2. Derivación y funciones holomorfas.

2.1. Derivación de funciones complejas y funciones holomorfas.

Sea Ω abierto contenido en $\mathbb{C}$, $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.

Definición 2.1.1. Función derivable en un punto y función holomorfa.

$f(z)$ es derivable en z_0 si existe el límite siguiente, llamado derivada de f en z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

f es holomorfa en Ω si es derivable en z_0 para todo $z_0 \in \Omega$.

Notación: Se denota $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω .

Proposición 2.1.2. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones.

Si f y g son holomorfas en Ω entonces $f + g$ y fg también lo son y

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Además f/g es holomorfa en los puntos de Ω donde no se anula g y en ellos vale:

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

Demostración: Se demuestra análogamente que para las funciones reales de variable real, usando la definición de derivada, y las propiedades de límite, que son las mismas para funciones de variable compleja que para funciones de variable real.

2.1.3. Ejemplos:

Si $f(z) = k$ constante en Ω , entonces $f'(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$, lo cual se verifica directamente aplicando la definición de derivada.

Si $f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$ (función identidad), entonces $f'(z) = 1$ constante, lo cual se verifica directamente aplicando la definición de derivada.

Para todo n natural $n \geq 1$, vale $(z^n)' = nz^{n-1}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Esto se verifica por inducción completa en n aplicando la regla de derivada de un producto.

Para todo n natural $n \geq 1$, vale $(z^{-n})' = -nz^{-n-1}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Se verifica aplicando la regla de derivada de un cociente a $z^{-n} = 1/z^n$.

Los polinomios $P(z)$ son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$, pues son suma de una cantidad finita de monomios en z del tipo $a_n z^n$ con a_n constante.

Las funciones racionales $P(z)/Q(z)$ (cociente de polinomios) son funciones holomorfas en el abierto Ω que se obtiene de $\mathbb{C}$ quitando los puntos donde se anula el polinomio $Q(z)$. Se prueba usando la regla de derivación del cociente de funciones.

Teorema 2.1.4. Toda función holomorfa es continua.

Demostración: Se demuestra análogamente al teorema de funciones reales de una variable real, visto en los cursos previos de Cálculo, que dice que toda función derivable es continua. Solo hay que sustituir en la demostración el valor absoluto de las variables reales por el módulo de las variables complejas.

Ejemplo 2.1.5. $\text{Log}_{[0,2\pi)}(z)$ está definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no es holomorfa en Ω ya que es discontinua en el semieje real positivo.

Sin embargo veremos en 2.1.13 que $\text{Log}_{[0,2\pi)}$ es holomorfa en $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ y para todo $z \in \Omega_1$ vale $(\text{Log}_{[0,2\pi)})'(z) = (1/z)$.

Análogamente $\text{Log}_{(-\pi,\pi]}(z)$ está definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no es holomorfa en Ω ya que es discontinua en el semieje real negativo.

Sin embargo veremos en 2.1.13 que $\text{Log}_{(-\pi,\pi]}$ es holomorfa en $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ y para todo $z \in \Omega_2$ vale $(\text{Log}_{(-\pi,\pi]})'(z) = (1/z)$.

Más en general, fijando $\theta_0 \in \mathbb{R}$, se define para todo $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la función $\text{Arg}[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)(z)$ como el único $\phi \in \text{arg}(z)$ tal que $\theta_0 \leq \phi < \theta_0 + 2\pi$.

Se define la función $\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}(z) = L|z| + i\text{Arg}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}(z)$ para todo $z \in \Omega$. Esta función es discontinua en la semirrecta $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : \theta_0 \in \text{arg}(z)\}$. Por lo tanto no es holomorfa en Ω .

Sin embargo veremos en 2.1.13 que $\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}$ es holomorfa en $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus S_3$ y para todo $z \in \Omega_3$ vale $(\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)})'(z) = (1/z)$.

En general, aunque no lo demostraremos, si Ω_4 es un conjunto abierto simplemente conexo que no contiene al origen, puede definirse una función $\text{Log} \in H(\Omega_4)$ tal que $\text{Log}(z) \in \text{log}(z)$ para todo $z \in \Omega_4$, y que cumple $\text{Log}'(z) = 1/z$ para todo $z \in \Omega_4$.

Teorema 2.1.6. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

f es holomorfa en Ω si y solo si u y v son diferenciables en todo punto de Ω y cumplen las ecuaciones de Cauchy- Riemann siguientes:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad \forall z \in \Omega$$

Demostración: Se probará este teorema más abajo, junto a la prueba del teorema 2.1.8.

Nota 2.1.7. Se recuerda que una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice, por definición, que es de clase C^∞ si sus partes real e imaginaria u y v lo son; es decir existen y son continuas las derivadas parciales de u y v de todos los órdenes.

La condición de existencia de las derivadas parciales de u y v , aún en el caso en que estas funciones sean C^∞ , no es suficiente para que f sea holomorfa. Se requiere además que u y v verifiquen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, y que no todas las funciones reales u y v verifican.

Por ejemplo la función $f(z) = (z + \bar{z})^2 - i(z - \bar{z})^2 = f(x + iy) = 4x^2 + 4iy^2$ no es holomorfa en ningún abierto de $\mathbb{C}$ porque $u = 4x^2$, $v = 4y^2$ no verifican las ecuaciones de Cauchy- Riemann. Sin embargo u y v son de clase C^∞ , y por lo tanto por definición también lo es f .

Por otra parte la existencia de derivadas parciales u_x y u_y , aún en el caso en que ellas verifiquen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, no es suficiente para que f sea holomorfa. Se requiere además que u y v sean diferenciables.

Teorema 2.1.8. Expresión de la derivada.

Si f es holomorfa en Ω entonces

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

y también

$$f' = f_x = -if_y$$

donde $f_x = u_x + iv_x$ y $f_y = u_y + iv_y$.

Demostración de los teoremas 2.1.6 y 2.1.8: Las siguientes 5 afirmaciones pueden ser verdaderas o falsas, pero probaremos más abajo que son todas equivalentes entre sí. Observemos que las afirmaciones a) y e), si son equivalentes, demuestran los dos teoremas 2.1.6 y 2.1.8.

Afirmación a)

$$f(z) \text{ es derivable en } z_0 \text{ y } f'(z_0) = a + bi$$

Afirmación b)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (a + bi) = 0$$

Afirmación c)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - (a + bi)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$$

Afirmación d)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\epsilon_1(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\epsilon_2(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

donde

$$\epsilon_1(x,y) = u(x,y) - u(x_0,y_0) - a(x-x_0) + b(y-y_0)$$

$$\epsilon_2(x,y) = v(x,y) - v(x_0,y_0) - b(x-x_0) - a(y-y_0)$$

Afirmación e) $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son diferenciables en (x_0, y_0) y sus derivadas parciales cumplen

$$u_x(x_0, y_0) = a, \quad u_y(x_0, y_0) = -b, \quad v_x(x_0, y_0) = b, \quad v_y(x_0, y_0) = a$$

Prueba de a) $\Leftrightarrow$ b): Es la definición de derivabilidad y derivada de $f(z)$ en el punto $z = z_0$.

Prueba de b) $\Leftrightarrow$ c): Para $z \neq z_0$, denotamos $z - z_0 = |z - z_0|e^{i\theta}$ para algún ángulo $\theta = \theta(z, z_0)$. Entonces:

$$\frac{f(z) - f(z_0) - (a + bi)(z - z_0)}{z - z_0} = e^{-i\theta} \left(\frac{f(z) - f(z_0) - (a + bi)(z - z_0)}{|z - z_0|} \right) \quad (1)$$

Considerando que $|e^{-i\theta}| = 1$, está acotada y su inverso también, el miembro de la izquierda de (1) tiende a cero si y solamente si el factor de la derecha de (1) tiende a cero.

Prueba de c) $\Leftrightarrow$ d): Separando en partes real e imaginaria se obtiene:

$$\text{Afirmación c)} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} \left(\frac{f(z) - f(z_0) - (a + bi)(z - z_0)}{|z - z_0|} \right) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} \left(\frac{f(z) - f(z_0) - (a + bi)(z - z_0)}{|z - z_0|} \right) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Siendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y siendo $z = x + iy$, calculamos las partes real e imaginaria de (2) y obtenemos:

$$\text{Afirmación c)} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(\frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - a(x-x_0) + b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right) = 0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(\frac{v(x,y) - v(x_0,y_0) - b(x-x_0) - a(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Llamando $\epsilon_1(x, y)$ y $\epsilon_2(x, y)$ a las funciones de los numeradores en (3) se obtiene d) como queríamos.

Prueba de d) $\Leftrightarrow$ e): Basta recordar la definición y propiedades de diferenciabilidad de una función real $F(x, y)$ de dos variables reales, que se enuncian a continuación:

$F(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) , por definición, si existen dos números reales A y B y una función $\epsilon(x, y)$ tales que

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \epsilon(x, y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\epsilon(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \quad (5)$$

Además si $F(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) , los números A y B de (4) cumplen $A = F_x(x_0, y_0)$, $B = F_y(x_0, y_0)$.

Aplicando (4) y (5) primero con $F = u$, $\epsilon = \epsilon_1$, $A = a$, $B = -b$ y después con $F = v$, $\epsilon = \epsilon_2$, $A = b$, $B = a$ se obtiene d) $\Leftrightarrow$ e) como queríamos. $\square$

Ejemplo 2.1.9. La función exponencial compleja pertenece a $H(\mathbb{C})$ y $(e^z)' = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$. En efecto $u = e^x(\cos y)$ y $v = e^x(\sin y)$ son diferenciables y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Además $u_x = e^x(\cos y) = u$ y $u_y = -e^x(\sin y) = -v$. Luego $(e^z)' = u_x - iu_y = u + iv = e^z$.

Corolario 2.1.10. Si $f \in H(\Omega)$ tiene módulo constante en el abierto conexo Ω entonces es constante en Ω .

Demostración: Sea $f = u + iv$. Hay que probar que u y v son constantes en Ω .

Se tiene $|f|^2 = |u + iv|^2 = u^2 + v^2 = k$ constante en Ω , por hipótesis. Si la constante k es nula, entonces $|f(z)| = 0 \quad \forall z \in \Omega$, lo que implica que $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$ y f es constante como queríamos probar.

Si la constante k no es nula, derivando parcialmente la igualdad $u^2 + v^2 = k$ respecto de x y respecto de y se obtiene:

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (1)$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Sustituyendo en (1) resulta:

$$2uu_x - 2vu_y = 0, \quad 2uu_y + 2vu_x = 0 \quad (2)$$

Multiplicando la primera igualdad de (2) por u , la segunda igualdad de (2) por v y sumando, se obtiene:

$$2k(u^2 + v^2)u_x = 0 \Rightarrow u_x = 0$$

Análogamente, multiplicando la primera igualdad de (2) por $-v$, la segunda por u y sumando, se obtiene:

$$2k(u^2 + v^2)u_y = 0 \Rightarrow u_y = 0$$

Luego u_x y u_y son idénticamente nulas en Ω . Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, v_x y v_y también son idénticamente nulas. Luego, como son u y v diferenciables en todo punto de Ω , y sus derivadas parciales son idénticamente nulas en Ω , u y v son de clase C^1 .

Para toda función escalar (potencial) u de clase C^1 en Ω , la integral curvilínea del campo (u_x, u_y) a lo largo de una curva $\gamma \subset \Omega$ es la diferencia del potencial en los extremos inicial (x_0, y_0) y final (x_1, y_1) de la curva γ , es decir:

$$u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = \int_{\gamma} u_x dx + u_y dy \quad (3)$$

Luego, siendo $u_x = 0$, $u_y = 0$ para todo punto de Ω , por (3) se cumple $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1)$ para toda pareja de puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) que puedan ser unidos por una curva contenida en Ω . Como Ω es conexo, esa pareja de puntos pueden ser cualesquiera en Ω . Luego u es constante en Ω .

Análogamente, siendo $v_x = 0$, $v_y = 0$ para todo punto de Ω , y siendo Ω conexo, v es constante en Ω .

Luego $f = u + iv$ es constante en Ω . $\square$

Nota: El teorema anterior es falso si Ω no es conexo. En ese caso también se puede demostrar que u_x, u_y, v_x, v_y son idénticamente nulas en Ω , pero si Ω no es conexo, entonces las funciones u y v no tienen por qué ser constantes. Toman valores constantes en cada componente conexa de Ω , pero pueden tomar valores constantes diferentes en una componente que en otra.

Teorema 2.1.11. Derivada de función compuesta, regla de la cadena. Si $f \in H(\Omega)$ y $g \in H(\Omega_2)$ con $f(\Omega) \subset \Omega_2$, entonces la función compuesta $g \circ f$, definida como $g \circ f(z) = g(f(z)) \quad \forall z \in \Omega$, es holomorfa en Ω y su derivada es

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

Demostración: Es análoga a la prueba para funciones reales de una variable real.

Teorema 2.1.12. Derivada de función inversa. Sea $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ es invertible con inversa continua $f^{-1} : \Omega_2 \mapsto \Omega_1$. Si $f \in H(\Omega_1)$ y $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega_1$, entonces $f^{-1} \in H(\Omega_2)$ y su derivada es:

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad \text{donde } w = f(z), \quad z = f^{-1}(w) \quad \forall w \in \Omega_2, z \in \Omega_1$$

Nota: En este teorema, las hipótesis de continuidad de f^{-1} y de $f' \neq 0$ son redundantes.

Demostración: A pesar de que la prueba es similar que para funciones reales de variable real, vamos a reproducirla:

Sean $z, z_0 \in \Omega_1$, $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0) \in \Omega_2$, por lo tanto $z = f^{-1}(w)$, $z_0 = f^{-1}(w_0)$. Como f es invertible y su inversa es f^{-1} se cumple $z \neq z_0 \Leftrightarrow w \neq w_0$. Calculemos el cociente incremental de f^{-1} para $w \neq w_0$:

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{(w - w_0)/(z - z_0)} = \frac{1}{(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)}$$

Tomando límite cuando $w \rightarrow w_0$, como f^{-1} es continua $z = f^{-1}(w) \rightarrow f^{-1}(w_0) = z_0$, y resulta:

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Se deduce que f^{-1} es derivable en w_0 y que $(f^{-1})'(w_0) = 1/f'(z_0)$, donde $z_0 = f^{-1}(w_0)$. Como lo anterior vale para cualquier w_0 en Ω_2 , la función inversa es holomorfa en Ω_2 y su derivada cumple $(f^{-1})'(w) = 1/f'(z)$, donde $z = f^{-1}(w)$. $\square$

Proposición 2.1.13. Derivada del logaritmo principal en conjuntos simplemente conexos.

1) $\text{Log}_{[0, 2\pi)}$ es holomorfa en $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, y para todo $z \in \Omega_1$ se cumple

$$(\text{Log}_{[0, 2\pi)})'(z) = (1/z)$$

2) $\text{Log}_{(-\pi, \pi]}$ es holomorfa en $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, y para todo $z \in \Omega_2$ se cumple

$$(\text{Log}_{(-\pi, \pi]})'(z) = (1/z)$$

3) Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fijo. La función $\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}$ es holomorfa en $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \theta_0 \in \arg(z)\}$, y para todo $z \in \Omega_3$ se cumple

$$(\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)})'(z) = (1/z)$$

Nota: Una demostración de la parte 2) de esta proposición, sin usar el teorema de derivada de función inversa, pero usando el teorema de existencia de armónica conjugada de la próxima sección, se da en 2.3.6.

Demostración: Basta demostrar la parte 3) del teorema, pues la parte 1) es un caso particular tomando $\theta_0 = 0$, y la parte 2) tomando $\theta_0 = -\pi$.

La función $z = f(w) = e^w$ restringida a la banda horizontal $\Omega_0 = \{w \in \mathbb{C} : \theta_0 < \text{Im}(w) < \theta_0 + 2\pi\}$, tiene como imagen el abierto Ω_3 . Además $f : \Omega_0 \mapsto \Omega_3$ es invertible, y por construcción de la rama del logaritmo que estamos estudiando, se cumple $w = f^{-1}(z) = \text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}(z) \quad \forall z \in \Omega_3$.

Por otro lado $f'(w) = (e^w)' = e^w \neq 0 \quad \forall w \in \Omega_0$.

Aplicando el teorema 2.1.12 (en esta demostración hemos cambiado los roles de z y w con respecto a los del enunciado del teorema 2.1.12), resulta $w = \text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}(z)$ holomorfa en Ω_3 y $\forall z \in \Omega_3$ su derivada es:

$$(\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)})'(z) = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \quad \square$$

2.2. Transformaciones conformes.

Se recuerda la definición de transformación conforme en 1.4.6 como las transformaciones que preservan la medida de los ángulos, con signo. Ahora vinculemos la existencia de derivada no nula respecto a la variable compleja z , con la conformalidad de la transformación:

Teorema 2.2.1. Derivada no nula y conformalidad.

a) Sea f una transformación holomorfa en Ω y tal que $f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$. Entonces f es conforme. (Ver definición de transformación conforme en 1.4.6.)

b) Las transformaciones de Möbius son conformes.

c) La exponencial es conforme.

Demostración: Parte a) Sea $\gamma : z = z(t)$ una curva que pasa por el punto $z_0 = z(t_0)$ y que tiene en z_0 vector tangente v :

$$v = \dot{z}(t_0) \neq 0$$

Consideremos la curva imagen por f de γ , es decir $f(\gamma) : w = f(z(t))$ que pasa por el punto $w_0 = f(z_0)$ y que tiene en w_0 vector tangente

$$u = \left(\frac{d}{dt} f(z(t)) \right) \Big|_{t=t_0} = f'(z(t_0)) \dot{z}(t_0) = f'(z_0)v \Rightarrow$$

$$u = r_0 e^{i\theta_0} v \quad (1)$$

donde $r_0 = |f'(z_0)| > 0$, y θ_0 es un argumento de $f'(z_0)$.

La igualdad (1) puede interpretarse del siguiente modo: para obtener el vector tangente u de la curva imagen $f(\gamma)$ en el punto $f(z_0)$, hay que aplicar al vector tangente v de la curva γ en el punto z_0 una rotación de ángulo constante θ_0 y luego una homotecia de razón $r_0 > 0$. Eso implica que si dos curvas γ_1 y γ_2 pasan por z_0 con vectores tangentes $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$ respectivamente, que forman entre sí un ángulo φ , entonces sus curvas imágenes por f pasan por $f(z_0)$ con vectores tangentes $u_1 = r_0 e^{i\theta_0} v_1$ y $u_2 = r_0 e^{i\theta_0} v_2$ que forman entre sí el mismo ángulo φ , con el mismo signo. Esto es por definición que la transformación f preserva los ángulos, o que es conforme.

Parte b) La derivada de la transformación de Möbius $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, $ad - bc \neq 0$ es

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

Luego, por la parte a), es una transformación conforme.

Parte c) La derivada de la exponencial $f(z) = e^z$ es $f'(z) = e^z \neq 0$. Luego, por la parte a), es una transformación conforme. $\square$

2.3. Funciones armónicas.

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$ y sea $F = F(x, y)$ una función real de dos variables reales definida para todo $(x, y) \in \Omega$.

Definición 2.3.1. La función $F = F(x, y)$ se llama *armónica en Ω* si es de clase C^2 y verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales, llamada *Ecuación de Laplace*:

$$F_{xx} + F_{yy} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Teorema 2.3.2. Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ con parte real u y parte imaginaria v . Si f es holomorfa y de clase C^2 en Ω entonces u y v son armónicas.

Nota: La hipótesis que f es de clase C^2 es redundante. La teoría de Cauchy demuestra, entre otros resultados, que toda función holomorfa es de clase C^∞ .

Demostración: Si $f \in H(\Omega)$ entonces $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann). Como por hipótesis u y v son de clase C^2 podemos derivar respecto de x y respecto de y las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Se obtiene:

$$u_{xx} = v_{yx} \quad u_{yy} = -v_{xy} \quad (1)$$

$$u_{xy} = v_{yy} \quad u_{yx} = -v_{xx} \quad (2)$$

Además como u y v son de clase C^2 las derivadas iteradas segundas son iguales, es decir $u_{xy} = u_{yx}$, $v_{xy} = v_{yx}$. Sumando las dos ecuaciones de (1) entre sí, y restando las dos ecuaciones de (2) entre sí, se deduce

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \square$$

Definición 2.3.3. La pareja (ordenada) de funciones (u, v) se llama de *armónicas conjugadas en Ω* si son ambas armónicas en Ω y además cumplen, para todo punto de Ω , las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Si (u, v) es una pareja de armónicas conjugadas, a la función v se la llama *armónica conjugada de u* .

Teorema 2.3.4. Dada una función armónica u en un abierto Ω no vacío cualquiera:

Existe $f \in H(\Omega)$ tal que $Re(f) = u$ si y solo si existe armónica conjugada v de u en Ω .

Nota: Podría suceder que no existiera ninguna de las dos, ni función holomorfa con parte real igual a u , ni armónica conjugada de u . Pero si existe alguna de las dos, entonces existe la otra.

Demostración: Si existe $f \in H(\Omega)$ con $Re(f) = u$ entonces llamando v a la parte imaginaria de f , por el teorema 2.1.6 u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. La función u por hipótesis es armónica, y por la definición 2.3.1 es de clase C^2 . Entonces las derivadas parciales de u son de clase C^1 y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, también las derivadas parciales de v son de clase C^1 . Luego v es C^2 y por el teorema 2.3.2 son u y v armónicas. Concluimos que existe v armónica conjugada de u , como queríamos demostrar.

Recíprocamente, si existe v armónica conjugada de u , entonces construimos la función compleja $f = u + iv$. Las funciones u y v son de clase C^2 (por ser armónicas, cf. Definición 2.3.1). Entonces

sus derivadas primeras son C^1 , en particular son continuas. Toda función real de dos variables con derivadas parciales continuas, es diferenciable. Así que u y v son diferenciables. Por otra parte, por hipótesis, v es la armónica conjugada de u . Entonces por definición de armónica conjugada, u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Aplicando el teorema 2.1.6, la condición de que las partes real e imaginaria de f sean diferenciables y verifiquen las ecuaciones de Cauchy Riemann es suficiente y necesaria para que f sea holomorfa en Ω . Luego, $f \in H(\Omega)$ y por construcción $Re(f) = u$. $\square$

Teorema 2.3.5. Existencia de armónica conjugada y de función holomorfa dada su parte real en simplemente conexos.

Dada una función armónica u en un abierto Ω simplemente conexo:

- a) *Existe armónica conjugada v de u en Ω .*
- b) *Existe $f \in H(\Omega)$ tal que $Re(f) = u$*

Demostración: Por el teorema 2.3.4 la afirmación a) es equivalente a b). Basta entonces demostrar una sola de ellas. Demostraremos a).

Consideremos el campo (P, Q) en Ω donde

$$P(x, y) = -u_y(x, y), \quad Q(x, y) = u_x(x, y) \quad (1)$$

Aplicaremos al campo (P, Q) el corolario 2 del teorema de Green (enunciado en el párrafo 1.1.8).

El campo (P, Q) es de clase C^1 en Ω por (1) y porque u , al ser armónica por hipótesis, es de clase C^2 (cf. Definición 2.3.1). Verifiquemos que el campo (P, Q) es irrotacional en Ω , es decir $Q_x - P_y = 0$. En efecto, usando (1) y que u es armónica se obtiene:

$$Q_x - P_y = u_{xx} - (-v_{yy}) = u_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

El campo (P, Q) cumple entonces las hipótesis del corolario 2 del teorema de Green. Aplicando ese corolario, se deduce que existe algún potencial escalar de (P, Q) , que llamamos v . Por definición de potencial escalar (ver 1.1.8), se cumple:

$$v \text{ es de clase } C^1, \quad v_x = P = -u_y, \quad v_y = Q = u_x \quad (2)$$

Construimos la función compleja f definiendo:

$$f = u + iv$$

Siendo u y v de clase C^1 , son diferenciables, y además, debido a (2), cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En virtud del teorema 2.1.6, estas condiciones son necesarias y suficientes para que f sea holomorfa en Ω . Además por construcción $Re(f) = u$. Luego, existe $f \in H(\Omega)$ tal que $Re(f) = u$, como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 2.3.6. Encontrar una función holomorfa f en algún abierto lo más grande posible, que tenga parte real

$$u(x, y) = \frac{1}{2}L(x^2 + y^2)$$

Encontrar su derivada f' .

Primero observemos que u está definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$. Además u es C^2 y computando las derivadas segundas de u se verifica que $u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$, es decir u es armónica en Ω .

Para construir f buscaremos una armónica conjugada v de u en algún conjunto abierto lo más grande posible (contenido en Ω) y definiremos $f = u + iv$. Usando el teorema 2.3.4 esta función f será holomorfa y su parte real será u , como queremos.

Pero $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ no es simplemente conexo. Entonces no se puede asegurar la existencia de armónica conjugada de u en Ω (lo cual no quiere decir que no exista). Para poder aplicar el teorema 2.3.5 y construir una armónica conjugada usando el procedimientos de la demostración de ese teorema, tomemos un subconjunto de Ω , lo más grande posible, que sea abierto y simplemente conexo.

En lo que sigue hágase un dibujo.

Quitemos de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ por ejemplo la semirrecta $S = \{z \in \mathbb{C} : z = 0 \text{ ó } z \neq 0, \pi \in \arg(z)\}$.

La semirrecta S es el semieje real ≤ 0 . Definamos el conjunto $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus S$. Sabemos que existen armónicas conjugadas v de u en Ω_2 , en virtud del teorema 2.3.5. Las construiremos.

Una vez obtenidas todas las v posibles, que sean armónicas conjugadas de u en Ω_2 , si alguna de ellas se pudiera extender de clase C^2 a todo el conjunto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 0\}$ donde estaba definida u , existirá armónica conjugada de u en Ω . En caso contrario no existirá.

La armónica conjugada v en Ω_2 se puede construir, como en la demostración del teorema 2.3.5, buscando los potenciales escalares del campo $(-u_y, u_x)$, que sabemos que existen en Ω_2

En nuestro caso

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

En virtud del corolario 2 del teorema de Green (párrafo 1.1.8), los potenciales escalares v del campo $(-u_y, u_x)$ en Ω_2 verifican:

$$v(x_1, y_1) - v(x_0, y_0) = \int_{\gamma} (-u_y dx + u_x dy) \quad (2)$$

para toda curva $\gamma \subset \Omega_2$ que una el punto $(x_0, y_0) \in \Omega_2$ (que podemos tomar como fijo) con el punto $(x_1, y_1) \in \Omega_2$ (que podemos tomar como variable en Ω_2). Se observa que la curva γ no puede salir de Ω_2 . Se observa que, justamente debido a que Ω_2 es simplemente conexo, la integral en (2) no depende de la curva elegida γ con tal que vaya del punto (x_0, y_0) al punto (x_1, y_1) .

Elijamos $(x_0, y_0) = (1, 0)$ y tomemos $(x_1, y_1) \in \Omega_2$ variable, y llamemos:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = |x_1 + iy_1|, \quad \theta_1 = \text{Arg}_{(-\pi, \pi]}(x_1 + iy_1) \quad (3)$$

Elijamos la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ donde:

γ_1 es el segmento que va del punto $(1, 0)$ al punto $(r_1, 0)$,

γ_2 es el arco de circunferencia con centro en el origen y radio r_1 que va del punto $(r_1, 0)$ al punto (x_1, y_1) .

Parametrizando las curvas

$$\gamma_1 : x_1(t) = 1 + t(r_1 - 1), \quad y_1(t) = 0, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2 : x_2(t) = r_1 \cos t, \quad y_2(t) = r_1 \sin t, \quad t \in [0, \theta_1]$$

(Si θ_1 es negativo el intervalo real $t \in [0, \theta_1]$ debe entenderse como $0 \geq t \geq \theta_1$ dando a t primero el valor 0 y al final el valor θ_1 .)

Sustituyendo en (2), usando (1) y las parametrizaciones de las curvas dadas, se obtiene:

$$\begin{aligned} v(x_1, y_1) - v(1, 0) &= \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-y_1(t)\dot{x}_1(t)}{x_1^2(t) + y_1^2(t)} + \frac{x_1(t)\dot{y}_1(t)}{x_1^2(t) + y_1^2(t)} \right) dt + \int_0^{\theta_1} \left(\frac{-y_2(t)\dot{x}_2(t)}{x_2^2(t) + y_2^2(t)} + \frac{x_2(t)\dot{y}_2(t)}{x_2^2(t) + y_2^2(t)} \right) dt = \\ &= 0 + \int_0^{\theta_1} \frac{r_1^2 \cos^2(t) + r_1^2 \sin^2(t)}{r_1^2} dt = \theta_1 \end{aligned}$$

Llamando $k = v(x_0, y_0)$ (es una constante real) y usando (3), se obtiene:

$$v(x_1, y_1) = k + \theta_1 = k + \text{Arg}_{(-\pi, \pi]}(x_1 + iy_1) \quad \forall (x_1, y_1) \in \Omega_2$$

La función v no puede extenderse continuamente a $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ porque es discontinua en la semirrecta $S = \{y_1 = 0, x_1 \leq 0\}$, con salto 2π . En efecto, cuando $y_1 \rightarrow 0^+$ con $x_1 < 0$ fijo, la función $\text{Arg}_{(-\pi, \pi]}(x_1 + iy_1)$ tiende a π , pero cuando $y_1 \rightarrow 0^-$ con $x_1 < 0$ fijo, la función $\text{Arg}_{(-\pi, \pi]}(x_1 + iy_1)$ tiende a $-\pi$. Luego, no existe función holomorfa con parte real igual a u en todo Ω .

La función holomorfa buscada, con parte real u , está definida en Ω_2 y es (por ejemplo eligiendo $k = 0$):

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{2}L(x^2 + y^2) + i(\text{Arg}_{(-\pi, \pi]}(x + iy)) \quad \forall (x, y) \in \Omega_2$$

$$f(z) = L|z| + i\text{Arg}_{(-\pi, \pi]}(z) = \text{Log}_{(-\pi, \pi]}(z) \quad \forall z \in \Omega_2$$

Hemos probado entonces que $\text{Log}_{(-\pi, \pi]}(z)$ es holomorfa en $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus S$ donde S es la semirrecta semieje real ≤ 0 .

Finalmente, calculemos $f'(z)$. Usando el teorema 2.1.8 que expresa la derivada de las funciones holomorfas en función de sus partes reales e imaginaria, se obtiene:

$$\text{Log}_{(-\pi, \pi]}'(z) = u_x - iu_y = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \Omega_2 \quad (4)$$

El mismo razonamiento podría haberse hecho eligiendo otra semirrecta con extremo en el origen, para que el conjunto abierto quede simplemente conexo. Tomamos θ_0 real fijo cualquiera, elijamos la semirrecta $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : z = 0 \text{ ó } z = \theta_0, \theta_0 \in \text{arg}(z)\}$.

S_3 es la semirrecta con extremo en el origen y que forma ángulo θ_0 con el semieje real positivo. Definiendo $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus S_3$, se puede construir una función v armónica conjugada de u en Ω_3 . Haciendo una construcción similar a la anterior, queda finalmente la función holomorfa

$$f(z) = \text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]}(z)$$

holomorfa en $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus S_3$, con parte real $u = (1/2)L(x^2 + y^2)$ y por lo tanto, análogamente a (4) su derivada es:

$$\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]}'(z) = u_x - iu_y = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \Omega_3$$