13. Series de Laurent.

13.1. *Definición de serie de Laurent y corona de convergencia.*

Definición 13.1.1. Serie de Laurent.

Se llama serie de Laurent centrada en $z = z_0$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (1)$$

donde a_n y a_{-n} son complejos constantes (independientes de z). Se dice que la serie de Laurent converge puntualmente para todo $z \in K$ (converge absolutamente para todo $z \in K$; converge uniformemente en K) cuando ambas series que la forman convergen puntualmente para todo $z \in K$ (resp. convergen absolutamente para todo $z \in K$; convergen uniformemente en K).

Cuando converge, se llama suma de la serie (1) a $A + B$ donde A y B son respectivamente las sumas de las dos series que forman (1).

La serie (1) se escribe como

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Definición 13.1.2. Corona de centro z_0.

Dado un complejo z_0 y dados $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, se llama corona abierta centrada en z_0 de radio interno R_1 y radio externo R_2, denotada como $D(z_0, R_1, R_2)$, al siguiente conjunto de complejos:

$$D(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$$

Se observa que el radio externo puede ser $R_2 = \infty$ con lo que la corona se transforma en al complemento del disco cerrado de centro z_0 y radio R_1.

Se observa que el radio interno puede ser $R_1 = 0$ con lo que la corona se transforma en el disco pinchado de centro z_0 y radio R_2 o, si $R_2 = \infty$ en el plano complejo excepto z_0.

Nota 13.1.3. Corona de convergencia de una serie de Laurent.

Dada una serie de Laurent como en la definición 13.1.1:

i) La mayor corona $D(z_0, R_1, R_2)$ posible donde converge puntualmente (corona de convergencia), que coincide con el mayor abierto posible donde converge puntualmente la serie, se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad R_1 = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \qquad (2)$$

ii) Además para todo punto $z \in D(z_0, R_1, R_2)$ la convergencia de la serie de Laurent es absoluta, y es uniforme en cualquier compacto $K \subset D(z_0, R_1, R_2)$.

Advertencia: Dada una serie de Laurent cualquiera, (que no provenga del desarrollo de una función holomorfa como en el teorema 13.2.1), puede suceder que las fórmulas de (1) conduzcan a radios tales que $R_1 \geq R_2$. En ese caso la corona de convergencia es vacía.

Demostración de i) y ii): Por los resultados previos sobre serie de potencias (ver el parágrafo 11.1.2), el abierto más grande posible donde converge la serie de la derecha en la definición 13.1.1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es el disco de convergencia con radio R_2 calculado según la fórmula (2).

Por otro lado, el abierto más grande posible donde converge la serie de izquierda en la definición 13.1.1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \qquad \text{donde } w = \frac{1}{z - z_0}$$

es

$$\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{1}{z - z_0} \right| = |w| < \frac{1}{\text{lím sup}_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}} \}$$

Luego, converge para todo z tal que $|z - z_0| > R_1$ donde R_1 es el radio calculado según la fórmula (2).

Por lo tanto el máximo conjunto abierto donde la serie de Laurent converge es la corona $D(z_0, R_1, R_2)$.

Además, por las propiedades de los discos de convergencia de series de potencias (ver parágrafo 11.1.2), para todo punto $z \in D(z_0, R_1, R_2)$ la convergencia de la serie de Laurent es absoluta, y es uniforme en cualquier compacto $K \subset D(z_0, R_1, R_2)$. $\square$

13.2. *Desarrollo en serie de Laurent.*

Teorema 13.2.1. Construcción del desarrollo en serie de Laurent de una función analítica en una corona.

Sea f una función analítica en la corona $D(z_0, R_1, R_2)$ (ver definición 13.1.2). *Entonces existe una serie de Laurent tal que*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in D(z_0, R_1, R_2) \quad (3)$$

(Esta notación indica que la serie de Laurent en (3) es convergente puntualmente para todo $z \in D(z_0, R_1, R_2)$ y su suma coincide con $f(z)$).

Además

a) *La serie de Laurent que cumple* (3) *es única y sus coeficientes son:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D(z_0, R_1, R_2)$ tal que $Ind_{\gamma}(z_0) = 1$.

b) *La serie de Laurent que cumple* (3) *converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto $K \subset D(z_0, R_1, R_2)$.*

Demostración del teorema 13.2.1.
Primero, admitiendo que se cumple la igualdad

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall\, z \in D(z_0, R_1, R_2) \quad (3)$$

probemos las afirmaciones b) y a) de la tesis del teorema. Finalmente demostraremos que existe una serie de Laurent que cumple la igualdad (3).

Prueba de b) Si la serie cumple (3), entonces converge puntualmente para todo $z \in D(z_0, R_1, R_2)$. Por lo demostrado en la parte ii) del parágrafo 13.1.3 la serie converge uniformemente en cualquier compacto contenido en $D(z_0, R_1, R_2)$ y absolutamente en cada punto de esa corona.

Prueba de a) Para probar la unicidad basta demostrar que si una serie de Laurent cumple (3) entonces sus coeficientes están determinados en forma única a partir de la función dada $f(z)$, por la siguiente fórmula de la tesis a):

Fórmula a probar: $$a_h = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{h+1}}\, dz \quad \forall h \in \mathbb{Z} \qquad (4)$$

Calculemos

$$\int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{h+1}} = I$$

con h entero fijo cualquiera, a lo largo de una curva cerrada γ cualquiera, contenida en $D(z_0, R_1, R_2)$ y que de una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de z_0.

Afirmación I): El valor de la integral I no depende de la curva γ elegida. En efecto, si γ_1 y γ_2 son dos de tales curvas, tomemos un segmento S contenido en $D(z_0, R_1, R_2)$ que vaya del punto $z_1 \in \gamma_1$ al punto $z_2 \in \gamma_2$. La curva cerrada $\Gamma = \gamma_1 + S - \gamma_2 - S$ es homotópica a un punto en $D(z_0, R_1, R_2)$. Entonces, siendo por hipótesis $f(z)/(z - z_0)^{h+1}$ holomorfa para todo $z \in D(z_0, R_1, R_2)$, se cumple que es nula su integral a lo largo de Γ. (Teorema de Cauchy global). Luego, la integral de $f(z)/(z - z_0)^{h+1}$ a lo largo de γ_1 es igual a su integral a lo largo de γ_2, como habíamos afirmado.

Ahora calculemos la integral I, usando la igualdad (3):

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{h+1}}\, dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-h-1} \right) dz \qquad (5)$$

La serie de Laurent dentro del integrando en (5) converge uniformemente en γ^*, porque γ^* es compacto y por lo demostrado en el punto ii) del parágrafo 13.1.3. Luego, se puede aplicar el teorema de convergencia uniforme e integración:

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-h-1} \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_\gamma a_n (z - z_0)^{n-h-1}\, dz \qquad (6)$$

Recodando que $\int_\gamma (z-z_0)^m\,dz = 0$ si $m \neq -1$ y que $\int_\gamma (z-z_0)^{-1}\,dz = 2\pi i$, se calculan las integrales en (6). Quedan todas nulas excepto una: la que tiene coeficiente a_n, con n entero tal que el exponente $n-h-1=-1$; es decir $n=h$.

Sustituyendo en (6) y en (5) se deduce:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{h+1}}\,dz = 2\pi i a_h, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{Z}$$

que es la fórmula (4) como queríamos demostrar.

Prueba de existencia de una serie de Laurent que cumple (3):

Fijemos $z_0 \in D(a,R_1,R_2)$ donde f es analítica por hipótesis. Fijemos dos números reales $r_1 < r_2$ tales que

$$0 \leq R_1 < r_1 < |z_0 - a| < r_2 < R_2 \leq +\infty$$

Denotamos C_1 y C_2 a las circunferencias con centro a y radios r_1 y r_2 respectivamente, recorridas una sola vez en sentido antihorario. Definimos para todo $w \notin C_1^* \cup C_2^*$ (en particular para $w=z_0$), la función:

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-w}\,dz \qquad (8)$$

Enunciamos las siguientes afirmaciones:

Afirmación II): La función $g(w)$ definida en (8) cumple:

$$g(w) = f(w) \quad \forall w \in D(a,r_1,r_2), \quad \text{en particular para } w = z_0$$

Afirmación III): La función $g(w)$ definida en (8) cumple:

$$\forall\, w \in D(a,r_1,r_2): \quad g(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,(w-a)^n, \quad \text{en particular para } w = z_0,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad \text{si } n \geq 0; \qquad \text{y} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad \text{si } n \leq -1$$

Observamos que estos coeficientes a_n son independientes de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias C_1 y C_2 elegidas, en virtud de lo demostrado en la afirmación I). Por lo tanto los coeficientes a_n son independientes del punto z_0 fijado a priori en $D(a,R_1,R_2)$. Entonces, una vez probadas las afirmaciones II) y III), deducimos de ellas que

$$\forall\, z_0 \in D(a,R_1,R_2): \quad f(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,(z_0-a)^n$$

Esta es la igualdad (3) que queríamos demostrar. Basta pues probar las afirmaciones (II) y (III).

Prueba de la afirmación II): En lo que sigue hágase un dibujo. Sea $w \in D(a,r_1,r_2)$. En particular w puede ser z_0. Consideremos un segmento $S = [z_1,z_2]$ que esté contenido en

$D(a, R_1, R_2)$, que no pase por w y que una un punto $z_1 \in C_1^*$ con un punto $z_2 \in C_2^*$. Sea $\Gamma = C_2 - S - C_1 + S$. Esta curva Γ es cerrada, homotópica a un punto en $D(a, R_1, R_2)$ donde f es analítica, y da una vuelta sola en sentido antihorario alrededor del punto w. Aplicando la fórmula integral de Cauchy se deduce:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w}$$

Luego, usando (8) se deduce que $f(w) = g(w)$ para todo $w \in D(a, r_1, r_2)$. Hemos probado la afirmación II).

Prueba de la afirmación III): Re-escribiendo (8) se obtiene:

$$g(w) = h_2(w) - h_1(w), \quad \text{donde} \quad h_2(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w}, \quad h_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} \qquad (9)$$

Apliquemos el teorema de construcción de funciones analíticas mediante integración (ver teorema 11.1.10), a la función $h_2(w)$ de la igualdad (9). Se deduce que $h_2(w)$ es analítica para todo $w \notin C_2^*$, en particular para $w = a$ y además

$$h_2^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

Por lo tanto $h_2(w)$ tiene un desarrollo en serie de potencias centrado en a válido para todo w en el disco $D_{r_2}(a)$ (que tiene como borde la circunferencia C_2^*). Se deduce:

$$h_2(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (w-a)^n \quad \forall\, w \in D_{r_2}(a) \qquad (10)$$

donde

$$a_n = \frac{h_2^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \quad \forall n \geq 0 \qquad (11)$$

Ahora descompongamos la función $h_1(w)$ de la igualdad (9), considerando que $w \in D(a, r_1, r_2)$, y por lo tanto $|w-a| > r_1$. Para todo $z \in C_1^*$ se cumple

$$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \frac{|z-a|}{|w-a|} = \frac{r_1}{|w-a|} < 1$$

Entonces la serie geométrica de razón $u = (z-a)/(w-a)$ converge a $1/(1-u)$. Se deduce que

$$\frac{1}{1-(z-a)/(w-a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \quad \forall z \in C_1^*$$

Entonces

$$\frac{f(z)}{z-w} = \left(\frac{f(z)}{w-a} \right) \left(\frac{-1}{1-(z-a)/(w-a)} \right) = -\frac{f(z)}{w-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \quad \forall z \in C_1^*$$

Luego, sustituyendo en (9) se obtiene:

$$h_1(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(\frac{f(z)}{w-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\right)dz \qquad \forall w \in D(a,r_1,r_2) \qquad (12)$$

Veamos que la serie dentro del integrando converge uniformemente para $z \in C_1^*$. En efecto

$$\left|\frac{f(z)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\right| \leq \frac{M}{w-a}\left(\frac{r_1}{|w-a|}\right)^n = A_n, \ \text{ independiente de } z, \ \forall\, z \in C_1^*$$

donde M es el máximo de $|f(z)|$ cuando $z \in C_1^*$.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ es una serie geométrica de razón $0 < r_1/|w-a| < 1$. Por lo tanto es convergente. Aplicando el criterio de la mayorante de Weierstrass se deduce que la serie dentro del integrando en (12) converge uniformemente en $z \in C_1^*$. Luego podemos usar el teorema de convergencia uniforme e integración para deducir que:

$$\int_{C_1}\left(\frac{f(z)}{w-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\right)dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{C_1}\frac{f(z)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dz\right) \qquad \forall w \in D(a,r_1,r_2) \qquad (13)$$

Reuniendo las igualdades (12) y (13) se deduce:

$$\forall\, w \in D(a,r_1,r_2): \quad h_1(w) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dz\right)$$

$$h_1(w) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)(z-a)^n\,dz\right)(w-a)^{-n-1}$$

Luego:

$$\forall\, w \in D(a,r_1,r_2): \quad h_1(w) = -\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (w-a)^{-n-1}$$

donde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)(z-a)^n\,dz$$

Reindexando $m = -n-1$ cuando n varía de 0 a $+\infty$, el índice m varía decreciendo de -1 a $-\infty$. Y además $n = -m-1$. Se deduce que:

$$\forall\, w \in D(a,r_1,r_2): \quad h_1(w) = -\sum_{m=-1}^{-\infty} a_m (w-a)^m \qquad (14)$$

donde

$$a_m = b_{-m-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\,dz \qquad (15)$$

Reuniendo (9), (10), (11), (14) y (15) se deduce:

$$\forall w \in D(a,r_1,r_2): \quad g(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (w-a)^n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad \text{si } n \geq 0$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad \text{si } n \leq -1$$

Esta es la afirmación (III) que queríamos demostrar. □

13.3. *Caracterización de singularidades aisladas por su desarrollo de Laurent.*

Veamos primero un corolario del teorema 13.2.1, aplicado a las singularidades aisladas. Obsérvese que los entornos pinchados de las singularidades aisladas son coronas donde la función es holomorfa, por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema 13.2.1.

Corolario 13.3.1. Serie de Laurent en las singularidades aisladas.

a) *Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f y sea $D^*_R(a)$ un entorno pinchado de a donde f es holomorfa.*

Entonces existe una serie de Laurent tal que:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \forall\, z \in D^*_R(a) \quad (1)$$

Además la serie de Laurent que cumple (1) *es única, converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto $K \subset D^*_R(a)$; y sus coeficientes verifican:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D^*_R(a)$ tal que $Ind_\gamma(a) = 1$.

b) *Sea ∞ una singularidad aislada de f y sea $D^*_{1/R}(\infty)$ un entorno de ∞ donde f es holomorfa.*

Entonces existe una serie de Laurent tal que:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \forall\, z \in D^*_{1/R}(\infty) \quad (2)$$

Además la serie de Laurent que cumple (2) *es única, converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto $K \subset D^*_{1/R}(\infty)$; y sus coeficientes verifican*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z) z^{n-1}\,dz \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D^*_{1/R}(\infty)$ tal que $Ind_\gamma(0) = 1$.

Demostración: Para la parte a) basta aplicar el teorema 13.2.1 usando $z_0 = a$ y la corona $D(a, 0, R) = D^*_R(a))$.

Para la parte b) basta aplicar el teorema 13.2.1 usando $z_0 = 0$ y la corona $D(0, R, \infty) = D^*_{1/R}(\infty)$. Advertimos que en este caso hemos llamado a_n al coeficiente que en el teorema 13.2.1 llamábamos a_{-n}. □

Teorema 13.3.2. -

Clasificación de singularidades aisladas según su desarrollo de Laurent.

Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ una singularidad aislada de f. Sean a_n los coeficientes de la serie de Laurent centrada en a, según el corolario 13.3.1.

Entonces:

i) *a es una singularidad evitable si y solo si $a_{-n} = 0 \;\; \forall\, n \geq 1$.*

ii) *a es un polo de orden $k \geq 1$ si y solo si $a_{-k} \neq 0$ y $a_{-n} = 0 \;\; \forall\, n \geq k$.*

iii) *a es una singularidad esencial si y solo si la sucesión a_{-n} para $n \geq 1$, tiene infinitos términos no nulos.*

Demostración:

Escribiremos la demostración del teorema para a singularidad aislada compleja. Si a fuera ∞ hay que sustituir en la demostración $(z-a)$ por $1/z$.

Parte i): Aplicando el teorema 12.3.5 a es singularidad evitable si y solo si la función f admite una extensión analítica a $D_R(a)$ para algún $R > 0$. Esto sucede si y solo si f tiene un desarrollo en serie de potencias de $(z-a)$, y por la unicidad del desarrollo de Laurent, este es su desarrollo de Laurent. Esto sucede si y solo si son todos nulos los coeficientes de las potencias de exponente negativo de $(z-a)$, que llamamos a_{-n} con índice $-n$ negativo.

Parte ii): Aplicando el teorema 12.4.1 a es un polo de orden $k \geq 1$ si y solo si k es el primer natural tal que $(z-a)^k f(z)$ tiene una extensión analítica a un disco con centro en $z = a$. Esto sucede si y solo si $(z-a)^k f(z)$ tiene un desarrollo en serie de potencias centrado en $z = a$ que empieza con coeficiente $b_0 \neq 0$:

$$(z-a)^k f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n$$

Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^{n-k} = \sum_{m=-k}^{+\infty} a_m (z-a)^m$$

donde, reindexando con $m = n - k$ se obtiene $a_m = b_{m+k}$. Luego $a_{-k} \neq 0$ y $a_{-m} = 0$ para todo $m \geq k$.

Parte iii): Las singularidades esenciales son por definición las que no son evitables ni polos. Entonces a es singularidad esencial si y solo si no se cumplen las condiciones de las partes i) y ii). Esto sucede cuando no existe un primer $k \geq 0$ tal que $a_{-n} = 0$ para todo $n > k$. Es decir, la sucesión a_{-n} para $n \geq 1$ tiene infinitos términos no nulos. □

13.3.3. Cálculo de los coeficientes del desarrollo de Laurent mediante derivación.

Las fórmulas del corolario 13.3.1 dan fórmulas integrales para calcular los coeficientes del desarrollo de Laurent en cualquier singularidad aislada, en particular para las evitables y los polos.

Pero cuando la singularidad no es esencial, podemos dar también fórmulas con derivadas, para calcular los coeficientes del desarrollo de Laurent. Estas resultan de aplicar las fórmulas que relacionan los coeficientes de desarrollo de potencias con las derivadas n-ésimas de las funciones analíticas. (Ver parte c) del Teorema 11.1.6).

Si la singularidad a es evitable, y si seguimos llamando f a la extensión analítica de f al disco de centro a, entonces el desarrollo de Laurent de f centrado en $z = a$ es el desarrollo en serie de potencias de $z - a$. Luego:

$$a \in \mathbb{C} \text{ evitable } \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \;\; \forall\, n \geq 0$$

Si la singularidad a es un polo de orden k, podemos hacer lo mismo con la extensión analítica de $(z-a)^k f(z)$. Seguimos llamando con el mismo nombre $(z-a)^k f(z)$ a la función extendida. Como en la demostración de la parte ii) del teorema 13.3.2, el coeficiente a_n del desarrollo de Laurent de f es el coeficiente b_{n+k} del desarrollo de Taylor de $(z-a)^k f(z)$. Se deduce:

$$a \in \mathbb{C} \text{ polo de orden } k \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{d^{n+k}}{dz^{n+k}} \; (z-a)^k f(z) \right) \Bigg|_{z=a} \quad \forall\, n \geq -k$$

donde d^m/dz^m indica derivada $m-$ésima respecto de z.

Las fórmulas anteriores son aplicables cuando la singularidad a no es ∞. Si ∞ es una singularidad evitable o un polo, también pueden escribirse fórmulas parecidas, pero con respecto a la función

$$g(w) = f(1/w) \;\; \forall w \in D^*_{1/R}(0)$$

∞ es una singularidad evitable, o un polo de orden k de f, si y solo si 0 lo es de g; y los coeficientes a_n del desarrollo de Laurent de f en ∞ son los coeficientes del desarrollo de g en 0.

Luego se obtiene:

$$\infty \text{ es evitable para } f \Rightarrow a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \geq 0, \quad \text{donde } g(w) = f(1/w).$$

$$\infty \text{ es un polo de orden } k \text{ para } f \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{d^{n+k}}{dw^{n+k}} \; (w^k g(w)) \right) \Bigg|_{w=0} \quad \forall\, n \geq -k$$

donde $g(w) = f(1/w)$ y d^m/dw^m indica derivada $m-$ésima respecto de w.

13.4. *Ejemplos de desarrollo de Laurent.*

Ejercicio 13.4.1. a) Hallar el desarrollo de Laurent centrado en $z = 0$ e indicar el radio interno y el radio externo de la corona de convergencia que incluya al punto $z = 2$, para la función $f(z) = 1/[(z-1)^2(z-3)]$.

b) Hallar el desarrollo de Laurent centrado en $z = 1$ de la misma función que antes, e indicar los radios interno y externo de la corona de convergencia que contenga el punto $z = 2$.

c) Idem, centrado en $z = 3$.

Parte a): La corona de convergencia con centro en $z = 0$ tiene radio interno $r \geq 0$ lo más pequeño posible y radio externo $0 < R \leq +\infty$ lo más grande posible, tales que $f(z)$ es analítica en la corona $\{r < |z| < R\}$.

Como $f \in H(\Omega)$ donde $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$ la corona de convergencia de la serie centrada en $z = 0$ que contenga al punto $z = 2$, (hacer dibujo) tiene radio interno $r = 1$ (su frontera interna pasa por el punto $z = 1$ donde f no es holomorfa), y radio externo $R = 3$ (su frontera externa pasa por el punto $z = 3$).

Entonces hallemos el desarrollo de Laurent de f en $C = \{1 < |z| < 3\}$. Será de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall z \in C$$

Primero descompongamos f en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{-1/2}{(z-1)^2} + \frac{-1/4}{(z-1)} + \frac{1/4}{(z-3)} \qquad (1)$$

Desarrollemos cada una de esas fracciones en potencias de z o de z^{-1}. Para eso recordemos que la suma de una serie geométrica de razón u con $|u| < 1$, es

$$\frac{1}{(1-u)} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \quad \forall\, |u| < 1 \qquad (2)$$

y derivando término a término la serie geométrica se obtiene, para $|u| < 1$ la serie siguiente:

$$\frac{1}{(1-u)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, u^{n-1} \quad \forall\, |u| < 1 \qquad (3)$$

Tomemos la primera de las fracciones simples de (1) y usemos la fórmula (3) para u= 1/z (recordar que en la corona C es $|z| > 1$):

$$\frac{-1/2}{(z-1)^2} = \frac{-1/2}{z^2(1-(1/z))^2} = \frac{-1}{2z^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\, z^{-n-1} = \sum_{m=-2}^{-\infty} \frac{m+1}{2} z^m \qquad (4)$$

En la última igualdad de (4) se hizo un cambio de índice de sumación: $m = -n - 1$. La suma (4) puede empezarse en $m = -1$, ya que para ese valor el coeficiente queda $(m + 1)/2 = 0$.

Tomemos ahora la segunda de las fracciones simples de (1) y usemos la fórmula (2) para u= 1/z (recordar que en la corona C es $|z| > 1$):

$$\frac{-1/4}{(z-1)} = \frac{-1/4}{z(1-(1/z))} = \frac{-1}{4z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\, z^{-n-1} = -\sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{1}{4} z^m \qquad (5)$$

Tomemos finalmente la tercera de las fracciones simples de (1) y usemos la fórmula (2) para u= z/3 (recordar que en la corona C es $|z| < 3$):

$$\frac{-1/4}{(z-3)} = \frac{1/4}{3(1-(z/3))} = \frac{1}{4\times 3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4\times 3^{n+1}}\, z^n \qquad (6)$$

Según la descomposición (1) ahora tenemos que sumar los desarrollos obtenidos en (4), (5) y (6):

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{n+1}{2} - \frac{1}{4}\right) z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\times 3^{n+1}}\, z^n$$

Luego:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{2n+1}{4}\right) z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4 \times 3^{n+1}}\, z^n$$

Por lo tanto tenemos

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall\, z \text{ tal que } 1 < |z| < 3$$

donde

$$a_n = \frac{2n+1}{4} \quad \text{si } n \leq -1; \quad a_n = \frac{1}{4 \times 3^{n+1}} \quad \text{si } n \geq 0. \quad \square$$

Parte b): La función $f(z) = 1/[(z-1)^2(z-3)]$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$. La máxima corona centrada en $z = 1$, que contiene al punto $z = 2$, y donde f es analítica, es entonces (hacer dibujo) la que tiene radio interno 0 y radio externo 2. Su frontera exterior pasa por el punto $z = 3$ donde f no es analítica, y su frontera interior es el punto $z = 1$ donde f no es analítica, y que es el centro de la corona. La corona es entonces el entorno pinchado $D_2^*(1)$ de centro $z = 1$ y radio 2.

Como $z = 1$ es un polo de orden 2 para f, usando la parte b) del teorema 13.3.2, el desarrollo en serie de Laurent de f en el entorno pinchado centrado en $z = 1$ será de la forma:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{n=-2}^{+\infty} a_n (z-1)^n, \quad \forall\, z \in D_2^*(1), \quad \text{con } a_{-2} \neq 0$$

Encontraremos el desarrollo en serie de potencias centrado en $z = 1$ de la función $1/(z-3)$ en el disco $D_2(1)$ donde $1/(z-3)$ es analítica. Al dividirlo después término a término entre $1/(z-1)^2$, quedará el desarrollo de Laurent centrado en $z = 1$ de la función f.

Recordando que la serie geométrica de razón u, con $|u| < 1$, converge a $1/(1-u)$, y observando que $|(z-1)/2| < 1$ cuando $z \in D_2(1)$, se deduce:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{-1}{2-(z-1)} = \frac{-1}{2(1-(z-1)/2)} = \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2^{n+1}}\, (z-1)^n \quad \forall\, z \in D_2(1)$$

Dividiendo término a término entre $(z-1)^2$ se obtiene:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{-1}{2^{m+1}}\, (z-1)^{m-2} = \sum_{n=-2}^{+\infty} = \frac{-1}{2^{n+3}}\, (z-1)^n, \quad \forall\, z \in D_2^*(1)$$

que es el desarrollo buscado. Se observa que $a_{-2} = -1/2 \neq 0$. $\square$

Parte c): La función $f(z) = 1/[(z-1)^2(z-3)]$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$. La máxima corona centrada en $z = 3$, que contiene al punto $z = 2$, y donde f es analítica, es entonces (hacer dibujo) la que tiene radio interno 0 y radio externo 2. Su frontera exterior pasa por el punto $z = 1$ donde f no es analítica, y su frontera interior es el punto $z = 3$ donde f no es analítica, y que es el centro de la corona. La corona es entonces el entorno pinchado $D_2^*(3)$ de centro $z = 3$ y radio 2.

Como $z = 3$ es un polo de orden 1 para f, usando la parte b) del teorema 13.3.2, el desarrollo en serie de Laurent de f en el entorno pinchado centrado en $z = 3$ será de la forma:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n(z-3)^n, \quad \forall\, z \in D_2^*(3), \quad \text{con } a_{-1} \neq 0$$

Encontraremos el desarrollo en serie de potencias centrado en $z = 3$ de la función $1/(z-1)^2$ en el disco $D_2(3)$ donde $1/(z-1)^2$ es analítica. Al dividirlo después término a término entre $1/(z-3)$, quedará el desarrollo de Laurent centrado en $z = 3$ de la función f.

Recordando que la derivada término a término $\sum_{n=1}^{+\infty} nu^{n-1}$ de la serie geométrica de razón u, con $|u| < 1$, converge a $1/(1-u)^2$, y observando que $|(z-3)/2| < 1$ cuando $z \in D_2(3)$, se deduce:

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{[2+(z-3)]^2} = \frac{1}{2^2[1-(-(z-3)/2)]^2} = \frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{z-3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{2^{n+1}}\,(z-3)^{n-1} \quad \forall\, z \in D_2(3)$$

Dividiendo término a término entre $(z-3)$ se obtiene:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}m}{2^m}\,(z-3)^{m-2} = \sum_{n=-1}^{+\infty} = \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{2^{n+2}}\,(z-3)^n, \quad \forall\, z \in D_2^*(1)$$

que es el desarrollo buscado. Se observa que $a_{-1} = 1/2 \neq 0$. $\square$