17. Síntesis de la tercera parte.

17.1. *Ceros y singularidades aisladas.*

Los detalles y demostraciones de esta parte se encuentran en la sección 12.

Definición 17.1.1. Ceros de una función analítica.
Un cero de la función analítica $f \in H(\Omega)$ es un punto $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$.

Por el teorema de prolongación analítica, si f no es idénticamente nula en la componente conexa de Ω que contiene a a, entonces el cero a es aislado. (Ver corolario 5.2.2.)

Definición 17.1.2. Orden o multiplicidad de un cero.
Sea a un cero de la función analítica f no idénticamente nula en la región Ω. Se llama *multiplicidad u orden de a* al único entero $k \geq 1$ tal que:

$$f(z) = (z-a)^k g(z)$$

donde $g(z)$ es una función analítica en un disco $D_R(a)$ con $R > 0$, tal que

$$g(a) \neq 0$$

En resumen, el orden $k \geq 1$, o multiplicidad del cero a, es igual a:

- El único entero $k \geq 1$ tal que: $f(z) = (z-a)^k g(z)$, donde $g(z)$ es una función analítica en un disco $D_R(a)$ con $R > 0$, tal que $g(a) \neq 0$. (Por definición.)
- El lugar del primer coeficiente $a_k \neq 0$ del desarrollo en potencias de f centrado en a. (Por (1).)
- El único entero k tal que

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{(z-a)^k} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad \text{(Por (2).)}$$

- El primer natural para el cual la derivada $k-$ésima de $f(z)$ en $z = a$ no es cero. (Por (3).)

En particular, si a es un cero de f entonces $f'(a) \neq 0$ si y solo si el orden o multiplicidad de a es $k = 1$.

Definición 17.1.3. Ceros simples y múltiples.
Un cero aislado se llama simple si tiene orden o multiplicidad igual a 1, y se llama múltiple (doble, triple, etc) si tiene orden o multiplicidad ≥ 2 (2, 3, etc. respectivamente).

Definición 17.1.4. Singularidad aislada. Un punto $a \in \mathbb{C}$ se dice que es *una singularidad aislada de f* si $f \in H(D^*_R(a))$ para algún entorno pinchado $D^*_R(a)$ de a con radio $R > 0$.
El punto ∞ del plano complejo compactificado se dice que es *una singularidad aislada de f* si $f \in H(D^*_{1/R}(\infty))$ para algún entorno pinchado $D^*_{1/R}(\infty)$ con radio $1/R > 0$.

Definición 17.1.5. Clasificación de las singularidades aisladas.
Dada una singularidad aislada $a \in \mathbb{C}$ de f, se define:

- a es *singularidad evitable de* f si $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$.
- a es *un polo de* f si $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.
- a es *una singularidad esencial de* f si no existe $\lim_{z\to a} f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

Dado ∞ singularidad aislada de f se define:

- ∞ es *singularidad evitable de* f si $\lim_{z\to \infty} f(z) \in \mathbb{C}$.
- ∞ es *un polo de* f si $\lim_{z\to \infty} f(z) = \infty$.
- ∞ es *una singularidad esencial de* f si no existe $\lim_{z\to \infty} f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

Teorema 17.1.6. Caracterización de las singularidades evitables.
a) *Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *a es singularidad evitable de f.*

ii) *$f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$ para algún $R > 0$.*

iii) $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$.

iv) *f admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$ para algún $R > 0$*

b) *Sea ∞ una singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *∞ es singularidad evitable de f.*

ii) *$f(z)$ es acotada en $D^*_{1/R}(\infty)$ para algún $R > 0$.*

i) $\lim_{z\to\infty} f(z)/z = 0$.

Teorema 17.1.7. Caracterización de los polos complejos.
Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) *a es un polo de f.*

ii) *Para un primer natural $k \geq 1$ la función $(z-a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$ para algún $R > 0$. En consecuencia a es una singularidad evitable de $(z-a)^k f(z)$.*

iii) *Para un primer natural $k \geq 1$ la función $(z-a)^k f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$ para algún $R > 0$.*

iv) *Para un primer natural $k \geq 1$ existe*

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) \notin \{0, \infty\}$$

En consecuencia

$$0 \leq n < k \;\Rightarrow\; \lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = \infty$$

$$n > k \;\Rightarrow\; \lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = 0$$

v) *La función $1/f(z)$ tiene una extensión analítica en un entorno de $z = a$, y $z = a$ es un cero de orden $k \geq 1$ de la extensión analítica de $1/f$.*

Teorema 17.1.8. Caracterización de polo en ∞.
Sea ∞ singularidad aislada de f. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) *∞ es un polo de f.*

ii) *Para un primer natural $k \geq 1$ la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D^*_{1/R}(\infty)$ para algún $R > 0$.*

iii) *Para un primer natural $k \geq 1$ existe*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^k} \notin \{0, \infty\}$$

En consecuencia

$$0 \leq n < k \;\Rightarrow\; \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = \infty$$

$$n > k \;\Rightarrow\; \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$$

Definición 17.1.9. Orden de un polo.
a) En virtud del teorema 12.4.1, el orden o multiplicidad $k \geq 1$ de un polo $a \in \mathbb{C}$ de f es:

- El primer natural $k \geq 1$ tal que la función $(z - a)^k f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$ para algún $R > 0$.
- El orden o multiplicidad de a como cero de la función analítica que extiende a $1/f$ a un entorno de a.
- El primer $k \geq 1$ tal que la función $(z - a)^k f(z)$ admite una extensión holomorfa a $D_R(a)$.
- El único número entero k tal que $\lim_{z\to a}(z - a)^k f(z) \notin \{0, \infty\}$.

  En consecuencia: $0 \leq n < k \;\Rightarrow\; \lim_{z\to a}(z - a)^n f(z) = \infty$;

  $n > k \;\Rightarrow\; \lim_{z\to a}(z - a)^n f(z) = 0$.

b) En virtud del teorema 12.4.2, el orden o multiplicidad $k \geq 1$ del polo ∞ de f es

- El primer natural $k \geq 1$ tal que la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D^*_{1/R}(\infty)$ para algún $R > 0$ (por definición)
- El único entero k tal que $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^k} \notin \{0, \infty\}$.

  En consecuencia $0 \leq n < k \;\Rightarrow\; \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = \infty$; $n > k \;\Rightarrow\; \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$.
- El orden de $z = 0$ como polo de la función $f(1/z)$.

Definición 17.1.10. Polos simples y múltiples.
Un polo se llama simple si tiene orden 1, y se llama múltiple (doble, triple, etc) si tiene orden ≥ 2 (2, 3, etc. respectivamente).

Observación: Si $f \in H(\Omega)$ donde Ω es una región, no es idénticamente nula, entonces un cero de orden k de f es un polo de orden k de la función $1/f(z)$ y recíprocamente.

Proposición 17.1.11. Caracterización de las singularidades esenciales.
a) *Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f. Sea $D^*_R(a)$ el disco pinchado de radio $R > 0$ donde f es holomorfa. Entonces son equivalentes:*

i) *a es una singularidad esencial de f.*

ii) *Para ningún natural $k \geq 0$ la función $(z-a)^k f(z)$ es acotada en $D^*_R(a)$.*

iii) *Para ningún natural $k \geq 0$ la función $(z-a)^k f(z)$ admite extensión holomorfa a $D_R(a)$.*

iv) *Para ningún natural $k \geq 0$ existe $\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.*

b) *Sea ∞ singularidad aislada de f. Sea $D^*_{1/R}(\infty)$ el entorno pinchado de ∞ donde f es holomorfa. Entonces son equivalentes:*

i) *∞ es una singularidad esencial de f.*

ii) *Para ningún natural $k \geq 0$ la función $f(z)/z^k$ es acotada en $D^*_R(a)$.*

iii) *Para ningún natural $k \geq 0$ existe $\lim_{z \to \infty} f(z)/z^k$ en $\overline{\mathbb{C}}$.*

Teorema 17.1.12. Teorema de Weierstrass-Casorati.
Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ una singularidad esencial de f y sea $D^*(a)$ un disco pinchado de a donde f es holomorfa.
El conjunto imagen $f(D^*(a))$ es denso en $\mathbb{C}$, es decir todo punto $w \in \mathbb{C}$ es el límite de alguna sucesión de puntos $w_n \in f(D^*(a))$. Precisamente:

$$\forall\, w \in \mathbb{C} \;\text{ existe } z_n \in D^*(a) \quad \text{tal que} \quad \lim_{n \to +\infty} f(z_n) = w \quad (1)$$

Nota: Es válida una versión más fuerte del teorema anterior, llamado Teorema de Picard, cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 17.1.13. Teorema de Picard. *Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ una singularidad esencial de f y sea $D^*(a)$ un disco pinchado de a donde f es holomorfa. Entonces el conjunto imagen $f(D^*(a))$ es todo el conjunto $\mathbb{C}$ excepto a lo sumo un punto.*

17.2. *Series de Laurent.*

Los detalles y demotraciones de esta parte se encuentran en la sección 13.

Teorema 17.2.1. Construcción del desarrollo en serie de Laurent de una función analítica en una corona.
Sea f una función analítica en la corona

$$D(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

Entonces existe una serie (llamada serie de Laurent) tal que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall\, z \in D(z_0, R_1, R_2) \quad (1)$$

(Esta notación indica que la serie de Laurent en (1) es convergente puntualmente para todo $z \in D(z_0, R_1, R_2)$ y su suma coincide con $f(z)$).

Además

a) *La serie de Laurent que cumple* (1) *es única y sus coeficientes son:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D(z_0, R_1, R_2)$ *tal que* $Ind_\gamma(z_0) = 1$.

b) *La serie de Laurent que cumple* (1) *converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto* $K \subset D(z_0, R_1, R_2)$.

Nota 17.2.2. Corona de convergencia de una serie de Laurent.

Dada una serie de Laurent, la mayor corona

$$D(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$$

posible donde converge puntualmente (corona de convergencia), que coincide con el mayor abierto posible donde converge puntualmente la serie, se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$R_2 = \frac{1}{\operatorname{lím\,sup}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad R_1 = \operatorname{lím}\sup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \qquad (2)$$

Obsérvese que los entornos pinchados de las singularidades aisladas son coronas donde la función es holomorfa, por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema anterior.

Corolario 17.2.3. Serie de Laurent en las singularidades aisladas.

a) *Sea* $a \in \mathbb{C}$ *una singularidad aislada de* f *y sea* $D^*_R(a)$ *un entorno pinchado de* a *donde* f *es holomorfa.*

Entonces existe una serie de Laurent tal que:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \forall\, z \in D^*_R(a) \quad (1)$$

Además la serie de Laurent que cumple (1) *es única, converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto* $K \subset D^*_R(a)$*; y sus coeficientes verifican:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D^*_R(a)$ *tal que* $Ind_\gamma(a) = 1$.

b) *Sea* ∞ *una singularidad aislada de* f *y sea* $D^*_{1/R}(\infty)$ *un entorno de* ∞ *donde* f *es holomorfa.*

Entonces existe una serie de Laurent tal que:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \forall\, z \in D^*_{1/R}(\infty) \quad (2)$$

Además la serie de Laurent que cumple (2) *es única, converge uniformemente y absolutamente en cualquier compacto* $K \subset D^*_{1/R}(\infty)$*; y sus coeficientes verifican*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) z^{n-1}\, dz \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$$

cualquiera sea la curva cerrada $\gamma \subset D^*_{1/R}(\infty)$ *tal que* $Ind_\gamma(0) = 1$.

Teorema 17.2.4. -

Clasificación de singularidades aisladas según su desarrollo de Laurent.

Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ *una singularidad aislada de* f*. Sean* a_n, $n \in \mathbb{Z}$ *los coeficientes de la serie de Laurent centrada en* a.

Entonces:

i) a es una singularidad evitable si y solo si $a_{-n} = 0 \;\; \forall\, n \geq 1$.

ii) a es un polo de orden $k \geq 1$ si y solo si $a_{-k} \neq 0$ y $a_{-n} = 0 \;\; \forall\, n \geq k$.

iii) a es una singularidad esencial si y solo si la sucesión a_{-n} para $n \geq 1$, tiene infinitos términos no nulos.

17.2.5. Cálculo de los coeficientes del desarrollo de Laurent mediante derivación.

Las fórmulas del corolario anterior dan fórmulas integrales para calcular los coeficientes del desarrollo de Laurent en cualquier singularidad aislada, en particular para las evitables y los polos.

Pero cuando la singularidad no es esencial, podemos dar también fórmulas con derivadas, para calcular los coeficientes del desarrollo de Laurent.

Si la singularidad a es evitable, y si seguimos llamando f a la extensión analítica de f al disco de centro a, entonces el desarrollo de Laurent de f centrado en $z = a$ es el desarrollo en serie de potencias de $z - a$. Luego:

$$a \in \mathbb{C} \text{ evitable } \;\Rightarrow\; a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \;\; \forall\, n \geq 0$$

Si la singularidad a es un polo de orden k, podemos hacer lo mismo con la extensión analítica de $(z-a)^k f(z)$. Seguimos llamando con el mismo nombre $(z-a)^k f(z)$ a la función extendida. El coeficiente a_n del desarrollo de Laurent de f es el coeficiente b_{n+k} del desarrollo de Taylor de $(z-a)^k f(z)$. Se deduce:

$$a \in \mathbb{C} \text{ polo de orden } k \;\Rightarrow\; a_n = \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{d^{n+k}}{dz^{n+k}} \;\; (z-a)^k f(z) \right) \Bigg|_{z=a} \quad \forall\, n \geq -k$$

donde d^m/dz^m indica derivada $m-$ésima respecto de z.

17.3. *Teoremas de aproximación en compactos.*

Los detalles y demostraciones de esta parte se encuentran en la sección 14.

Definición 17.3.1. Funciones meromorfas. Una función f se dice que es *meromorfa en el abierto* Ω y se denota $f \in M(\Omega)$ si f es analítica en Ω excepto a lo sumo en una cantidad de puntos que sean todos singularidades aisladas evitables o polos.

Teorema 17.3.2. Caracterización de polinomios y funciones racionales.
a) *Una función entera (analítica en el plano complejo) que tenga en infinito un polo o una singularidad evitable, es un polinomio y recíprocamente.*
b) *Una función meromorfa en el plano complejo que tenga en infinito un polo o una singularidad evitable, es una función racional y recíprocamente.*

Teorema 17.3.3. Teorema pequeño de Picard.
Toda función entera (analítica en todo el plano complejo) *no constante tiene como recorrido todo el plano complejo excepto a lo sumo un punto.*

17.3.4. Ejemplos.
La función e^z recorre todo el plano complejo excepto el 0.
Los polinomios $P(z)$ de grado $k \geq 1$ recorren todo el plano complejo-

Definición 17.3.5. Convergencia uniforme en compactos.
Decimos que una sucesión f_n de funciones complejas definidas en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ *se aproxima en compactos (o converge uniformemente en compactos de* Ω*) a una función* $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, si para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un N (que puede depender del compacto K y del número ϵ dados, pero que no depende de z) tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f(z) - f_n(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K$$

Definición 17.3.6. Aproximación por funciones racionales.
Decimos que una función compleja f definida en el abierto Ω *se aproxima en compactos de* Ω *por funciones racionales* cuando existe una sucesión de funciones racionales f_n definidas en Ω (por lo tanto sus polos no están en Ω) que se aproxima en compactos (o converge uniformemente en compactos de Ω) a f.

Teorema 17.3.7. Aproximación de funciones meromorfas por funciones racionales.
a) Si f *es entera entonces* f *se aproxima en compactos de* $\mathbb{C}$ *por polinomios.*
b) Sea f *una función meromorfa en* $\mathbb{C}$*. Sea* Ω *el abierto que se obtiene de* $\mathbb{C}$ *retirando todos los polos de* f*.*
Si f *tiene en* ∞ *una singularidad aislada entonces* f *se aproxima en compactos de* Ω *por funciones racionales.*

En el espacio funcional denotado como $C_\omega(\Omega)$, formado por todas las funciones analíticas en el abierto Ω, se define como topología, es decir la forma de aproximar funciones, aquella dada por la convergencia uniforme en compactos de Ω.

Teorema 17.3.8. Topología C_ω en el espacio de las funciones analíticas.
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y sea una sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$ que converge uniformemente en compactos de Ω a una función f.
Entonces:
a) $f \in H(\Omega)$
b) *La sucesión de derivadas f'_n converge uniformemente en compactos de Ω a la derivada f'.*
c) *La sucesión de derivadas k-ésimas $f_n^{(k)}$ converge uniformemente en compactos de Ω a la derivada $k-$ésima $f^{(k)}$.*

Definición 17.3.9. Familia normal.
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y sea una sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$, $n \geq 1$. La sucesión f_n se llama *familia normal* si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $M \geq 0$ (que puede depender del compacto K pero que es independiente de n y de z), tal que:

$$|f_n(z)| \leq M \quad \forall\, n \geq 1, \ \ \forall\, z \in K$$

Esta propiedad se llama *equi-acotación en compactos.*
Dicho de otra manera: una familia es normal si es equi-acotada en compactos.

Propiedades de las familias normales:
Si $f_n \in H(\Omega)$ es una familia normal en $Omega$, entonces:

- f'_n *también es una familia normal en Omega.*
- f_n *es una familia equicontinua en compactos de Omega.*

  Se dice que f_n es equicontinua en compactos, si para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$, existe δ (independiente de n y de z_0) tal que

$$z_0 \in K, \ |z - z_0| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f_n(z) - f_n(z_0)| < \epsilon \ \ \forall\, n \geq 1$$

Teorema 17.3.10. Teorema de Montel.
Si la sucesión de funciones analíticas $f_n \in H(\Omega)$ es una familia normal, entonces tiene alguna subsucesión que es uniformemente convergente en compactos de Ω.

17.4. *Teoría de los residuos.*

Los detalles y demostraciones de esta parte se encuentran en la sección 15.

Definición 17.4.1. Residuo de una función en una singularidad aislada.
Dada una función f que tiene en $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada, se llama residuo de f en a, y se denota como $Res_f(a)$ al siguiente número complejo:

$$Res_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

donde γ es cualquier curva cerrada contenida en el entorno pinchado $D^*_R(a)$ donde f es holomorfa, y tal que da una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de a. Por ejemplo suele tomarse $\gamma = \partial D_r(a)$, donde $0 < r < R$.

Nota: Se observa que el residuo, definido arriba, no depende de la elección de la curva γ.

El residuo de una función en una singularidad aislada se puede calcular de tres formas diferentes:

- Con la fórmula integral de la definición anterior.
- Como el coeficiente a_{-1} del desarrollo en serie de Laurent de la función f centrado en $z = a$ (o en ∞).
- Con la fórmula de derivación de la siguiente proposición 17.4.2, cuando la singularidad aislada en un polo.

Nota: El residuo de un polo que no es simple, o de una singularidad esencial, puede ser cero. Pero la de un polo simple es siempre diferente de cero, porque en ese caso el coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent es necesariamente no nulo.

Proposición 17.4.2. Fórmula del residuo para un polo usando la derivada:
Si f tiene un polo $a \in \mathbb{C}$ de orden $k \geq 1$ y g es la extensión analítica de $(z-a)^k f(z)$ en un entorno $D_R(a)$, entonces el residuo de f en a es:

$$Res_f(a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

En particular si a es un polo simple, $k = 1$ y la fórmula anterior se transforma en:

$$Res_f(a) = g(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) \neq 0.$$

$$Res_f(a) = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)}{1/f(z)} = \frac{1}{(1/f(z))'|_{z=a}} \neq 0$$

Teorema 17.4.3. Teorema de los residuos.
Si f es analítica en un abierto Ω excepto a lo sumo en una cantidad finita de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ (estos puntos son singularidades aisladas de f) *entonces para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$ que no pase por los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, y que sea homotópica a un punto en Ω, se cumple:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} Res_f(z_j)\, Ind_\gamma(z_j).$$

(Por convención la suma de la derecha es nula si $m = 0$.)

Nota: El teorema también es válido para una cantidad infinita de singularidades aisladas de f en Ω.

Teorema 17.4.4. Principio del argumento. *Sea f meromorfa no idénticamente nula en el abierto Ω. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva homotópica a un punto en Ω que no pasa por los ceros ni por los polos de f.*

Sean $z_1, z_2, \dots, z_m$ los ceros de f contenidos en Ω y tales que $Ind_\gamma(z_j) \neq 0$. Sean $k_1, k_2, \dots, k_m$ sus respectivas multiplicidades. Sean $w_1, w_2, \dots, w_n$ los polos de f contenidos en Ω y tales que $Ind_\gamma(p_j) \neq 0$. Sean $h_1, h_2, \dots, h_n$ sus respectivas multiplicidades.

Sea $f \circ \gamma$ la curva que tiene parametrización $z = f(\gamma(t)),\ t \in [a,b]$ donde $z = \gamma(t),\ t \in [a,b]$ es una parametrización de γ.

Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{m} k_j Ind_\gamma(z_j) - \sum_{j=1}^{n} h_j Ind_\gamma(w_j) = Ind_{f\circ\gamma}(0)$$

Nota 17.4.5. El principal uso del Principio del Argumento se da cuando γ es una curva de Jordan (curva cerrada simple, es decir sin más autointersecciones que los extremos final e inicial). Los puntos tales que el índice de γ no es nulo, son los puntos del interior a γ (de la región acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$). El principio del argumento dice, en ese caso, lo siguiente:

Principio del argumento. *La cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f, en el interior a la curva de Jordan γ, contado cada uno tantas veces como su multiplicidad, es igual a $(1/2\pi i) \int_\gamma f'(z)/f(z)\, dz$ y es igual a la cantidad de vueltas que da la curva $f \circ \gamma$ alrededor del origen.*

En particular, si f es analítica en Ω, no tiene polos y entonces el resultado anterior es la cantidad de ceros de f en el interior de γ, contado cada uno tantas veces como su multiplicidad.

Teorema 17.4.6. Teorema de Rouché. *Sean f y g dos funciones meromorfas en Ω. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva de Jordan (cerrada simple) homotópica a un punto en Ω y que no pasa por los ceros ni por los polos de f ni de g. Sea R la región acotada encerrada por γ.*

Si

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in \gamma^*$$

entonces la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f en R (contados con su multiplicidad) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de g en R (contados con su multiplicidad).

Nota 17.4.7. Otro enunciado del teorema de Rouché. La desigualdad en la hipótesis del teorema de Rouché puede sustituirse por la siguiente:

Si se cumple

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall\, z \in \gamma^*$$

entonces, vale la tesis del teorema de Rouché.