14. Funciones meromorfas y teoremas de aproximación.

14.1. *Funciones meromorfas.*

Definición 14.1.1. Funciones meromorfas. Una función f se dice que es *meromorfa en el abierto* Ω y se denota $f \in M(\Omega)$ si f es analítica en Ω excepto a lo sumo en una cantidad de puntos que sean todos singularidades aisladas evitables o polos.

(Por definición, no se admiten singularidades no aisladas, ni singularidades aisladas esenciales.)

Nota: Toda función analítica en Ω es meromorfa, porque por convención, para ser meromorfa en Ω se admite que no haya puntos excepcionales en Ω donde f no sea analítica.

14.1.2. Ejemplos de funciones meromorfas.

1. El cociente $f(z)/g(z)$ de dos funciones holomorfas no idénticamente nulas en Ω es una función meromorfa en Ω. En efecto, las singularidades son los ceros de g que son aislados y de orden $k \geq 1$. Entonces todas las singularidades del cociente o son evitables (si son también ceros de f del mismo o mayor orden) o son polos.

2. En particular una función racional es meromorfa en el plano complejo. Además para una función racional, ∞ es o bien una singularidad evitable, o bien un polo. Se dice entonces que la función racional es meromorfa en el plano complejo compactificado $\overline{\mathbb{C}}$. Veamos que esta propiedad caracteriza a las funciones racionales.

Teorema 14.1.3. Caracterización de polinomios y funciones racionales.

a) *Una función entera (analítica en el plano complejo) que tenga en infinito un polo o una singularidad evitable, es un polinomio y recíprocamente.*

b) *Una función meromorfa en el plano complejo que tenga en infinito un polo o una singularidad evitable, es una función racional y recíprocamente.*

Demostración:

Parte a): El recíproco es inmediato: basta verificar que todo polinomio de grado $k \geq 0$ es una función entera que tiene en ∞ una singularidad evitable (si $k = 0$) o un polo de orden k (si $k \geq 1$).

Ahora veamos el directo: Sea f una función entera que tiene en ∞ una singularidad evitable o un polo de orden k. Probemos que f es un polinomio.

Primer caso: Si ∞ es una singularidad evitable de f entonces, por definición, existe el número complejo $L = \lim_{z\to\infty} f(z)$. Luego f está acotada en un entorno de ∞, es decir para todo $|z| > R$. Por otra parte como f es analítica en el plano complejo, es continua, luego está acotada en el compacto $|z| \leq R$. Entonces f es entera y acotada en todo el plano complejo. Por el teorema de Liouville (ver teorema 11.4.6) f es constante, es decir, un polinomio de grado 0.

Segundo caso: Ahora veamos el caso en que ∞ sea un polo de orden $k \geq 1$. Por la parte b) del corolario 13.3.1 y por el teorema 13.3.2, el desarrollo de Laurent de f en ∞ es:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}; \quad a_{-k} \neq 0 \quad (1)$$

Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n; \quad \text{donde } a_{-k} \neq 0 \quad (2)$$

g es entera (analítica en todo el plano complejo) porque es diferencia de f, que es una función entera por hipótesis, menos un polinomio de grado k en z. Además, por (1), la función $g(z)$ es igual a la suma de la serie de la derecha en (1). Luego obtenemos:

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = \lim_{w\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = a_0 \qquad (3)$$

Hemos llamado $w = 1/z$. El último límite en (3) es a_0 porque la serie de potencias de w define una función analítica que es continua. Entonces su límite cuando $w \to 0$ es el valor de la suma de serie de potencias en $w = 0$.

De la igualdad (3) deducimos que g es una función entera que tiene en ∞ una singularidad evitable. Por lo demostrado en el primer caso g es constante. Luego es igual a su límite a_0.

Tenemos $g(z) = a_0\ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Sustituyendo en (2) se deduce:

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n; \quad \text{donde } a_{-k} \neq 0$$

Hemos demostrado que f es un polinomio de grado k como queríamos.

Parte b): El recíproco es inmediato: como vimos en la sección 12.1 toda función racional $f(z) = P(z)/Q(z)$ es analítica en todo el plano complejo, excepto en las raíces del denominador $Q(z)$, que son polos de orden igual a la multiplicidad de la raíz. Además ∞ es una singularidad evitable si $grado(P) \leq grado(Q)$, o en caso contrario es un polo de orden $grado(P) - grado(Q)$.

Antes de demostrar el directo, enunciamos y probamos la siguiente afirmación:

14.1.4. Afirmación: *Si f es una función meromorfa en el plano complejo que tiene en ∞ una singularidad aislada, entonces la cantidad de polos de f en el plano complejo es finita.*

Prueba de la afirmación: Como ∞ es una singularidad aislada de f, entonces f es analítica en el entorno pinchado de infinito $D^*_{1/R}(\infty)$, es decir, f es analítica para todo $|z| > R$. Luego, las otras singularidades de f están en el compacto $K = \{|z| \leq R\}$.

Además sabemos que f es meromorfa en el plano complejo. Luego, las otras singularidades son todas polos que están en el compacto $K = \{|z| \leq R\}$. Probemos que son a lo sumo una cantidad finita. En efecto, cada punto $z_0 \in K$ tiene un entorno $D_r(z_0)$ con $r > 0$ tal que la función f es analítica, o bien en todo el entorno $D_r(z_0)$ (si z_0 no es singularidad), o bien en el entorno pinchado $D^*_r(z_0)$ (si z_0 es un polo). Cubriendo el compacto K con una cantidad finita de estos entornos [7], se deduce que la cantidad de polos en K es finita. Hemos probado la afirmación 14.1.4.

Ahora demostremos el directo de la parte b) del teorema 14.1.3: Por hipótesis f es una función meromorfa en el plano complejo que tiene en ∞ o bien un polo, o bien una singularidad evitable. Probemos que f es una función racional.

[7]Estamos usando la siguiente propiedad de los conjuntos compactos K: si se define para cada punto $z_0 \in K$ un entorno abierto $D(z_0)$ que contiene a z_0 (no pedimos que $D(z_0)$ esté contenido en K), entonces existe una cantidad finita $D_1, D_2, \ldots, D_p$ de estos entornos que cubren todo K, es decir: $\cup_{i=0}^{p} D_i \supset K$.

Por la afirmación 14.1.4 los polos de f en el plano complejo son una cantidad finita. Sean entonces $a_1, a_2, \ldots, a_p$ los polos complejos de f cuyos órdenes llamamos $k_1, k_2, \ldots, k_p$ respectivamente.

Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \ldots (z - a_p)^{k_p} f(z) \quad (4)$$

Esta función auxiliar tiene singularidades aisladas en $a_1, a_2, \ldots, a_p$ e ∞. Por un lado ∞ es un polo o una singularidad evitable de g porque es un polo o una singularidad evitable de f.

Por otro lado, sabemos que a_i es un polo de orden k_i de f. Usando la definición del orden de un polo en 12.4.3, se deduce que existe

$$\lim_{z \to a_i} (z - a_i)^{k_i} f(z)$$

Luego, usando (4), existe el complejo

$$L_i = \lim_{z \to a_i} g(z)$$

Aplicando el teorema de caracterización de singularidades evitables (teorema 12.3.5), se deduce que g tiene en $a_1, a_2, \ldots, a_p$ singularidades evitables, y por lo tanto existe una extensión analítica de g a todo el plano complejo. Seguimos llamando g a esta extensión analítica. Deducimos que g es entera y tiene en ∞ o bien un polo o bien una singularidad evitable. Por lo demostrado en la parte a) de este teorema, se deduce que $g(z)$ es un polinomio $P(z)$.

$$g(z) = P(z) \ \ \forall \, z \in \mathbb{C}$$

Sustituyendo en (4), se tiene

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \ldots (z - a_p)^{k_p}}$$

Hemos demostrado que f es una función racional como queríamos. $\square$

Teorema 14.1.5. Teorema pequeño de Picard.

Toda función entera (analítica en todo el plano complejo) *no constante tiene como recorrido todo el plano complejo excepto a lo sumo un punto.*

14.1.6. Ejemplos.

La función e^z recorre todo el plano complejo excepto el 0.

La función z^2 recorre todo el plano complejo sin excepciones.

Los polinomios $P(z)$ de grado $k \geq 1$ recorren todo el plano complejo, por el teorema fundamental del álgebra aplicado a $P(z) - a$ (donde a es un complejo fijo cualquiera). En efecto, se deduce que existe para todo $a \in \mathbb{C}$ alguna raíz de $P(z) - a$, y por lo tanto alguna preimagen por P del complejo a. Entonces el recorrido de $P(z)$ incluye a a y como a es cualquiera, el recorrido de $P(z)$ es todo el plano complejo.

Probaremos el teorema pequeño de Picard a partir del teorema (grande) de Picard, enunciado en 12.5.3. Advertimos que esto no es una demostración porque el teorema grande de Picard no ha sido probado aquí. De todas formas no usaremos el teorema pequeño ni el grande de Picard en el futuro desarrollo de la teoría. Por una prueba de este teorema puede verse el libro de Rudin, W. Análisis Real y Complejo.

Prueba del teorema pequeño de Picard admitiendo el teorema 12.5.3:
Si f es entera, entonces ∞ es una singularidad aislada.

Primer caso: Si ∞ es evitable o un polo entonces, por lo demostrado en 14.1.3, f es un polinomio. Si no es constante, tiene grado $k \geq 1$. En ese caso, repitiendo lo visto en 14.1.6, el recorrido de f es todo el plano complejo sin puntos excepcionales; lo que prueba la tesis.

Segundo caso: Si ∞ es una singularidad esencial entonces, admitiendo el teorema 12.5.3, la imagen de cualquier entorno $D^*_{1/R}(\infty)$ de ∞ es todo el plano complejo excepto a lo sumo un punto, que es lo queríamos probar. □

14.2. *Aproximación por funciones racionales.*

Definición 14.2.1. Convergencia uniforme en compactos.
Decimos que una sucesión f_n de funciones complejas definidas en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ *se aproxima en compactos (o converge uniformemente en compactos de Ω) a una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$*, si para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un N (que puede depender del compacto K y del número ϵ dados, pero que no depende de z) tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f(z) - f_n(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K$$

Definición 14.2.2. Aproximación por funciones racionales.
Decimos que una función compleja f definida en el abierto Ω *se aproxima en compactos de Ω por funciones racionales* cuando existe una sucesión de funciones racionales f_n definidas en Ω (por lo tanto sus polos no están en Ω) que se aproxima en compactos (o converge uniformemente en compactos de Ω) a f.

Veamos que toda función meromorfa en el plano complejo que tenga en infinito una singularidad aislada, puede aproximarse en compactos por funciones racionales, y que, en particular, si la función es entera (analítica en todo el plano complejo), entonces puede aproximarse por polinomios.

Teorema 14.2.3. Aproximación de funciones meromorfas por funciones racionales.
a) Si f es entera entonces f se aproxima en compactos de $\mathbb{C}$ por polinomios.

b) Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$. Sea Ω el abierto que se obtiene de $\mathbb{C}$ retirando todos los polos de f.

Si f tiene en ∞ una singularidad aislada entonces f se aproxima en compactos de Ω por funciones racionales.

Demostración:
Parte a) Si f es entera, entonces tiene un desarrollo en serie de potencias centrado, por ejemplo, en $z = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (2)$$

Esta serie de potencias tiene disco de convergencia todo el plano complejo y converge uniformemente en compactos (ver nota al final del parágrafo 11.1.2). Esto significa que si llamamos P_N a la reducida N-ésima de la serie de potencias (2), se cumple

$$P_N \to f \text{ uniformemente en compactos}$$

en particular en compactos contenidos en Ω. Observemos que P_N es un polinomio de grado a lo sumo N. Hemos probado la parte a).

Parte b) Como f tiene en ∞ una singularidad aislada, la cantidad de polos de f es finita. (ver la Afirmación 14.1.4).

Denotemos como $a_1, a_2, \ldots, a_p$ a los polos de f y con $k_1, k_2, \ldots, k_m$ a sus órdenes respectivos. Llamemos

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_p$$

Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \ldots (z - a_p)^{k_p} f(z) \quad (1)$$

Esta función auxiliar tiene singularidades aisladas en $a_1, a_2, \ldots, a_p$ e ∞.

Por otro lado, sabemos que a_i es un polo de orden k_i de f. Usando la definición del orden de un polo en 12.4.3, se deduce que existe

$$\lim_{z \to a_i} (z - a_i)^{k_i} f(z)$$

Luego, usando (1), existe el complejo

$$L_i = \lim_{z \to a_i} g(z)$$

Aplicando el teorema de caracterización de singularidades evitables (teorema 12.3.5), se deduce que g tiene en $a_1, a_2, \ldots, a_p$ singularidades evitables, y por lo tanto existe una extensión analítica de g a todo el plano complejo. Seguimos llamando g a esta extensión analítica. Deducimos que g es entera. Por lo demostrado en la parte a) la función entera g se aproxima por una sucesión de polinomios P_N:

$$P_N \to g \text{ uniformemente en compactos de } \mathbb{C}$$

en particular en compactos contenidos en Ω.

Llamemos $Q(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \ldots (z - a_p)^{k_p}$, es un polinomio definido y que no se anula en Ω.

Por (1) se cumple

$$f(z) = \frac{g(z)}{Q(z)} = \lim_{N \to +\infty} \frac{P_N(z)}{Q(z)} \quad \forall z \in \Omega$$

El cociente P_N/Q es una función racional en Ω. Basta ver que la convergencia es uniforme en compactos contenidos en Ω. En efecto, dado un compacto $K \subset \Omega$, sea

$$M = \max_{z \in K} \left| \frac{1}{Q(z)} \right|$$

Este máximo $M > 0$ existe porque la función $1/Q(z)$ es analítica en Ω ya que el denominador no se anula en Ω. Luego su módulo, que no se anula, tiene un máximo positivo en el compacto $K \subset \Omega$. Dado $\epsilon > 0$ como por construcción $P_N \to g$ uniformemente en compactos, existe N_0 (independiente de z) tal que

$$N > N_0 \Rightarrow |g(z) - P_N(z)| < \frac{\epsilon}{M} \quad \forall z \in K$$

Luego:

$$N > N_0 \Rightarrow \left| f(z) - \frac{P_N(z)}{Q(z)} \right| = \frac{|g(z) - P_N(z)|}{|Q(z)|} < \frac{\epsilon\, M}{M} = \epsilon \quad \forall z \in K$$

Entonces se cumple, usando la definición 14.2.1, que la sucesión de funciones racionales P_N/Q aproxima en compactos a f como queríamos demostrar. $\Box$

14.3. *Convergencia uniforme en compactos de funciones analíticas.*

En el espacio funcional denotado como $C_\omega(\Omega)$, formado por todas las funciones analíticas en el abierto Ω, se define como topología, es decir la forma de aproximar funciones, de acuerdo a la definición 14.2.1 de convergencia uniforme en compactos de Ω.

La parte a) del siguiente teorema dice que con esta topología el espacio $C_\omega(\Omega)$ es cerrado: o sea el límite (con la convergencia uniforme en compactos) de una sucesión de funciones analíticas en Ω es también una función de analítica en Ω.

Además, en sus partes b) y c), el siguiente teorema dice que las derivadas de cualquier orden de las funciones $f_n \to f$ en $C_\omega(\Omega)$ también se aproximan uniformemente en compactos a la derivada del límite f. Esto significa que la convergencia en el espacio funcional $C_\omega(\Omega)$ implica la convergencia C^∞ en compactos (es decir la aproximación uniforme en compactos de las funciones y la de todas sus derivadas), que a su vez implica la convergencia C^k (es decir la aproximación uniforme en compactos de las funciones y la de todas sus derivadas hasta orden k inclusive.)

Teorema 14.3.1. Topología C_ω en el espacio de las funciones analíticas.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y sea una sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$ que converge uniformemente en compactos de Ω a una función f. (Ver la definición de convergencia uniforme en compactos en 14.2.1.)

Entonces:

a) $f \in H(\Omega)$

b) *La sucesión de derivadas f'_n converge uniformemente en compactos de Ω a la derivada f'.*

c) *La sucesión de derivadas k-ésimas $f_n^{(k)}$ converge uniformemente en compactos de Ω a la derivada $k-$ésima $f^{(k)}$.*

Demostración: En lo que sigue denotamos

$$f_n \to f \text{ en } C_\omega(\Omega)$$

si f_n converge a f uniformemente en compactos de Ω de acuerdo a la definición 14.2.1.

Parte a): Dividiremos la prueba en tres pasos:

1. Probar que f es continua en Ω.

   Sea $z_0 \in \Omega$ y sea $\overline{D}$ un disco cerrado (compacto) contenido en Ω y centrado en z_0. Para todo $\epsilon > 0$, como por hipótesis $f_n \to f$ en $C_\omega(\Omega)$, podemos aplicar la definición 14.2.1, al compacto $\overline{D}$. Deducimos que existe N (independiente de z) tal que

   $$n \geq N \;\Rightarrow\; |f(z) - f_n(z)| < \epsilon \quad \forall z \in \overline{D}$$

   Fijo $n = N$, y se cumple:

   $$|f(z) - f_N(z)| < \epsilon \quad \forall z \in \overline{D}, \quad ; \text{ en particular para } z = z_0. \qquad (1)$$

   Por otra parte como la función $f_N(z)$ es por hipótesis analítica en Ω, es continua. Aplicando la definición de continuidad de una función en el punto $z_0 \in \Omega$, se obtiene, para todo $\epsilon > 0$, la existencia de $\delta > 0$ tal que:

   $$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f_N(z) - f_N(z_0)| < \epsilon \quad (2)$$

   El número $\delta > 0$ puede suponerse menor que el radio del disco $\overline{D}$. (Pues si no lo fuera, cambio δ por otro $\delta' > 0$ menor que δ y que sí sea δ' menor que el radio del disco $\overline{D}$. Si el δ viejo implica (2) entonces δ', que es menor que δ, también implica (2).) Entonces $|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow z \in \overline{D}$ y podemos aplicar las desigualdades (1) y (2).

   Reuniendo (1) y (2) se deduce:

   $$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow$$

   $$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < 3\epsilon = \epsilon^*$$

   donde, dado $\epsilon^* > 0$ se elige $\epsilon = \epsilon^*/3$.

   Concluimos que dado $\epsilon^* > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

   $$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon^*$$

   Esto por definición es la continuidad de f en z_0. Como z_0 es cualquiera en Ω se deduce que f es continua en Ω.

2. Probar que para toda curva $\gamma \subset \Omega$

   $$\lim_{n \to +\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$$

   El soporte γ^* de la curva γ es un conjunto compacto en Ω. Aplicando la definición 14.2.1 de convergencia uniforme en compactos se obtiene que para todo $\epsilon > 0$ existe N independiente de z, tal que

   $$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \;\; \forall z \in \gamma^*$$

   Acotemos la diferencia de las integrales de f_n y de f, en módulo:

   $$n \geq N \;\Rightarrow\; \left| \int_\gamma (f_n(z) - f(z))\, dz \right| \leq \int |f_n(z) - f(z)|\, |dz| \leq \epsilon L < \epsilon *$$

donde L es la longitud de la curva γ y, dado $\epsilon^* > 0$ se elige $\epsilon < \epsilon^*/L$. Lo probado se resume en la afirmación siguiente:

Dado $\epsilon^* > 0$ existe N tal que

$$n \geq N \ \Rightarrow \ \left| \int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| < \epsilon*$$

Esto por definición de límite, prueba lo que queríamos en el paso 2.

3. Probar que $f \in H(\Omega)$.

   Basta probar que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en Ω y homotópica un punto en Ω. En efecto, aplicando luego el teorema de Morera (ver teorema 11.3.6) se deduce que $f \in H(\Omega)$ que es lo que queremos probar.

   Tomemos una curva cerrada $\gamma \subset \Omega$, homotópica a un punto en Ω. Por hipótesis $f_n \in H(\Omega)$ para todo $n \geq 1$. Aplicando el teorema de Cauchy global a f_n (ver teorema 11.3.1) se deduce que:

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz = 0 \quad \forall\, n \geq 1$$

   Tomando límite cuando $n \to +\infty$ y usando lo probado en el paso 2, se deduce

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

   terminando la prueba del paso 3.

Parte b): Probar que $f_n' \to f'$ en $C_\omega(\Omega)$.

Dado un compacto $K \subset \Omega$ consideremos $R = \text{ dist}\,(K, \Omega^c) = \min\{|z - z_0| : z_0 \in K, z \notin \Omega\} > 0$ y construyamos el compacto

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} : \text{ dist}\,(z, K) \leq R/2\}$$

donde la distancia $\text{dist}\,(z, K) = \min\{|z - z_0| : z_0 \in K\}$. Por construcción ningún punto del compacto K_1 puede estar en el complemento de Ω. Entonces $K_1 \subset \Omega$.

Para cada $z_0 \in K$ fijo, aplicamos la desigualdad de Cauchy (ver teorema 11.4.4) a la derivada primera de la función $f_n - f$ en el disco compacto $\overline{D_{R/2}(z_0)}$. Obtenemos:

$$|f_n'(z_0) - f'(z_0)| \leq \frac{2M(R/2)}{R} \leq \frac{2M_n}{R} \quad (3)$$

donde $M(R/2) = \max\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \overline{D_{R/2}(z_0)}\} \leq M_n$ siendo

$$M_n = \max\{|f_n(z) - f(z)| : z \in K_1\}$$

Para obtener la desigualdad (3) se usó que $M(R/2) \leq M_n$ porque $\overline{D_{R/2}(z_0)} \subset K_1$.

Por hipótesis $f_n \to f$ en $C_\omega(\Omega)$. Luego, aplicando la definición de convergencia uniforme en compactos (definición 14.2.1) al compacto K_1, se deduce que para todo $\epsilon > 0$ existe N (independiente de z) tal que

$$n \geq N \ \Rightarrow \ |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K_1 \ \ \Rightarrow \ M_n < \epsilon$$

Sustituyendo en (3) se concluye que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f'_n(z_0) - f'(z_0)| < \frac{2\epsilon}{R} = \epsilon^* \qquad (4)$$

donde, dado $\epsilon^* > 0$ se eligió $\epsilon = R\epsilon^*/2$.

Resumiendo, hemos probado que para cualquier compacto $K \subset \Omega$ dado, y para cualquier $\epsilon^* > 0$ existe N (independiente de z) tal que se cumple (4). Por definición de convergencia uniforme en compactos (ver definición 14.2.1), esto significa que

$$f'_n \to f' \text{ en } C_\omega(\Omega)$$

que es lo que queríamos demostrar en la parte b) de la tesis.

Parte c): Deducir que para todo natural $k \geq 0$ se cumple: $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ en $C_\omega(\Omega)$.

Por inducción completa en k. Por hipótesis vale para $k = 0$. En la parte b) hemos probado que vale para $k = 1$. En realidad, aplicando la parte b) a la sucesión de funciones $f_n^{(h)}$ en lugar de f_n, hemos probado que si

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \text{ en } C_\omega(\Omega) \qquad (5)$$

es válida para algún $k = h$, entonces también vale (5) para $k = h+1$. Por el principio de inducción completa (5) es válida para todo k natural. $\Box$

Proposición 14.3.2. Suma y producto de límites uniformes de funciones analíticas.

Sean $f_n, g_n \in H(\Omega)$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ uniformemente en compactos de Ω. (Ver definición 14.2.1 de convergencia uniforme en compactos).

Entonces

$$f_n + g_n \to f + g \text{ uniformemente en compactos.}$$

$$f_n g_n \to fg \text{ uniformemente en compactos.}$$

Demostración: Dado un compacto $K \subset \Omega$ y dado $\epsilon > 0$, aplicando la definición 14.2.1, a las sucesiones f_n y g_n respectivamente, existen N_1 y N_2 (independientes de z) tales que

$$n \geq N_1 \;\Rightarrow\; |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall\, z \in K$$

$$n \geq N_2 \;\Rightarrow\; |g_n(z) - g(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K$$

Tomando N igual al mayor de N_1 y de N_2 se deduce que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z) - f(z)| < \epsilon,\; |g_n(z) - g(z)| < \epsilon \quad \forall\, z \in K \qquad (1)$$

Luego, de la propiedad triangular del módulo y de (1) se deduce:

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z) + g_n(z) - (f(z) + g(z))| \leq |f_n(z) - f(z)| + |g_n(z) - g(z)| < 2\epsilon = \epsilon^* \quad \forall\, z \in K$$

donde, dado $\epsilon^* > 0$ se elige $\epsilon = \epsilon^*/2$. Esto prueba que la suma de las funciones converge uniformemente en compactos a la suma de los límites.

Ahora probemos lo mismo para el producto. De la propiedad triangular del módulo y de (1) se deduce:

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z))| \leq$$

$$\leq |f_n g_n - f g_n| + |f g_n - f g| = |g_n||f_n - f| + |f||g_n - g| \leq$$
$$\leq (|g_n - g| + |g|)\,|f_n - f| + |f|\,|g_n - g| \leq (M_g + \epsilon)\epsilon + M_f \epsilon < \epsilon^* \quad \forall\, z \in K$$

donde M_g y M_f son los máximos de $|g|$ y $|f|$ respectivamente en K y , dado $\epsilon^* > 0$ se elige $\epsilon > 0$ de modo que sea $\epsilon < 1$ y $\epsilon < \epsilon^*/(M_g + 1 - M_f)$. En resumen, hemos probado que dado un compacto $K \subset \Omega$ y dado $\epsilon > 0$ existe N independiente de z tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z))| < \epsilon^* \quad \forall\, z \in K$$

Por la definición 14.2.1, esto significa que $f_n g_n \to fg$ uniformemente en compactos de Ω, como queríamos demostrar. $\Box$

14.4. *Familias normales.*

Definición 14.4.1. Familia normal.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y sea una sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$, $n \geq 1$. La sucesión f_n se llama *familia normal* si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $M \geq 0$ (que puede depender del compacto K pero que es independiente de n y de z), tal que:

$$|f_n(z)| \leq M \quad \forall\, n \geq 1, \;\; \forall\, z \in K$$

Esta propiedad se llama *equi-acotación en compactos.*

Dicho de otra manera: una familia es normal si es equi-acotada en compactos.

Más adelante, en la demostración del teorema de Montel (teorema 14.4.2) se prueba, no solo la tesis de ese teorema, sino estas otras propiedades que cumplen las familias normales:

Propiedades de las familias normales:

Si $f_n \in H(\Omega)$ es una familia normal, entonces:

- f'_n *también es una familia normal.* (Ver punto 1 de la demostración del teorema 14.4.2.)
- f_n *es una familia equicontinua en compactos.* (Ver punto 2 de la demostración del teorema 14.4.2.)
- Dada una cantidad numerable $\{z_i \,:\, i \geq 1\}$ de puntos en Ω, *existe una subsucesión f_{j_n} construida por el procedimiento diagonal, tal que $f_{j_n}(z_i)$ converge cuando $n \to +\infty$ para todo z_i fijo.* (Ver punto 3 de la demostración del teorema 14.4.2.)
- f_n *tiene alguna subsucesión de Cauchy uniforme en compactos.* (Ver punto 4 de la demostración del teorema 14.4.2.)
- *Toda sucesión de Cauchy uniforme en compactos es convergente uniformemente en compactos.* (Ver punto 5 de la demostración del teorema 14.4.2.)
- De las dos afirmaciones anteriores se deduce que f_n *tiene una subsucesión uniformemente convergente en compactos.* (Esto es la tesis del teorema de Montel en 14.4.2.)

Nota: En el ejemplo 14.4.3, se muestra que una sucesión f_n que sea una familia normal, aunque tiene subsucesiones convergentes, no tiene necesariamente que ser convergente ella misma.

Teorema 14.4.2. Teorema de Montel.
Si la sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$ es una familia normal, entonces tiene alguna subsucesión que es uniformemente convergente en compactos de Ω.

Demostración: Desarrollaremos la demostración en varios pasos:

1. **Probar que f'_n es también una familia normal.**

   Dado un compacto $K \subset \Omega$ definamos el número positivo R igual a la distancia de K al complemento de Ω:
   $$R = \text{mín}\{|z_0 - z| : z_0 \in K,\ z \notin \Omega\} > 0$$
   Definimos el compacto
   $$K_1 = \{z : |z - z_0| \leq R/2, \ \text{ para algún } z_0 \in K\} \qquad (1)$$
   Obsérvese que $K_1 \subset \Omega$.

   Por hipótesis la sucesión f_n es normal, es decir equiacotada en compactos. Entonces en particular para el compacto K_1 existe $M > 0$ tal que
   $$|f_n(z)| \leq M \ \ \forall\, n \geq 1, \ \ \forall\, z \in K_1 \qquad (2)$$
   Para todo $z_0 \in K$, aplicando la desigualdad de Cauchy en el disco $\overline{D_{R/2}(z_0)} \subset K_1$ se obtiene
   $$\left|f'_n(z_0)\right| \leq \frac{M_n}{R/2} \leq \frac{2M}{R} \qquad (3)$$
   donde $M_n = \text{máx}_{z \in \overline{D_{R/2}(z_0)}} |f_n(z)| \leq M$, debido a la desigualdad (2) y a que $\overline{D_{R/2}(z_0)} \subset K_1$.

   La afirmación (3) prueba que existe el número $2M/R$ (independiente de z_0 y de n por construcción), que es cota superior de $|f'_n(z_0)|$ para todo $z_0 \in K$ y para todo $n \geq 1$. Esto termina de probar que f'_n es una familia normal como queríamos en el paso 1.

2. **Probar que f_n es equicontinua en todo compacto $K \subset \Omega$.** Esto significa probar que para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (independiente de z y de n) tal que
   $$z_0 \in K,\ |z - z_0| < \delta \ \ \Rightarrow |f_n(z) - f_n(z_0)| < \epsilon \quad \forall n \geq 1 \quad \text{(a probar) (4)}$$
   Sea K_1 el conjunto compacto definido en (1). Como ya probamos en el paso 1 que f'_n es una familia normal existe, en particular para el compacto K_1 una cota $k > 0$ que cumple:
   $$|f'_n(z)| \leq k \ \ \forall z \in K_1, \ \ \forall\, n \geq 1 \qquad (5)$$
   Elijamos $0 < \delta < \epsilon/k, \ \ \delta < R/2$. Obsérvese que si $z_0 \in K$ entonces $D_\delta(z_0) \subset D_{R/2}(z_0) \subset K_1$. Tomando $z_1 \in D_\delta(z_0)$, aplicando la regla de Barrow al integrar en el segmento $[z_0, z_1]$ (contenido en $D_\delta(z_0) \subset K_1$), y usando (5), se deduce que:
   $$|z_1 - z_0| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f_n(z_1) - f_n(z_0)| = \left| \int_{[z_0,z_1]} f'(z)\, dz \right| \leq k|z_1 - z_0| < k\delta < \epsilon$$
   Esta es la afirmación (4) que queríamos demostrar en el paso 2.

3. Sea $z_1, z_2, z_3, \dots, z_i, \dots$ una sucesión densa en Ω, por ejemplo el conjunto numerado de todos los complejos en Ω con partes real e imaginaria racionales. El objetivo de este paso no requiere que la sucesión de puntos sea densa, pero vamos a necesitar la densidad para el paso 4. Probaremos la siguiente afirmación para cualquier sucesión dada de puntos en Ω:

   Probar que existe $j_n \to +\infty$ tal que para todo z_i fijo la subsucesión $f_{j_n}(z_i)$ es convergente. Es decir:

   $$\lim_{n\to+\infty} f_{j_n}(z_i) = L_i \in \mathbb{C} \quad \forall i \geq 1. \quad \text{(a probar)} \quad (6)$$

   Consideremos la sucesión dada f_n, que llamamos $f_{n,0}$ para indicar que es la primera subsucesión (la sucesión dada es subsucesión de sí misma).

   Al evaluar $f_{n,0}(z)$ en $z = z_1$ se tiene una sucesión de complejos acotada (porque, por definición de familia normal, está acotada en el compacto $\{z_1\}$). Luego, existe una subsucesión convergente cuando se la evalúa en $z = z_1$ [8] Llamemos $f_{n,1}$ a esta subsucesión de $f_{n,0}$, que cumple:

   $$\lim_{n\to+\infty} f_{n,1}(z_1) = L_1 \in \mathbb{C}$$

   Ahora repitamos el procedimiento usando la sucesión $f_{n,1}$ y el punto z_2, en vez de la sucesión $f_{n,0}$ y el punto z_1. Existe $f_{n,2}$ que es subsucesión de $f_{n,1}$, que cumple

   $$\lim_{n\to+\infty} f_{n,2}(z_2) = L_2 \in \mathbb{C}$$

   Además como $f_{n,2}$ es una subsucesión de $f_{n,1}$, la cual evaluada en z_1 tenía límite L_1, se deduce[9] que

   $$\lim_{n\to+\infty} f_{n,2}(z_1) = L_1 \in \mathbb{C}$$

   Aplicando el mismo procedimiento a la subsucesión $f_{n,2}$ en el punto z_3 se deduce que existe $f_{n,3}$, subsucesión de $f_{n,2}$ tal que:

   $$\lim_{n\to+\infty} f_{n,3}(z_3) = L_3 \in \mathbb{C}$$

   $$\lim_{n\to+\infty} f_{n,3}(z_2) = L_2 \in \mathbb{C}$$

   $$\lim_{n\to+\infty} f_{n,3}(z_1) = L_1 \in \mathbb{C}$$

   Por inducción completa, existe para cada natural $i \geq 1$ una sucesión $f_{n,i}$, que es subsucesión de $f_{n,i-1}$ y tal que

   $$\lim_{n\to+\infty} f_{n,i}(z_i) = L_i \in \mathbb{C}$$

   $$\lim_{n\to+\infty} f_{n,i}(z_{i-1}) = L_{i-1} \in \mathbb{C}$$

[8] Toda sucesión de complejos acotada tiene una subsucesión convergente, porque sus partes real e imaginaria son sucesiones acotadas de reales, y esta propiedad es válida en la recta real.

[9] Si una sucesión de complejos es convergente a un límite L entonces toda subsucesión de ella también es convergente al mismo límite L. Esta propiedad se deduce de la misma propiedad para las sucesiones de reales, la cual se demuestra directamente a partir de la definición de límite.

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,i}(z_{i-2}) = L_{i-2} \in \mathbb{C}$$
$$\ldots$$
$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,i}(z_2) = L_2 \in \mathbb{C}$$
$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,i}(z_1) = L_1 \in \mathbb{C}$$

Esto a priori, sólo asegura que si queremos que sea convergente una subsucesión de f_n evaluada en $z = z_1, z_2, \ldots, z_i$, conseguimos una, para tantos puntos z_i como se quiera, pero para una cantidad *finita.*

Lo que queremos demostrar es que existe una misma subsucesión que es convergente cuando se evalúa en cualquiera de todos los z_i, (que son una cantidad numerable pero infinita de puntos).

La subsucesión buscada, si encontramos alguna, podría ser subsucesión al mismo tiempo de todas las subsucesiones ya construidas. Se obtiene por el llamado método diagonal que desarrollamos a continuación:

Escribamos las sucesivas subsucesiones obtenidas por el procedimiento anterior:

$$\begin{array}{lllllll}
f_{1,1}, & f_{2,1}, & f_{3,1}, & \ldots, & f_{n-1,1}, & f_{n,1}, & \ldots \to L_1 \text{ para } z = z_1. \\
f_{1,2}, & f_{2,2}, & f_{3,2}, & \ldots, & f_{n-1,2}, & f_{n,2}, & \ldots \to L_1, L_2 \text{ para } z = z_1, z_2. \\
f_{1,3}, & f_{2,3}, & f_{3,3}, & \ldots, & f_{n-1,3}, & f_{n,3}, & \ldots \to L_1, L_2, L_3 \text{ para } z = z_1, z_2, z_3. \\
\ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
f_{1,n-1}, & f_{2,n-1}, & f_{3,n-1}, & \ldots, & f_{n-1,n-1}, & f_{n,n-1}, & \ldots \to L_1, L_2, \ldots, L_{n-1} \text{ para } z = z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}. \\
f_{1,n}, & f_{2,n}, & f_{3,n}, & \ldots, & f_{n-1,n}, & f_{n,n}, & \ldots \to L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}, L_n \text{ para } z = z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n. \\
\ldots & \ldots & \ldots & & & &
\end{array}$$

En cada fila de la tabla anterior hay una de las subsucesiones construidas por el procedimiento anterior. Cada fila es una subsucesión de la fila anterior.

Definamos la subsucesión

$$f_{j_n} = f_{n,n}$$

Es la sucesión que se forma tomando los elementos de la diagonal en la tabla anterior. Es al mismo tiempo subsucesión de todas las subsucesiones construidas. Entonces para cada uno y todos los puntos z_i dados:

$$\lim_{n\to+\infty} f_{j_n}(z_i) = L_i \in \mathbb{C}$$

lo que prueba la afirmación (6) como queríamos demostrar en este paso 3.

4. **Probar que la subsucesión f_{j_n} construida en el paso 3 es uniformemente de Cauchy en compactos de Ω.** Lo que hay que probar es que para todo compacto $K \subset \Omega$, y para todo $\epsilon > 0$ existe N (independiente de z) tal que

$$n \geq m \geq N \;\Rightarrow\; |f_{j_m}(z) - f_{j_m}(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K \quad \text{(a probar)} \quad (7)$$

Dado K y dado $\epsilon > 0$, elijamos $\delta > 0$ como en el paso 2. Cubramos el compacto K con una cantidad finita de discos abiertos $D_1, D_2, \ldots, D_p$ todos de radio $\delta/2$. Elijamos dentro de cada uno de estos discos D_i un punto z_i de la sucesión dada en el paso 3. (Existe alguno de los puntos z_n dentro de cada disco D_i porque el conjunto de los puntos z_n es denso en Ω y el disco D_i por construcción está contenido en Ω.)

Por la parte 3, existe para cada z_i el límite $\lim_{n\to+\infty} f_{j_n}(z_i) = L_i$. Luego, por la definición de límite, para cada z_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, existe un N_i tal que:

$$n \geq N_i \;\Rightarrow\; |f_{j_n}(z_i) - L_i| < \epsilon$$

Entonces, llamando N al mayor de los números $N_1, N_2, \ldots, N_p$ (son una cantidad finita) y tomando $n \geq m \geq N$ se obtiene:

$$n \geq m \geq N \;\Rightarrow\; |f_{j_n}(z_i) - f_{j_m}(z_i)| \leq |f_{j_n}(z_i) - L_i| + |L_i - f_{j_m}(z_i)| < 2\epsilon \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, p \qquad (8)$$

Fijemos un punto $z_0 \in K$. Este punto está dentro de alguno de los discos D_i. Entonces, junto con algún z_i está dentro del mismo disco D_i de radio $\delta/2$. Se deduce que existe alguno de los z_i (con $i = 1, 2, \ldots, p$) tal que

$$|z_0 - z_i| < \delta$$

ya que δ es el diámetro del disco D_i donde están ambos puntos z_0 y z_i.

Aplicando lo demostrado en el paso 2, en particular tomando no toda la sucesión f_n sino solo la subsucesión f_{j_n}, se obtiene

$$|f_{j_n}(z_0) - f_{j_n}(z_i)| < \epsilon \quad \forall\, n \geq 1 \qquad (9)$$

Reuniendo (8) con (9), se deduce que

$$n \geq m \geq N \;\Rightarrow\; |f_{j_n}(z_0) - f_{j_m}(z_0)| \leq$$

$$\leq |f_{j_n}(z_0) - f_{j_n}(z_i)| + |f_{j_n}(z_i) - f_{j_m}(z_i)| \leq |f_{j_m}(z_i) - f_{j_m}(z_0)| < 4\epsilon \qquad (10)$$

La construcción anterior la podemos efectuar para cualquier $z_0 \in K$. Lo único que cambia al cambiar el punto z_0, es el punto intermediario z_i que usamos para obtener la desigualdad (10), pero el principio y el final de la desigualdad (10) es el mismo.

Entonces, hemos probado que dado un compacto $K \subset \Omega$ y dado $\epsilon^* > 0$, existe N independiente de z_0 tal que

$$n \geq m \geq N \;\Rightarrow\; |f_{j_m}(z_0) - f_{j_m}(z_0)| < 4\epsilon = \epsilon^* \quad \forall z_0 \in K$$

donde $\epsilon > 0$ se elige igual a $\epsilon^*/4$. Esto prueba la afirmación (7) como queríamos.

5. **Probar que toda subsucesión f_{j_n} que sea uniformemente de Cauchy en compactos de Ω es convergente uniformemente en compactos de Ω.** Un vez probado esto, se deduce que la subsucesión construida en el paso 3 es uniformemente convergente en compactos de Ω y se termina la demostración del teorema de Montel.

Esperando que no sea motivo de confusión, vamos a llamar f_n a la subsucesión f_{j_n}, aunque ésta sea diferente de la sucesión dada; ya que no vamos a utilizar más en la demostración a la sucesión dada que se llamaba también f_n. (Esta notación es equivalente a sustituir la sucesión dada por su subsucesión f_{j_n}, construida en el paso 3.)

Por lo demostrado en el paso 4, la sucesión f_n es de Cauchy uniforme en compactos. Probemos que converge a una cierta f uniformemente en compactos de Ω.

Primero probemos que para todo $z \in \Omega$ la sucesión de complejos $f_n(z)$ converge; es decir la convergencia puntual de f_n. Considerando, para cada $z_0 \in \Omega$ fijo, el conjunto compacto $\{z_0\}$, por lo demostrado en el paso 4, para todo $\epsilon > 0$ existe un N (que ahora depende del z_0 fijado) tal que:

$$n \geq m \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z_0) - f_m(z_0)| < \epsilon$$

Entonces la sucesión de complejos $u_n = f_n(z_0)$ (no de funciones, sino de números complejos que resultan de evaluar las funciones en $z = z_0$) es una sucesión de Cauchy. Entonces sus partes real e imaginaria forman sendas sucesiones de Cauchy en la recta real (pues para todo complejo u se cumple $|Re(u)| \leq |u|$ y $|Im(u)| \leq |u|$). Por la completitud de la recta real las partes real e imaginaria de $u_n = f_n(z_0)$ convergen a ciertos números reales. Luego, la sucesión de complejos $f_n(z_0)$ converge a cierto número complejo, que llamaremos $f(z_0)$ (ya que depende del número complejo z_0 que habíamos fijado de antemano).

En resumen, tenemos una función compleja $f(z)$ de variable compleja $z \in \Omega$ que cumple, para cada z fijo en Ω lo siguiente:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z) \text{ para cada } z \text{ fijo en } \Omega \qquad (11)$$

Esto es la convergencia puntual de la sucesión de funciones f_n a una función f.

Ahora probemos que la convergencia de f_n a f es también uniforme en compactos de Ω.

Sea dado un compacto $K \subset \Omega$ y un número real $\epsilon > 0$. Tomemos N (independiente de z) según el paso 4, que cumple:

$$n \geq m \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \;\; \forall z \in K \qquad (12)$$

En la última desigualdad de (12) dejamos fijo un $z \in K$, dejamos fijo también un natural $m \geq N$ y hacemos $n \to +\infty$. Se obtiene:

$$m \geq N \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \epsilon \;\; \forall z \in K$$

Usando (11) se deduce:

$$m \geq N \;\Rightarrow\; |f(z) - f_m(z)| \leq \epsilon < \epsilon^* \;\; \forall z \in K \qquad (13)$$

donde, dado $\epsilon^* > 0$ se eligió $\epsilon > 0$ menor que ϵ^*.

En resumen, hemos probado que dado un compacto $K \subset \Omega$ y dado $\epsilon^* > 0$, existe N (independiente de z) tal que se cumple (13). Esto es por definición, la convergencia uniforme en compactos de Ω de la sucesión de funciones f_n a la función f, como queríamos demostrar.
□

Ejemplo 14.4.3. Se define en $D_1(0)$, para cada $N \geq 1$, la función $f_N \in H(D_1(0))$ siguiente:

$$\text{Si } N \text{ es par, } \ f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n, \quad \forall\, z \in D_1(0)$$

$$\text{Si } N \text{ es impar, } \ f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} (n+1) z^n, \quad \forall z \in D_1(0)$$

1. Probar que la familia f_N es normal.

   Si N es par entonces $f_N(z)$ es la reducida N-ésima de la serie geométrica de razón z, que por lo probado en el ejemplo 3.2.6 converge uniformemente en compactos $K \subset D_1(0)$ a la función $1/(1-z)$. Entonces dado un compacto $K \subset D_1(0)$ y dado $\epsilon = 1$, existe N_0 (independiente de z) tal que

   $$N \geq N_0, \ N \text{ par} \quad \Rightarrow \left| f_N(z) - \frac{1}{1-z} \right| < 1 \ \ \forall\, z \in K \quad (1)$$

   Sea $M_0 = \max_{z \in K} |1/(1-z)|$. M_0 es un número real que depende del conjunto compacto K pero no depende del punto z que se elija en K. Existe M_0 porque $1/(1-z)$ es continua en el compacto K contenido en el disco abierto $D_1(0)$. Aplicando la propiedad triangular y la desigualdad (1) se deduce:

   $$|f_N(z)| \leq \left| f_N(z) - \frac{1}{1-z} \right| + \left| \frac{1}{1-z} \right| \leq 1 + M_0, \ \ \forall\, z \in K, \ \forall\, N \text{ par }, N \geq N_0 \quad (2)$$

   Si N es impar, entonces, usando el teorema 11.1.6, la función $f_N(z)$ es la reducida N-ésima de la serie de potencias de la función $(1/(1-z))' = 1/(1-z)^2$, que tiene disco de convergencia $D_1(0)$. Por lo visto al pie de la nota 11.1.2, esta serie de potencias converge uniformemente en compactos $K \subset D_1(0)$ a la función $1/(1-z)^2$.

   Entonces, dado un compacto $K \subset D_1(0)$ y dado $\epsilon = 1$ existe N_1 (independiente de z) tal que:

   $$N \geq N_1, \ N \text{ impar} \quad \Rightarrow \left| f_N(z) - \frac{1}{(1-z)^2} \right| < 1 \ \ \forall\, z \in K \quad (3)$$

   Sea $M_1 = \max_{z \in K} |1/(1-z)^2|$. Existe M_1 porque $1/(1-z)^2$ es continua en el compacto K contenido en el disco abierto $D_1(0)$. Aplicando la propiedad triangular y la desigualdad (3) se deduce:

   $$|f_N(z)| \leq \left| f_N(z) - \frac{1}{(1-z)^2} \right| + \left| \frac{1}{(1-z)^2} \right| \leq 1 + M_1, \ \ \forall\, z \in K, \ \forall\, N \text{ impar }, N \geq N_1 \quad (4)$$

   Sea N_2 el mayor entre N_0 y N_1.

   Sea $k_i = \max_{z \in K} |f_i(z)|$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, N_2$. Existe este máximo k_i porque $f_i(z)$ es continua en el compacto K.

   Sea M el mayor entre la siguiente cantidad finita de números reales:

   $$M = \max\{1 + M_0, 1 + M_1, k_1, k_2, \ldots, k_{N_2}\}$$

Reuniendo (2) y (4), junto a la definición de los números M y k_i, se obtiene:

$$\forall N \geq 1 \quad |f_N(z)| \leq M \quad \forall z \in K$$

Esto es por definición la equiacotación de la familia f_N, luego esta familia es normal como queríamos probar. $\square$

2. Encontrar dos subsucesiones de f_N que sean convergentes uniformemente en compactos de $D_1(0)$ a funciones límites diferentes.

   Por cómo está dada la familia, la subsucesión f_{2N}, $N \geq 1$ (la subsucesión que corresponde a índices pares) es la sucesión de reducidas $2N$-ésimas de la serie geométrica, que converge uniformemente en compactos de su disco de convergencia $D_1(0)$ a la función $1/(1-z)$.

   Análogamente, la subsucesión f_{2N+1}, $N \geq 1$ (la subsucesión que corresponde a índices impares a partir del 3) es la sucesión de reducidas $2N+1$-ésimas del desarrollo en serie de potencias de z de la función analítica $1/(1-z)^2$. Por lo tanto converge uniformemente en compactos de su disco de convergencia $D_1(0)$ a la función $1/(1-z)^2$. $\square$

3. Concluir que la sucesión f_N no es convergente uniformemente en compactos de $D_1(0)$.

   Por absurdo, si $f_N(z)$ fuera convergente a alguna función $f(z)$, entonces cualquier subsucesión de ella sería convergente a la misma función $f(z)$. Luego las dos subsucesiones de la parte anterior serían convergentes al mismo límite $f(z)$ para todo $z \in D_1(0)$. Sin embargo las dos subsucesiones de la parte anterior convergen a funciones que no son iguales para todo $z \in D_1(0)$. $\square$