifiquemos la singularidad en ∞ . No es una singularidad aislada porque entre los polos complejos $k\pi$ (con k entero cualquiera) que encontramos antes, hay infinitos de ellos que están en el entorno $D_{1/R}^*(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. En efecto, todos los valores enteros de k tales que $|k\pi| > R$ dan puntos $k\pi$ en $D_{1/R}^*(\infty)$ donde la función f no es holomorfa. Entonces ∞ es singularidad no aislada de f .

12.5. Singularidades esenciales.

Proposición 12.5.1. Caracterización de las singularidades esenciales.

a) Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f . Sea $D_R^*(a)$ el disco pinchado de radio $R > 0$ donde f es holomorfa. Entonces son equivalentes:

- i) a es una singularidad esencial de f .
- ii) Para ningún natural $k \geq 0$ la función $(z - a)^k f(z)$ es acotada en $D_R^*(a)$.
- iii) Para ningún natural $k \geq 0$ la función $(z - a)^k f(z)$ admite extensión holomorfa a $D_R(a)$.
- iv) Para ningún natural $k \geq 0$ existe $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

b) Sea ∞ singularidad aislada de f . Sea $D_{1/R}^*(\infty)$ el entorno pinchado de ∞ donde f es holomorfa. Entonces son equivalentes:

- i) ∞ es una singularidad esencial de f .
- ii) Para ningún natural $k \geq 0$ la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D_R^*(a)$.
- iii) Para ningún natural $k \geq 0$ existe $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z^k$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

Demostración: Basta recordar que por definición una singularidad aislada es esencial si no es evitable ni polo. Aplicando los teoremas de caracterización de singularidades evitables y de polos (teoremas 12.3.5, 12.4.1 y 12.4.2) es equivalente que la singularidad sea esencial a que no se cumpla alguna de las afirmaciones de esos teoremas. Por lo tanto, se cumple la contraria, que es la expuesta en cada una de las afirmaciones de este corolario. $\square$

Teorema 12.5.2. Teorema de Weierstrass-Casorati.

Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ una singularidad esencial de f y sea $D^*(a)$ un disco pinchado de a donde f es holomorfa.

El conjunto imagen $f(D^*(a))$ es denso en $\mathbb{C}$, es decir todo punto $w \in \mathbb{C}$ es el límite de alguna sucesión de puntos $w_n \in f(D^*(a))$. Precisamente:

$$\forall w \in \mathbb{C} \text{ existe } z_n \in D^*(a) \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = w \quad (1)$$

Nota: Es válida una versión más fuerte del teorema anterior, llamado Teorema de Picard, cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 12.5.3. Teorema de Picard. Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ una singularidad esencial de f y sea $D^*(a)$ un disco pinchado de a donde f es holomorfa. Entonces el conjunto imagen $f(D^*(a))$ es todo el conjunto $\mathbb{C}$ excepto a lo sumo un punto.

Demostración del teorema 12.5.2:

Por hipótesis a es una singularidad esencial de f . Hay que probar que se cumple (1). Basta probar que

$$\forall w \in \mathbb{C} \quad \inf_{z \in D^*(a)} |f(z) - w| = 0 \quad (2)$$

En efecto, si se cumple (2) entonces para todo $n \geq 1$ el ínfimo de (2) es menor $1/n$ y, por definición de ínfimo, existe algún $z_n \in D^*(a)$ tal que $|f(z_n) - w| < 1/n$. Entonces $f(z_n) \rightarrow w$ y se cumple (1) como queremos demostrar.

Demostración de (2): Supongamos por absurdo que para algún $w_0 \in \mathbb{C}$ se cumple $\inf_{z \in D^*(a)} |f(z) - w_0| = r > 0$. Entonces la función auxiliar

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \quad \forall z \in D^*(a)$$

sería holomorfa en $D^*(a)$ y acotada superiormente por $1/r$. Luego, a sería una singularidad aislada de g y por el teorema 12.3.5 sería una singularidad evitable. Luego existiría $\lim_{z \rightarrow a} g(z)$. Entonces también existiría

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \left(w_0 + \frac{1}{g(z)} \right)$$

(pudiendo ser este límite igual a ∞ , si $g(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow a$). Por definición a no sería singularidad esencial de f contradiciendo la hipótesis. $\square$