15. Teoría de los residuos.

15.1. Residuos.

Definición 15.1.1. Residuo de una función en una singularidad aislada.

Dada una función f que tiene en $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada, se llama residuo de f en a , y se denota como $Res_f(a)$ al siguiente número complejo:

$$Res_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

donde γ es cualquier curva cerrada contenida en el entorno pinchado $D_R^*(a)$ donde f es holomorfa, y tal que da una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de a . Por ejemplo suele tomarse $\gamma = \partial D_r(a)$, donde $0 < r < R$.

Nota 15.1.2. Se observa que el residuo, definido arriba, no depende de la elección de la curva γ . En efecto, si γ_1 y γ_2 fueran dos de tales curvas, llamemos S a un segmento contenido en $D_R^*(a)$ que vaya de un punto $z_1 \in \gamma_1$ a un punto $z_2 \in \gamma_2$. La curva $\Gamma = \gamma_1 + S - \gamma_2 - S$ es cerrada y homotópica a un punto en $D_R^*(a)$. Por el teorema de Cauchy global $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$. Luego la integral de f a lo largo de γ_1 es igual a la integral de f a lo largo de γ_2 .

El residuo de una función en una singularidad aislada se puede calcular de tres formas diferentes:

- Con la fórmula integral de la definición 15.1.1.
- Como el coeficiente a_{-1} del desarrollo en serie de Laurent de la función f centrado en $z = a$ (o en ∞). (Esto lo probaremos en la proposición 15.1.3.)
- Con la fórmula de derivación, cuando la singularidad aislada es un polo, tal como veremos en la proposición 15.1.4.

La definición 15.1.1 se puede interpretar como sigue: la función tiene una singularidad aislada en $z = a$. El rastro que deja (residuo) la singularidad al ser integrada la función f en una curva alrededor de a es el número a_{-1} de su desarrollo en serie de Laurent. Los demás coeficientes del desarrollo en serie de Laurent de f no participan en el momento de calcular la integral de f en curvas cerradas.

En el teorema de los residuos (teorema 15.1.5), veremos que al conocer los residuos en todas las singularidades aisladas, se puede calcular la integral de f a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en el conjunto abierto donde f es analítica.

Proposición 15.1.3. Fórmula del residuo:

Si f en la singularidad aislada $a \in \mathbb{C}$ tiene desarrollo de Laurent con coeficientes a_n , $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad \forall z \in D_R^*(a)$$

entonces el residuo de f en a es:

$$Res_f(a) = a_{-1}$$

Nota: El residuo de un polo que no es simple, o de una singularidad esencial, puede ser cero. Pero la de un polo simple es siempre diferente de cero, porque en ese caso el coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent es necesariamente no nulo. (Ver teorema 13.3.2.)

Demostración:

En el corolario 13.3.1, sobre la existencia de la serie de Laurent en un entorno pinchado de la singularidad aislada a se demuestra que el coeficiente a_n del desarrollo cumple:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D_R^*(a)$ tal que $\text{Ind}_{\gamma}(a) = 1$.

Luego, en particular para $n = -1$ se cumple:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

que es por definición el residuo de f en a . $\square$

Proposición 15.1.4. Fórmula del residuo para un polo:

Si f tiene un polo $a \in \mathbb{C}$ de orden $k \geq 1$ y g es la extensión analítica de $(z-a)^k f(z)$ en un entorno $D_R(a)$, entonces el residuo de f en a es:

$$\text{Res}_f(a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

En particular si a es un polo simple, $k = 1$ y la fórmula anterior se transforma en:

$$\text{Res}_f(a) = g(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) \neq 0.$$

$$\text{Res}_f(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)}{1/f(z)} = \frac{1}{(1/f(z))'|_{z=a}} \neq 0$$

Demostración: Siendo g analítica en $D_R(a)$ se tiene:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \forall z \in D_R(a), \quad \text{donde } b_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} \quad \forall n \geq 0$$

Como $f(z) = g(z)/(z-a)^k$ para todo $z \in D_R^*(a)$ entonces:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-a)^{m-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z-a)^n \quad \forall z \in D_R^*(a).$$

Este último es el desarrollo en serie de Laurent de f , luego el coeficiente a_n del desarrollo en serie de Laurent de f cumple: $a_n = b_{n+k}$. En particular:

$$a_{-1} = b_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

Por la proposición 15.1.3, a_{-1} es el residuo de f en a . Luego se deduce que

$$Res_f(a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

Hemos probado la primera parte de la proposición. Ahora veamos el caso en que a sea un polo simple.

Si a es un polo simple, entonces su orden $k = 1$. Por lo tanto $Res_f(a) = g(a)$. Pero g es continua en a (porque es analítica), luego

$$Res_f(a) = g(a) = \lim_{z \rightarrow a} g(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$$

Por otro lado, sabemos del teorema 13.3.2, que si un polo tiene orden $k = 1$ entonces $a_{-1} \neq 0$. Por lo tanto, en el caso de un polo simple, el residuo calculado anteriormente es diferente de cero.

Además, si a es un polo simple, entonces:

$$Res_f(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z - a)}{1/f(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(1/f(z))/(z - a)} = \frac{1}{(1/f(z))'|_{z=a}} \quad \square$$

Teorema 15.1.5. Teorema de los residuos.

Si f es analítica en un abierto Ω excepto a lo sumo en una cantidad finita de puntos $z_1, z_2, \dots, z_m$ (estos puntos son singularidades aisladas de f) entonces para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$ que no pase por los puntos $z_1, z_2, \dots, z_m$, y que sea homotópica a un punto en Ω , se cumple:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m Res_f(z_j) Ind_{\gamma}(z_j).$$

(Por convención la suma de la derecha es nula si $m = 0$.)

Nota: El teorema también es válido para una cantidad infinita de singularidades aisladas. En efecto, dada una curva $\gamma \subset \Omega$, podemos considerar $\gamma \subset \Omega^* \subset \Omega$ tal que las únicas singularidades de f en Ω^* son las que están en las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Por un lado las singularidades z_j que están en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, cumplen $Ind_{\gamma}(z_j) = 0$; luego no influyen en el resultado. Por otra parte es finita la cantidad de singularidades aisladas que están en las componentes conexas acotadas $\cup R_i$ de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. (En efecto $K = \overline{\cup R_i}$ es compacto, y las singularidades son aisladas. Entonces se puede cubrir K con una cantidad finita de entornos, cada uno de los cuales contiene a lo sumo una singularidad.)

En la subsección 15.4 se dará un ejemplo de aplicación del teorema de los residuos y de las fórmulas para calcular residuos.

Demostración del teorema 15.1.5: Será por inducción completa en la cantidad $m \geq 0$ de singularidades de f en el conjunto Ω .

Paso inicial.

Para $m = 0$, la función f es analítica en Ω . Luego $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ debido al teorema de Cauchy global. (Ver teorema 11.3.1.)

Si suponemos por hipótesis que el teorema es cierto para algún $m = h - 1$, con $h \geq 1$, habrá que probar que es válido para $m = h$.

Dejemos fija la curva γ cerrada y homotópica a un punto en Ω .

Hipótesis de inducción: Para toda función g analítica en Ω excepto a lo sumo en $h - 1$ puntos $z_1, \dots, z_{h-1}$ pertenecientes a $\Omega \setminus \gamma^*$, se cumple

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) dz = \sum_{j=1}^{h-1} \text{Res}_f(z_j) \text{Ind}_{\gamma}(z_j).$$

Tesis de inducción a probar: Para toda función f analítica en Ω excepto a lo sumo en h puntos $z_1, \dots, z_{h-1}, z_h$ pertenecientes a $\Omega \setminus \gamma^*$, se cumple

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^h \text{Res}_f(z_j) \text{Ind}_{\gamma}(z_j).$$

Demostración del paso de inducción:

Consideremos de las h singularidades $z_1, \dots, z_h$ de f en Ω , una de ellas, la que llamamos z_h .

Sea R el radio del entorno pinchado $D_R^*(z_h)$ de z_h donde f es analítica.

Aplicando el teorema del desarrollo en serie de Laurent de f centrado en z_h (ver corolario 13.3.1), se tiene:

$$g(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_h)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_h)^n \quad \forall z \in D_R^*(z_h) \quad (1)$$

donde, usando la proposición 15.1.3, se cumple:

$$a_{-1} = \text{Res}_f(z_h). \quad (2)$$

Observación A): La función $g(z)$, definida en (1) para todo $z \in D_R^*(z_h)$, se extiende analíticamente a $D_R(z_h)$, definiéndola igual al desarrollo en serie de potencias $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_h)^n$.

Por (1):

$$g(z) = f(z) - S(z) \quad \forall z \in D_R^*(z_h), \text{ donde } S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_h)^{-n} \quad (3)$$

Afirmación B) La serie $S(z)$ de la igualdad (3), converge para todo $z \neq z_h$; converge uniformemente para todo z tal que $|z - z_h| \geq r$ (donde r es cualquier un número fijo tal que $0 < r < R$). Además la suma de la serie $S(z)$ es analítica para todo z tal que $z \neq z_h$.

Prueba de la afirmación B): Por el teorema de desarrollo en serie de Laurent (ver corolario 13.3.1), la serie (3) converge en la corona $D_R^*(z_h)$ de radio interno 0 y radio externo R . Entonces en particular, converge para $|z - z_h| = r$.

Escribiendo $w = 1/(z - z_h)$, la serie de potencias siguiente : $P(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$, converge para $|w| = 1/r$, para todo r tal que $0 < r < R$. Por lo tanto el radio de convergencia de $P(w)$ es mayor o igual que $1/r$, para todo r tal que $0 < r < R$. Haciendo $r \rightarrow 0^+$ se obtiene que el radio de convergencia de la serie de potencias $P(w)$ es infinito. Luego $P(w)$ converge para todo w . Luego su disco de convergencia es todo el plano complejo.

Además $P(w)$, como toda serie de potencias, converge uniformemente en cualquier compacto dentro de su disco de convergencia; en particular para todo w tal que $|w| \leq 1/r$.

Por ser una serie de potencias de w , la suma $P(w)$ es una función analítica de w .

Siendo $S(z) = P(1/(z - z_h))$, composición de $P(w)$ con $w = 1/(z - z_h)$, se deduce que $S(z)$ converge uniformemente para todo z tal que $|w| = |1/(z - z_h)| \leq 1/r$; es decir para todo z tal que $|z - z_h| \geq r$.

Además, como $P(w)$ converge para todo w , y $w = 1/(z - z_h)$, entonces $S(z)$ converge para todo $z \neq z_h$ como queríamos demostrar en la primera parte de la afirmación B).

Por otra parte $S(z)$ es la composición de las funciones analíticas $P(w)$ con $w = 1/(z - z_h)$ cuando $z \neq z_h$. Entonces $S(z)$ es analítica para todo $z \neq z_h$. Hemos terminado de probar la afirmación B).

Afirmación C) La función g definida en (1) tiene una extensión analítica a $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_{h-1}\}$ que cumple

$$g(z) = f(z) - S(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_{h-1}, z_h\}$$

donde

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_h)^{-n} \quad \forall z \neq z_h$$

Prueba de la afirmación C): En (1) se define la función g para todo $z \in D_R^*(z_h)$. Ya vimos, en la observación A), que g se extiende analíticamente a $D_R(z_h)$. Sea $0 < r < R$. Basta probar que $g(z)$ se extiende analíticamente a todo $z \in \Omega$ tal que $z \neq z_1, z_2, \dots, z_{h-1}$ y tal que $|z - z_h| > r$. Por (3):

$$g(z) = f(z) - S(z) \quad \forall z \in D_R^*(z_h)$$

La función f , por hipótesis, es analítica para todo $z \in \Omega$ tal que $z \neq z_1, z_2, \dots, z_{h-1}$ y tal que $|z - z_h| > r$. Y por la afirmación B) la función $S(z)$ está definida y es analítica para todo z tal que $|z - z_h| > r$. Esto termina de probar la afirmación C).

Afirmación D)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) dz = -a_1 \text{Ind}_{\gamma}(z_h) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

Prueba de la afirmación D):

Usando la afirmación C) e integrando a lo largo de γ , se obtiene:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} (-S(z) + f(z)) dz = - \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_h)^{-n} dz + \int_{\gamma} f(z) dz \quad (4)$$

Sea $r > 0$ menor que R y menor o igual que la distancia (positiva) de la curva γ^* al punto $z_h \notin \gamma^*$. Por construcción, para todo $z \in \gamma^*$ se cumple $|z - z_h| \geq r$. Por la afirmación B) la serie $S(z)$ converge uniformemente en $|z - z_h| \geq r$. Aplicando el teorema de convergencia uniforme e integración, se obtiene:

$$\int_{\gamma} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_h)^{-n} dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\gamma} a_{-n}(z - z_h)^{-n} dz \quad (5)$$

Recordando que, para todo entero $m \neq -1$, la función $(z - z_h)^m$ tiene primitiva, que es $(z - z_h)^{m+1}/(m+1)$, su integral a lo largo de la curva cerrada γ es nula.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\gamma} a_{-n} (z - z_h)^{-n} dz = a_{-1} \int_{\gamma} (z - z_h)^{-1} dz = 2\pi i a_{-1} \text{Ind}_{\gamma}(z_h) \quad (6)$$

En la última igualdad se usó el teorema del índice.

Reuniendo (4), (5) y (6) se deduce la afirmación D) como queríamos demostrar.

Fin de la prueba del teorema 15.1.5.

Usando la afirmación C), y la hipótesis de inducción aplicada a la función g , se deduce:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) dz = \sum_{j=1}^{h-1} \text{Res}_f(z_j) \text{Ind}_{\gamma}(z_j) \quad (7)$$

Finalmente, reuniendo la afirmación D) con las igualdades (2) y (7) se deduce:

$$\sum_{j=1}^{h-1} \text{Res}_f(z_j) \text{Ind}_{\gamma}(z_j) = -\text{Res}_f(z_h) \text{Ind}_{\gamma}(z_h) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

Despejando la integral de f en la última igualdad se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^h \text{Res}_f(z_j) \text{Ind}_{\gamma}(z_j),$$

que es la tesis de inducción que queríamos demostrar. $\square$

15.2. Principio del argumento.

El siguiente teorema, que es consecuencia del teorema del residuos, se aplica a la identificación de cuántos ceros y polos existen para una función meromorfa, en la región encerrada por una curva cerrada γ .

Teorema 15.2.1. Principio del argumento. *Sea f meromorfa en el abierto Ω . Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva homotópica a un punto en Ω que no pasa por los ceros ni por los polos de f .*

Sean $z_1, z_2, \dots, z_m$ los ceros de f contenidos en Ω y tales que $\text{Ind}_{\gamma}(z_j) \neq 0$. Sean $k_1, k_2, \dots, k_m$ sus respectivas multiplicidades. Sean $w_1, w_2, \dots, w_n$ los polos de f contenidos en Ω y tales que $\text{Ind}_{\gamma}(w_j) \neq 0$. Sean $h_1, h_2, \dots, h_n$ sus respectivas multiplicidades.

Sea $f \circ \gamma$ la curva que tiene parametrización $z = f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$ donde $z = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ es una parametrización de γ .

Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^m k_j \text{Ind}_{\gamma}(z_j) - \sum_{j=1}^n h_j \text{Ind}_{\gamma}(w_j) = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0)$$

Nota 15.2.2. El principal uso del Principio del Argumento se da cuando γ es una curva de Jordan (curva cerrada simple, es decir sin más autointersecciones que los extremos final e inicial). Los puntos tales que el índice de γ no es nulo, son los puntos del interior a γ (de la región acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$). El principio del argumento dice, en ese caso, lo siguiente:

Principio del argumento. *La cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f , en el interior a la curva de Jordan γ , contado cada uno tantas veces como su multiplicidad, es igual a $(1/2\pi i) \int_{\gamma} f'(z)/f(z) dz$ y es igual a la cantidad de vueltas que da la curva $f \circ \gamma$ alrededor del origen.*

En particular, si f es analítica en Ω , no tiene polos y entonces el resultado anterior es la cantidad de ceros de f en el interior de γ , contado cada uno tantas veces como su multiplicidad.

El nombre “Principio del Argumento” se justifica porque el último miembro de la igualdad en el teorema 15.2.1, el índice de la curva $f \circ \gamma$ en el punto $z = 0$, es la cantidad de vueltas que da esa curva cerrada alrededor del origen, es decir la variación total continua del argumento de $f(\gamma(t))$ al variar t en el intervalo $[a, b]$.

Demostración del teorema 15.2.1: Aplicaremos el teorema de los residuos (teorema 15.1.5) a la función $f'(z)/f(z)$. Las singularidades aisladas de esta función para las que el índice de γ es cero, no influyen en el cálculo de la integral. Aquellas para las el índice de γ es distinto de cero, son los ceros $z_1, z_2, \dots, z_m$ de f y los polos $w_1, w_2, \dots, w_n$ de f (que son los mismos polos que los de f' ya que f' es analítica donde es f).

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^m \text{Res}_{f'/f}(z_j) \text{Ind}_{\gamma}(z_j) + \sum_{j=1}^n \text{Res}_{f'/f}(w_j) \text{Ind}_{\gamma}(w_j) \quad (1)$$

Ahora calculemos el residuo de cada una de esas singularidades para la función $f'(z)/f(z)$.

Si z_j es un cero de orden k_j para f , entonces por lo observado en la definición 12.2.2, existe una función analítica $g(z)$ en un entorno $D_R(z_j)$ tal que:

$$f(z) = (z - z_j)^{k_j} g(z) \quad \forall z \in D_R(z_j), \quad g(z_j) \neq 0$$

Derivando respecto de z :

$$f'(z) = k_j(z - z_j)^{k_j-1} g(z) + (z - z_j)^{k_j} g'(z)$$

Luego, tomando el cociente:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_j}{z - z_j} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (2)$$

Como la función g es analítica en $D_R(z_j)$ y no se anula en $z = z_j$, no se anula en un entorno de $z = z_j$ y el cociente $g'(z)/g(z)$ resulta ser una función analítica en un entorno de z_j . Por lo tanto la igualdad (2) dice que el desarrollo de Laurent de f'/f en un entorno pinchado de z_j tiene coeficiente $a_{-1} = k_j$. Por la proposición 15.1.3, se cumple:

$$\text{Res}_{f'/f}(z_j) = k_j \quad (3)$$

Si w_j es un polo de orden h_j para f , entonces por lo observado en la definición 12.4.3, existe una función analítica $g(z)$ en un entorno $D_R(w_j)$ tal que:

$$g(z) = (z - w_j)^{h_j} f(z) \quad \forall z \in D_R(w_j), \quad g(w_j) \neq 0$$

Derivando respecto de z :

$$g'(z) = h_j(z - w_j)^{h_j-1} f(z) + (z - w_j)^{h_j} f'(z)$$

Luego, tomando el cociente:

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{h_j}{z - w_j} + \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (4)$$

Como la función g es analítica en $D_R(z_j)$ y no se anula en $z = w_j$, no se anula en un entorno de $z = w_j$ y el cociente $g'(z)/g(z)$ resulta ser una función analítica en un entorno de z_j . Por lo tanto la igualdad (4) dice que el desarrollo de Laurent de f'/f en un entorno pinchado de w_j es:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{h_j}{z - w_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Entonces ese desarrollo de Laurent tiene coeficiente $a_{-1} = -h_j$. Por la proposición 15.1.3, se cumple:

$$\text{Res}_{f'/f}(w_j) = -h_j \quad (5)$$

Sustituyendo (3) y (5) en (1) se deduce:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^m k_j \text{Ind}_{\gamma}(z_j) - \sum_{j=1}^n h_j \text{Ind}_{\gamma}(w_j)$$

Esta es la primera igualdad de la tesis que queríamos demostrar.

Ahora probemos la segunda igualdad de la tesis:

$$\text{A probar:} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0)$$

Sea $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ una parametrización de la curva γ . Consideremos $u(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$ como parametrización de la curva $f \circ \gamma$.

Por definición de integral, se tiene:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)}{f(\gamma(t))} dt \quad (6)$$

Por la regla de la cadena, si $u(t) = f(\gamma(t))$, entonces $\dot{u}(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$. Sustituyendo en (6) se obtiene:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} dt \quad (7)$$

Por otra parte, por el teorema del índice, y por la definición de integral a lo largo de una curva $u = u(t)$, se tiene:

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) \cdot 2\pi i = \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{u} du = \int_a^b \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} dt \quad (8)$$

Reuniendo (7) y (8) se obtiene la igualdad

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0)$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

15.3. Teorema de Rouché.

El siguiente teorema de Rouché permite conocer el número de ceros y polos (contados con su multiplicidad) de una función f dentro de una región acotada, sabiendo cuál es el número de ceros y polos en esa región, de otra función conocida g . Por ejemplo $g(z) = 10z^4$ tiene en el disco abierto $D = \{|z| < 1\}$ exactamente cuatro ceros y ningún polo (contado cada uno con su multiplicidad). En efecto, no tiene ningún polo porque $10z^4$ es analítica. Tiene 4 ceros contados con su multiplicidad, porque tiene el cero $z = 0 \in D$ con multiplicidad 4.

El teorema de Rouché afirma que cualquier otra función $f = f(z)$ meromorfa y que cumpla las hipótesis en relación a $g(z) = 10z^4$, en el borde de D (o sea en la circunferencia $\partial D = \{|z| = 1\}$), tendrá también exactamente 4 ceros y ningún polo en D . Por ejemplo, el polinomio $f(z) = (1+i)z^9 + z^7 + 10z^4 + 3iz^2 + 2z + 1$ como se verá más adelante en el ejemplo 15.3.3.

Teorema 15.3.1. Teorema de Rouché. Sean f y g dos funciones meromorfas en Ω . Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva de Jordan (cerrada simple) homotópica a un punto en Ω y que no pasa por los ceros ni por los polos de f ni de g . Sea R la región acotada encerrada por γ .

Si

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in \gamma^*$$

entonces la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f en R (contados con su multiplicidad) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de g en R (contados con su multiplicidad).

Nota 15.3.2. Otro enunciado del teorema de Rouché. La desigualdad en la hipótesis del teorema de Rouché puede sustituirse por la siguiente:

Si se cumple

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall z \in \gamma^*$$

entonces, vale la tesis del teorema de Rouché.

En efecto, si vale $|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall z \in \gamma^*$, entonces $|f(z) + (-g(z))| < |-g(z)| + |f(z)|$ y se verifica la hipótesis del teorema de Rouché para f y $-g$. Por lo tanto se verifica la tesis del teorema de Rouché, ya que los ceros y polos de $-g$ y g son los mismos con las mismas multiplicidades.

Demostración del teorema 15.3.1:

Dividiendo la desigualdad de la hipótesis entre $|g(z)| \neq 0$, para $z \in \gamma^*$, se obtiene:

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} + 1 \right| < \frac{|f(z)|}{|g(z)|} + 1$$

Entonces, el cociente $f(z)/g(z)$ no es un número real ≥ 0 , para ningún $z \in \gamma^*$, ya que para todo número real $\lambda \geq 0$ se cumple $|\lambda + 1| = \lambda + 1 = |\lambda| + 1$ y no la desigualdad de la hipótesis.

Entonces la función

$$h(z) = \text{Log}_{[0,2\pi)} \frac{f(z)}{g(z)}$$

está bien definida y es continua y derivable para todo $z \in \gamma^*$, ya que el número complejo dentro del logaritmo nunca es un real $\lambda \geq 0$. Derivando $h(z)$ se obtiene:

$$h'(z) = \frac{g(z)}{f(z)} \cdot \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Por la regla de Barrow $\int_{\gamma} h'(z) dz = 0$, ya que la curva γ es cerrada. Luego, deducimos que

$$0 = \int_{\gamma} h'(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$$

de donde

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \quad (1)$$

Aplicando el principio del argumento (ver teorema 15.2.1 y la nota 15.2.2), el primer miembro de la igualdad (1) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f en la región R (contados con su multiplicidad). Análogamente, el segundo miembro de la igualdad (1) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de g en la región R (contados con su multiplicidad). Por lo tanto, queda demostrada la tesis. $\square$

Ejemplo 15.3.3. Ejercicio sobre el teorema de Rouché.

Mostrar que el polinomio $f(z) = (1+i)z^9 + z^7 + 10z^4 + 3iz^2 + 2z + 1$ tiene exactamente 4 raíces (contadas con su multiplicidad) en el interior del círculo $D = \{|z| < 1\}$.

Sea $g(z) = 10z^4$. Tiene en el disco abierto $D = \{|z| < 1\}$ exactamente cuatro ceros y ningún polo (contado cada uno con su multiplicidad).

Comparando f y g , para verificar que cumplen las hipótesis del teorema de Rouché (ver teorema 15.3.1) y nota 15.3.2, en la circunferencia $\partial D = \{|z| = 1\}$, se obtiene:

$$|f(z) - g(z)| = |(1+i)z^9 + z^7 + 3iz^2 + 2z + 1| \leq 2|z|^9 + |z|^7 + 3|z|^2 + 2|z| + 1 \leq 9 \quad \forall z \in \partial D$$

$$\forall z \in \partial D : 9 = 9|z|^4 < 10|z|^4 = |g(z)|$$

Luego:

$$\forall z \in \partial D : |f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad (1)$$

Estas son las hipótesis del teorema de Rouché, según lo observado en la nota 15.3.2. Aplicando ese teorema se deduce que el polinomio $f(z)$ tiene, de sus 9 raíces (contadas con multiplicidad) exactamente 4 en el interior del círculo D .

Se observa que la hipótesis de la curva ∂D no pasa por los ceros ni por los polos de f ni de g se verifica inmediatamente. Por un lado f y g no tienen polos porque son polinomios. Por otro lado el único cero de g es $z = 0$ (con orden 4) que no está en ∂D . Además, por (1), $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \partial D$, pues de lo contrario quedaría $|g(z)| < |g(z)|$ lo que es absurdo. $\square$

15.4. Ejemplos.

Además de los ejemplos en esta subsección, se dan ejemplos en la sección 16.

15.4.1. Ejemplo del teorema de los residuos. Calcular

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2} dz$$

a lo largo de la curva $\gamma_R = [-R, R] + S_R$ donde $S_R : z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, R constante real mayor que 1.

Los polos de la función $f(z)$ en el integrando son $z = i$ doble, y $z = -i$ doble. La curva γ_R da una vuelta en sentido antihorario alrededor del polo $z = i$ y ninguna vuelta alrededor de $z = -i$. Por lo tanto

$$\text{Ind}_{\gamma_R}(i) = 1, \quad \text{Ind}_{\gamma_R}(-i) = 0$$

Aplicando el teorema de los residuos (ver teorema 15.1.5), resulta:

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi i \text{Res}_f(i)$$

Calculemos el residuo $\text{Res}_f(i)$ aplicando la proposición 15.1.4:

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}, \quad g(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+i)^2}, \quad \text{Res}_f(i) = g'(i)$$

$$\text{Res}_f(i) = \left(\frac{ze^{iz}}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = \frac{e^{iz}(z+i)^2 + iz e^{iz}(z+i)^2 - 2(z+i)ze^{iz}}{(z+i)^4} \Big|_{z=i}$$

$$\text{Res}_f(i) = \frac{e^{iz}((1+iz)(z+i) - 2z)}{(z+i)^3} \Big|_{z=i}$$

$$\text{Res}_f(i) = \frac{e^{-1}(-2i)}{(2i)^3} = \frac{e^{-1}}{4}$$

Luego el valor de la integral es:

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2} dz = \frac{i\pi e^{-1}}{2} \quad \square$$

15.4.2. Ejemplo de aplicación de la teoría de los residuos al cálculo de una integral impropia: Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{x \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2} dx$$

Hay que calcular el límite cuando $R \rightarrow +\infty$ de la integral

$$I_R = \int_0^R \frac{x \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2} dx \quad (1)$$

Consideremos la función meromorfa en el plano complejo:

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}$$

y la integral

$$\int_{[-R,R]} f(z) dz = \int_{[-R,0]} \frac{ue^{iu}}{(1+u^2)^2} du + \int_{[0,+R]} \frac{xe^{ix}}{(1+x^2)^2} dx \quad (2)$$

Haciendo el cambio de variable $u = -x$ se obtiene:

$$\int_{-R}^0 \frac{ue^{iu}}{(1+u^2)^2} du = \int_R^0 \frac{-xe^{-ix}}{(1+x^2)^2} (-dx) = - \int_0^R \frac{xe^{-ix}}{(1+x^2)^2} dx$$

Luego, sustituyendo en (2) se deduce:

$$\int_{[-R,R]} f(z) dz = - \int_0^R \frac{xe^{-ix}}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^R \frac{xe^{ix}}{(1+x^2)^2} dx = 2i \int_0^R \frac{x \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2} dx$$

Concluimos, de la última igualdad y de (1), que

$$\int_{[-R,R]} f(z) dz = 2i I_R \quad (3)$$

Si cerramos el segmento $[-R, R]$ con un arco de circunferencia $S_R : z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, llamando $\gamma_R = [-R, R] + S_R$ se obtiene:

$$\int_{[-R,R]} f(z) dz + \int_{S_R} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz \quad (4)$$

Usando la teoría de los residuos hemos calculado en el ejemplo 15.4.1 la siguiente integral, para $R > 1$:

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2} dz = \frac{i\pi e^{-1}}{2} \quad (5)$$

Reuniendo (3), (4) y (5) se obtiene:

$$I_R = \frac{\pi e^{-1}}{4} - \frac{1}{2i} \int_{S_R} f(z) dz \quad \forall R > 1 \quad (6)$$

Aplicando ahora el lema de Jordan (ver última parte del lema 11.5.3), a la función $g(z) = z/(1+z^2)^2$, se cumple:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(1+z^2)^2} \cdot e^{iz}, \quad \text{donde } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{(1+z^2)^2} = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2} dz = 0 \end{aligned}$$

Luego, de (6) se deduce:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = \frac{\pi e^{-1}}{4}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi e^{-1}}{4} \quad \square$$