3. Integración y Convergencia Uniforme.

3.1. Integración compleja.

Definición 3.1.1. Dada una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continua, y una curva C^1 a trozos $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, se define la integral de f a lo largo de γ como:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}[f(z(t)) \dot{z}(t)] dt + i \int_a^b \operatorname{Im}[f(z(t)) \dot{z}(t)] dt$$

Ejemplo 3.1.2. Aplicando la definición anterior a la circunferencia C_r de centro en el punto a y radio $r > 0$, recorrida una sola vez en sentido antihorario, ($z = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$), se obtiene:

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$$

Proposición 3.1.3. Propiedades de la integral compleja.

1. $\int_{\gamma} f(z) dz$ es independiente de la parametrización C^1 a trozos que se elija, con tal que se preserve la misma orientación de la curva.

2. $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$

3. $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$.

4. $\int_{\gamma} kf(z) dz = k \int_{\gamma} f(z) dz$ si k es una constante compleja independiente de z para $z \in \gamma$.

5. $\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$

Demostración: Si u y v son las partes real e imaginaria de f , probemos la siguiente:

Afirmación: $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (vdx + udy)$.

De esta afirmación se deduce que el cálculo de la integral de la función compleja f de variable compleja z a lo largo de una curva se reduce al cálculo de las integrales de los campos reales $(u, -v)$ y (v, u) a lo largo de la misma curva. Por lo tanto, una vez probada esta afirmación, las propiedades enunciadas en la proposición son válidas porque lo son para las integrales curvilíneas de los campos reales.

Prueba de la afirmación: Recordemos que la integral de un campo (P, Q) a lo largo de una curva γ con parametrización $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$ es

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_a^b [P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt \quad (1)$$

Por definición de integral de $f(z)$:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}[f(z(t)) \dot{z}(t)] dt + i \int_a^b \operatorname{Im}[f(z(t)) \dot{z}(t)] dt \quad (2)$$

En el último miembro de la igualdad anterior sustituimos $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$, y también $f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$. Operando se obtiene las partes real e imaginaria de $f(z(t)) \dot{z}(t)$, y sustituyendo en (2), aplicando la definición (1) se verifica la igualdad de la afirmación. $\square$

Definición 3.1.4. Dada una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se llama primitiva de f en Ω , a cualquier función holomorfa $F \in H(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$.

Nota 3.1.5. Se advierte que a diferencia de lo que sucede con las funciones de variable real, no existe necesariamente primitiva de una función f dada, compleja continua en un abierto no vacío Ω . (Ver ejemplo en 3.1.9).

Sin embargo existe la integral de f a lo largo de cualquier curva contenida en Ω , ya que es el número complejo dado en la definición 3.1.1.

El problema de inexistencia de primitiva no se produce porque f sea o no sea integrable a lo largo de curvas, porque si f es continua, es integrable siempre a lo largo de curvas en Ω , ya que existe el número complejo definido en 3.1.1.

El problema es de otra clase: no es cierto en general para las funciones continuas de variable compleja el teorema fundamental del cálculo que vale para todas las funciones continuas f de variable real, y que afirma que la integral de una función continua f en un segmento con extremo inicial constante y extremo superior variable, es siempre una primitiva de f .

Es cierto sin embargo una versión del teorema fundamental del cálculo, con hipótesis adicionales a la continuidad de f . (Ver teorema 3.1.10.)

Teorema 3.1.6. Regla de Barrow.

Si f es continua y si existe F primitiva de f en Ω , entonces:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

para toda curva $\gamma \subset \Omega$ con extremo inicial z_1 y extremo final z_2 .

En particular $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$.

Demostración: Sea $U = \operatorname{Re}(F)$, $V = \operatorname{Im}(F)$. Luego

$$F(z) = U(z) + iV(z)$$

Tomemos una parametrización $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ de la curva γ , y consideremos la función compuesta $F(z(t)) = U(z(t)) + iV(z(t))$. Derivándola respecto de t y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$[U(z(t))] \cdot + i[V(z(t))] \cdot = [F(z(t))] \cdot = F'(z(t)) \cdot \dot{z}(t) = f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)$$

Luego

$$[U(z(t))] \cdot = \operatorname{Re}[f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)], \quad [V(z(t))] \cdot = \operatorname{Im}[f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)] \quad (1)$$

Por definición de integral de f :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(z(t)) \dot{z}(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(z(t)) \dot{z}(t)) dt \quad (2)$$

Aplicando (1) y la regla de Barrow para funciones reales de variable real:

$$\begin{aligned} &= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b [U(z(t))] \cdot dt + i \int_a^b [V(z(t))] \cdot dt = \\ &= U(z(b)) - U(z(a)) + i[V(z(b)) - V(z(a))] = \end{aligned}$$

$$= [U(z(b)) + iV(z(b))] - [U(z(a)) + iV(z(a))] = F(z(b)) - F(z(a)) \quad (3)$$

Si la curva γ une el punto z_1 con el punto z_2 entonces $z(a) = z_1$, $z(b) = z_2$. La igualdad (3) se transforma en

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) \quad \square$$

Corolario 3.1.7. Si $f \in H(\Omega)$ tiene derivada idénticamente nula en Ω , entonces f es constante en cada componente conexa de Ω .

Demostración: Si f tiene derivada idénticamente nula, entonces f es una primitiva de la función constante igual a cero. Aplicando la regla de Barrow a cualquier curva $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, que una un punto z_1 con un punto z_2 en Ω resulta:

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{\gamma} 0 dz = \int_a^b 0 \cdot \dot{z}(t) dt = 0$$

Fijando z_1 , se deduce que $f(z)$ es constante igual a $f(z_1)$ para todo punto z que pueda ser unido con z_1 por alguna curva en Ω . Es decir f es constante en la componente conexa de Ω que contiene a z_1 . Eligiendo z_1 en otra componente conexa de Ω , y repitiendo el razonamiento, se deduce que F es constante en cada una de las componentes conexas de Ω . $\square$

Ejemplo 3.1.8. 1. Sea m un número natural $m \geq 0$. La función $(z - a)^{m+1}/(m+1)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y su derivada es $(z - a)^m$. Luego, para toda curva cerrada γ :

$$\int_{\gamma} (z - a)^m dz = 0$$

2. Sea m un número entero negativo $m \neq -1$. La función $(z - a)^{m+1}/(m+1)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ y su derivada es $(z - a)^m$. Luego, para toda curva cerrada γ que no pase por a :

$$\int_{\gamma} (z - a)^m dz = 0$$

Ejemplo 3.1.9. La función $1/(z - a)$ es continua (e incluso holomorfa y C^∞) en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Sin embargo su integral a lo largo de la circunferencia $C_r \subset \Omega$ es $2\pi i \neq 0$. Luego, usando el contrarrecíproco de la Regla de Barrow, se deduce que no existe primitiva de $1/(z - a)$ en Ω .

A pesar de ello, sabemos del teorema 2.1.13 que en el conjunto simplemente conexo $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z - a = x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ la función $\text{Log}_{[0, 2\pi)}(z - a)$ es holomorfa y tiene como derivada $1/(z - a)$. Entonces $\text{Log}_{[0, 2\pi)}(z - a)$ es una primitiva de $1/(z - a)$ en Ω_1 .

Análogamente sabemos del teorema 2.1.13 que en el conjunto simplemente conexo $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z - a = x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ la función $\text{Log}_{(-\pi, \pi]}(z - a)$ es holomorfa y tiene como derivada $1/(z - a)$. Entonces $\text{Log}_{(-\pi, \pi]}(z - a)$ es primitiva de $1/(z - a)$ en Ω_2 .

También obtuvimos en el teorema 2.1.13 lo siguiente: Fijado $\theta_0 \in \mathbb{R}$, sea $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : \theta_0 \in \arg(z - a)\}$ la semirrecta con extremo en a y que forma ángulo θ_0 con el semieje real positivo. Sea $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus S_3$ el conjunto abierto y simplemente conexo que se obtiene retirando del plano complejo la semirrecta S_3 . Entonces la función $\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}(z - a)$ es holomorfa en Ω_3 y tiene como derivada $1/(z - a)$. Por lo tanto $\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}(z - a)$ es primitiva de $1/(z - a)$ en Ω_3 .

Teorema 3.1.10. Teorema fundamental del cálculo.

Sea f es continua en Ω .

a) Si existe alguna función F definida en Ω que cumple para toda componente conexa R de Ω

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma} f(z) dz$$

para algún punto $z_0 \in R$, para todo $z_1 \in R$ y para toda curva $\gamma \subset \Omega$ que una z_0 con z_1 , entonces F es una primitiva de f en Ω (es decir $F \in H(\Omega)$ y $F' = f$).

b) Si $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en Ω entonces existe primitiva de f en Ω .

Demostración:

Parte a): Probemos que $F'(z_1)$ existe y es igual a $f(z_1)$.

Elijamos un disco D de centro z_1 y radio positivo, contenido en Ω . Tomemos $z_2 \in D, z_2 \neq z_1$. Elijamos una curva γ cualquiera que una z_0 con z_1 . Tomemos el segmento $S : z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in [0, 1]$ que una z_1 con z_2 . La curva $\gamma + S$ une z_0 con z_2 . Entonces:

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma+S} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz = \int_S f(z) dz = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))](z_2 - z_1) dz$$

Dividiendo entre $z_2 - z_1$ se deduce:

$$\frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))] dz$$

Tomando límite cuando $z_2 \rightarrow z_1$ el integrando en la igualdad anterior tiende a $f(z_1)$ uniformemente con $t \in [0, 1]$ (porque f es continua en el segmento compacto S , por lo tanto es uniformemente continua en S). Entonces, existe el límite y es

$$\lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \lim_{z_2 \rightarrow z_1} \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))] dz = f(z_1)$$

Por definición de derivada, ese límite es $F'(z_1) = f(z_1)$ como queríamos demostrar.

Parte b): Construiremos una función F en cada componente conexa de Ω . Llamemos R a una componente conexa cualquiera de Ω . Elijamos $z_0 \in R$ y dejémoslo fijo. Tomemos $z_1 \in R$ cualquiera. Definamos la función

$$F(z_1) = \int_{\gamma} f(z) dz$$

donde γ es cualquier curva C^1 a trozos contenida en Ω que una z_0 con z_1 .

La función F está bien definida, es decir no depende de la curva γ elegida. En efecto, si tomamos dos curvas γ_1 y γ_2 contenidas en Ω que unan el punto z_0 con z_1 , la curva cerrada $\gamma_1 - \gamma_2$ cumple por hipótesis que

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z) dz = 0$$

. Luego la integral de f a lo largo de γ_1 y de γ_2 , vale lo mismo.

La función F así definida en cada componente conexa de Ω cumple la condición de la parte a). Entonces es una primitiva de f . $\square$

Teorema 3.1.11. Acotación de integrales.

Sea $\gamma \subset \Omega$ un curva cualquiera C^1 a trozos, parametrizada con $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ con longitud L . Sea f continua en Ω , y sea $M \geq \max_{z \in \gamma} |f(z)|$. Se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq ML$$

donde $|dz| = |\dot{z}(t)| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = ds$, siendo $s \in [0, L]$ la abscisa curvilínea de la curva γ orientada para t creciente.

Demostración: Probemos primero la segunda desigualdad de la tesis, es decir $\int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq ML$.

Siendo $|f(z)| \leq M \forall z \in \gamma^*$, resulta:

$$\int_{\gamma} |f(z)| |dz| = \int_{\gamma} |f(z)| ds \leq \int_{\gamma} M ds = M \int_{\gamma} ds \quad (1)$$

Por definición de longitud L de la curva γ se cumple: $\int_{\gamma} ds = L$, luego sustituyendo en (1) resulta $\int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq ML$ como queríamos probar.

Ahora probemos la primera desigualdad de la tesis, es decir $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$. Sea $I = \int_{\gamma} f(z) dz$.

Primer caso: Si $I = 0$ entonces la desigualdad que queremos probar es inmediata ya que la integral de la derecha en ella es no negativa.

Segundo caso: Si $I \neq 0$, escribamos $I = |I|e^{i\theta}$ donde θ es una constante real, argumento de I .

Tomando una parametrización $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ de la curva γ , resulta:

$$|I| = Ie^{-i\theta} = e^{-i\theta} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} e^{-i\theta} f(z) dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(z(t)) \dot{z}(t) dt$$

Llamando

$$g(t) = e^{-i\theta} f(z(t)) \dot{z}(t)$$

se tiene

$$|I| = \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(g(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(g(t)) dt$$

Pero $|I|$ es un número real. Se concluye que $\int_a^b \operatorname{Im}(g(t)) dt = 0$, y entonces:

$$|I| = \int_a^b \operatorname{Re}(g(t)) dt$$

Sabiendo que para cualquier complejo u se cumple $\operatorname{Re}(u) \leq |u|$, obtenemos:

$$|I| = \int_a^b \operatorname{Re}(g(t)) dt \leq \int_a^b |g(t)| dt = \int_a^b |e^{-i\theta}| |f(z(t))| |\dot{z}(t)| dt$$

Observando que $|e^{-i\theta}| = 1$ resulta:

$$|I| \leq \int_a^b |f(z(t))| |\dot{z}(t)| dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 3.1.12. Sea γ una curva cerrada C^1 a trozos, que no pasa por el punto a , y tal que da una vuelta sola en sentido antihorario alrededor de a y que corta en un solo punto $b = x_1 + a$ a la semirrecta $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : z - a = x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

Sea $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus S_1$. La función $1/(z - a)$ tiene primitiva en Ω_1 , que es $\text{Log}_{[0,2\pi)}(z - a)$. Se puede extraer de la curva γ un arco de longitud $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño para que el arco restante quede contenido en Ω_1 . Usando la acotación del teorema anterior, y luego haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, se deduce que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$$

siendo $2\pi i$ el salto de discontinuidad en la semirrecta S_1 de la función $\text{Log}_{[0,2\pi)}(z - a)$, que es primitiva de $1/(z - a)$ en Ω_1 .

Por lo tanto si γ es una curva cerrada que no pasa por a y que da k vueltas alrededor de a , (con la convención de que k es un entero cualquiera, $k > 0$ significa que el sentido es antihorario, y que $k < 0$ es en sentido horario) cortando $|k|$ veces a la semirrecta S_1 , se deduce:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = 2k\pi i$$

Ejemplo 3.1.13. Análogamente al ejemplo anterior, usaremos el resultado al final del ejemplo 3.1.9, para probar el siguiente resultado:

Si γ es una curva cerrada que no pasa por a y que da k vueltas alrededor de a atravesando a la semirrecta S_3 (con extremo en el punto a) un número finito p de veces, de las cuales k_1 veces son en sentido antihorario y k_2 veces en sentido horario, entonces $k = k_1 - k_2$.

Probemos que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = 2k\pi i$$

Para seguir la siguiente construcción, que es válida en general, hágase una figura con una curva γ que, por ejemplo de dos vueltas alrededor de a y que corte $p = 3$ veces a la semirrecta S_3 , tres en sentido antihorario y una en sentido horario.

Dado $\epsilon > 0$ partimos γ en $2(k_1 + k_2) = 2p$ arcos consecutivos, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{2p}$, tales que $\gamma_1, \gamma_3, \dots, \gamma_{2p-1}$ no cortan a S_3 y los restantes $\gamma_2, \gamma_4, \dots, \gamma_{2p}$ cortan a S_3 , en un único punto cada uno, y tienen longitudes menores que ϵ .

Por razones de conveniencia llamamos $\gamma_0 = \gamma_{2p}$

Denotamos z_j al extremo inicial del arco γ_j y z_{j+1} al extremo final del arco γ_j que coincide con el extremo inicial de arco γ_{j+1} .

Se aplica la regla de Barrow para calcular $\int_{\gamma_j} 1/(z - a) dz$ para $j = 1, 3, \dots, (2p - 1)$, ya que la función $\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}(z - a)$ es primitiva de $1/(z - a)$ en $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus S_3$. Para $j = 1, 3, \dots, 2p - 1$ resulta:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z - a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}(z_{j+1} - a) - \text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}(z_j - a)] = \lambda_j 2\pi i$$

donde $\lambda_j = +1$ si los arcos γ_{j+1} y γ_{j-1} atraviesan ambos a la semirrecta S_3 en sentido antihorario; $\lambda_j = -1$ si lo hacen ambos en sentido horario; y $\lambda_j = 0$ si lo hacen en sentidos opuestos. Esto es porque z_{j+1} y z_j tienden a puntos en la semirrecta S_3 por lados distintos cuando $\lambda_{j+1} = \pm 1$,

y por lo tanto el límite de la derecha es igual al salto de tamaño $\pm 2\pi i$ de discontinuidad en la semirrecta S_3 de la función $\text{Log}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}(z - a)$.

Se observa que $\sum_{j=1,3,\dots,2p-1} \lambda_j$ aumenta $+1$ por cada arco γ_{j+1} que atraviesa a la semirrecta S_3 en sentido antihorario, y disminuye (se le agrega -1) por cada arco γ_{j+1} que atraviesa a la semirrecta S_3 en sentido horario. Luego $\sum_{j=1,3,\dots,2p-1} \lambda_j = k_1 - k_2 = k$

Por otra parte, para $j = 2, 4, \dots, 2p$, usamos el teorema de acotación de integrales para obtener:

$$\left| \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z - a} \right| \leq M\epsilon \rightarrow 0$$

Sumando todo queda

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = \sum_{j=1}^{2p} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i \cdot \sum_{j=1,3,\dots,2p-1} \lambda_j = (k_1 - k_2)2\pi i = 2k\pi i \quad \square$$

3.2. Convergencia uniforme de series de funciones complejas.

Sea K un conjunto no vacío de complejos. Sea para cada natural $n \geq 0$ una función compleja f_n definida para todo $z \in K$ (no necesariamente continua).

Definición 3.2.1. Convergencia puntual de series de funciones.

Una serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge puntualmente para todo $z \in K$ si, para cada z fijo en K existe

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f_n(z) = f(z)$$

Es decir, dado $z \in \Omega$ y dado $\epsilon > 0$, existe N_0 (que puede depender de z) tal que

$$N \geq N_0 \Rightarrow \left| f(z) - \sum_{n=0}^N f_n(z) \right| < \epsilon$$

Cuando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge puntualmente para todo $z \in K$ a la función $f(z)$ se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z) \quad \forall z \in K$$

Definición 3.2.2. Convergencia absoluta de series de funciones.

Se dice que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ converge absolutamente para todo $z \in K$ si la serie de los módulos $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ converge puntualmente para cada $z \in K$ fijo.

Al igual que para series de números reales se demuestra que si la convergencia absoluta implica la convergencia puntual de la serie dada, sin los módulos, pero el recíproco es falso.

Definición 3.2.3. Convergencia uniforme de series de funciones. Una serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en K si existe una función $f(z)$ definida para $z \in K$ tal que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{z \in K} \left| f(z) - \sum_{n=0}^N f_n(z) \right| = 0$$

Es decir, dado $\epsilon > 0$, existe N_0 (que es independiente de z) tal que

$$N \geq N_0 \Rightarrow |f(z) - \sum_{n=0}^N f_n(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K$$

Cuando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en K a la función $f(z)$ se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \quad (\text{C.U. en } K)$$

Nota: Si una serie de funciones converge uniformemente en K a $f(z)$, entonces converge puntualmente a $f(z)$ para todo $z \in K$. El recíproco es falso.

Ejemplo 3.2.4. La serie geométrica de razón z definida como $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ¹ converge puntualmente a $1/(1-z)$ para todo z tal que $|z| < 1$. Es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall z \in D_1(0)$$

Sin embargo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ no converge uniformemente en $D_1(0)$.

Demostración: Para ver que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge puntualmente para todo $z \in D_1(0)$ calculemos explícitamente su reducida N -ésima:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N z^n &= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^N \\ z \cdot \sum_{n=0}^N z^n &= z + z^2 + z^3 + \dots + z^N + z^{N+1} \end{aligned}$$

Restando ambas igualdades: $(1-z) \sum_{n=0}^N z^n = 1 - z^{N+1}$. De donde, si $z \neq 1$:

$$\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \quad (1)$$

El límite de la reducida N -ésima cuando $N \rightarrow +\infty$ no existe si $|z| > 1$ pues en ese caso $z^{N+1} \rightarrow \infty$.

El límite de la reducida N -ésima cuando $N \rightarrow +\infty$ existe y es $1/(1-z)$ si $|z| < 1$ pues en ese caso $z^{N+1} \rightarrow 0$.

Por lo tanto la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge puntualmente a la función $1/(1-z)$ para todo $z \in D_1(0)$.

La convergencia no es uniforme en $D_1(0)$ pues:

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D_1(0)} \left| \frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^N z^n \right| &= \sup_{z \in D_1(0)} \left| \frac{1}{1-z} - \frac{1 - z^{N+1}}{1-z} \right| = \\ &= \sup_{z \in D_1(0)} \left| \frac{z^{N+1}}{1-z} \right| = \sup_{z \in D_1(0)} \frac{|z|^{N+1}}{|1-z|} = +\infty \end{aligned}$$

pues cuando $z \in D_1(z_0)$ se acerca a 1, el denominador tiende a cero. $\square$

¹Por convención $z^0 = 1$ para todo z , aún abusando de la notación, cuando $z = 0$.

Teorema 3.2.5. Criterio de la mayorante de Weierstrass. Si $|f_n(z)| \leq A_n$, independiente de z , para todo $z \in K$ y si $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \text{ converge uniformemente y absolutamente en } K$$

Demostración:

Consideremos, para cada z fijo en K la sucesión de reducidas N -ésimas $F_N(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z)$. Probemos que para cada z fijo en K esta sucesión es de Cauchy.

Acotemos la diferencia $F_M(z) - F_N(z)$ para todo $M > N \geq 0$, usando la mayorante A_n

$$|F_M(z) - F_N(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^M f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^M |f_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^M A_n = \sum_{n=0}^M A_n - \sum_{n=0}^N A_n$$

Como A_n es real no negativo y $M > N$, el último término de la desigualdad de arriba es no negativo, y deducimos:

$$|F_M(z) - F_N(z)| \leq \left| \sum_{n=0}^M A_n - \sum_{n=0}^N A_n \right| \quad \forall z \in K, \quad \forall M > N \geq 0 \quad (1)$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ es convergente de términos reales; entonces la sucesión de sus reducidas es una sucesión de Cauchy. Se deduce que para todo $\epsilon^* > 0$ existe N_0 (independiente de $z \in K$, pues los términos A_n son independientes de z) tal que

$$M > N \geq N_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^M A_n - \sum_{n=0}^N A_n \right| < \epsilon^*$$

Sustituyendo en (1), se deduce:

$$M > N \geq N_0 \Rightarrow |F_M(z) - F_N(z)| < \epsilon^* \quad \forall z \in K, \quad (2)$$

Entonces la sucesión $F_N(z)$ es una sucesión de Cauchy. De (2) se deduce que las partes reales e imaginarias de $F_N(z)$ son también sucesiones de Cauchy en la recta real, porque para todo complejo u (y en particular para $u = F_N(z) - F_M(z)$ de (2)) se cumple $|Re(u)| \leq |u|$, $|Im(u)| \leq |u|$.

Como la recta real es completa, toda sucesión de reales que sea una sucesión de Cauchy es convergente a algún valor real. Entonces existen

$$u(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} Re(F_N(z)), \quad v(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} Im(F_N(z))$$

Denotando $f(z) = u(z) + iv(z)$, se cumple

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} F_N(z) = f(z) \quad \forall z \in K \quad (3)$$

La igualdad (3) significa que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge puntualmente para todo $z \in K$ a la función $f(z)$.

Hemos probado que:

$$|f_n(z)| \leq A_n, \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \text{ converge puntualmente para todo } z \in K \quad (4)$$

Ahora veamos que la convergencia es también uniforme.

En la desigualdad (2) elijamos un $N > N_0$ y dejémoslo fijo. Para cada $z \in K$ fijo, llamemos $\alpha = F_N(z)$. Entonces (2) se transforma en:

$$M > N \Rightarrow |F_M(z) - \alpha| < \epsilon^*$$

Haciendo $M \rightarrow +\infty$, con N fijo, se deduce: $|f(z) - \alpha| \leq \epsilon^*$, o lo que es lo mismo: $|f(z) - F_N(z)| \leq \epsilon$. Como esta desigualdad es válida para cualquier $N \geq N_0$ y para cualquier $z \in K$ deducimos que:

$\forall \epsilon^* > 0$ existe N_0 (independiente de z) tal que

$$N > N_0 \Rightarrow |f(z) - F_N(z)| \leq \epsilon^* < \epsilon \quad \forall z \in K$$

(Dado $\epsilon > 0$, elegimos $\epsilon^* = \epsilon/2$).

La afirmación anterior es por definición la convergencia uniforme a la función $f(z)$ de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ en el conjunto K .

Hemos terminado la prueba de la convergencia uniforme en K .

Sólo resta demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente para todo $z \in K$. Consideremos la serie de los módulos $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$. La afirmación (4) es aplicable a la función $|f_n(z)|$ en lugar de $f_n(z)$, luego la serie de los módulos converge puntualmente, como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 3.2.6. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en cualquier conjunto compacto K contenido en $D_1(0)$.

Prueba: Sea $r = \max_{z \in K} |z|$. Si $K \subset D_1(0)$ es compacto entonces $r < 1$. (Se observa que si K no fuera compacto ese máximo r no tendría por qué existir; habría supremo pero, si no se alcanza, el supremo podría ser 1).

Se tiene $|z^n| = |z|^n \leq r^n = A_n$, independiente de n , para todo $z \in K$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ es geométrica de razón real no negativa $r < 1$. Entonces es convergente. Por el criterio de la mayorante de Weierstrass, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en K . $\square$

Teorema 3.2.7. Convergencia uniforme y continuidad. Si para todo $n \geq 0$ la función f_n es continua en K , y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ (C.U. en K), entonces f es continua en K .

Demostración: Llamemos $F_N(z)$ a la reducida N -ésima de la serie, es decir

$$F_N(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z)$$

Como la reducida es la suma de una cantidad finita de funciones f_n que son continuas, $F_N(z)$ es continua.

Por definición de convergencia uniforme, para todo $\epsilon > 0$ existe N_0 (independiente de $z \in K$) tal que

$$N > N_0 \Rightarrow |f(z) - F_N(z)| < \epsilon/3 \quad \forall z \in K \quad (1)$$

Elijamos un $N > N_0$ y dejémoslo fijo. Por la continuidad de F_N respecto de z , fijado $z_0 \in K$, dado $\epsilon > 0$ (el mismo ϵ que antes) existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in K, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |F_N(z) - F_N(z_0)| < \epsilon/3 \quad (2)$$

Escribamos el incremento de $f(z)$ haciendo aparecer el incremento de F_N , apliquemos la propiedad triangular del módulo de complejos, y luego usemos las desigualdades (1) y (2):

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - F_N(z) + F_N(z) - F_N(z_0) + F_N(z_0) - f(z_0)| \leq \\ &\leq |f(z) - F_N(z)| + |F_N(z) - F_N(z_0)| + |F_N(z_0) - f(z_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \\ &\forall z \in K \text{ tal que } |z - z_0| < \delta \end{aligned}$$

Por definición de continuidad hemos probado que f es continua en z_0 . Como z_0 puede ser cualquier punto de K entonces f es continua en K . $\square$

Teorema 3.2.8. Convergencia uniforme e integración. *Si para todo $n \geq 0$ la función f_n es continua en K , y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en K , entonces*

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma} f_n(z) dz \right)$$

para cualquier curva C^1 a trozos contenida en K .

Demostración: Llamemos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ para cada $z \in K$. Por el teorema de convergencia uniforme y continuidad la función f es continua en K . Por lo tanto está definida la integral

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz$$

El objetivo consiste en probar que

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left(\int_{\gamma} f_n(z) dz \right) ? \quad (1)$$

(El signo de interrogación se agregó para recordar que aún no está probada la igualdad).

Llamemos $F_N(z)$ a la reducida N -ésima de la serie, es decir:

$$F_N(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z)$$

Como la reducida es la suma de una cantidad finita de funciones f_n y la integral de la suma (de una cantidad finita de sumandos) es la suma de las integrales, se deduce:

$$\sum_{n=0}^N \left(\int_{\gamma} f_n(z) dz \right) = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^N f_n(z) \right) dz = \int_{\gamma} F_N(z) dz \quad (2)$$

Como la convergencia es uniforme en K , para todo $\epsilon^* > 0$ existe N_0 , independiente de z tal que

$$N \geq N_0 \Rightarrow \sup_{z \in K} |f(z) - F_N(z)| < \epsilon^*$$

Luego:

$$\left| I - \int_{\gamma} F_N(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f(z) dz - F_N(z)) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z) dz - F_N(z)| |dz| \leq \epsilon^* \cdot L < \epsilon$$

donde L es la longitud de la curva γ , y $\epsilon^* > 0$ se elige menor que ϵ/L , dado $\epsilon > 0$.

Deducimos entonces que

$$I = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} F_N(z) dz$$

y entonces, usando (2), se prueba (1) como queríamos. $\square$

Ejemplo 3.2.9. Para cualquier curva $\gamma \subset D_0(1)$ que una el origen con el punto z_1 se tiene, debido a la compacidad de γ :

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1-z} dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma} z^n dz \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^{n+1}}{n+1}$$

Por otra parte $-\text{Log}_{[0,2\pi]}(z-1)$ es primitiva de $1/(1-z)$ para todo z complejo tal que $(z-1)$ no sea real ≥ 0 . Entonces es primitiva en $D_1(0)$. Aplicando la regla de Barrow a la integral del primer miembro de la igualdad anterior, se concluye que el desarrollo en serie de potencias de z de $\text{Log}_{[0,2\pi]}(z-1)$ es:

$$\text{Log}_{[0,2\pi]}(z_1-1) = i\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_1^n}{n} \quad \forall z_1 \in D_1(0)$$

Análogamente, sustituyendo z por $-z$ se tiene:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1+z} dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma} (-z)^n dz \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z_1^{n+1}}{n+1}$$

Por otro lado $\text{Log}_{(-\pi,\pi]}(z+1)$ es primitiva de $1/(1+z)$ para todo z complejo tal que $(1+z)$ no sea real ≤ 0 . Entonces es primitiva en $D_1(0)$. Aplicando la regla de Barrow a la integral al primer miembro de la igualdad anterior, se concluye que el desarrollo en serie de potencias de z de $\text{Log}_{(pi,\pi]}(z+1)$ es:

$$\text{Log}_{(-\pi,\pi]}(z_1+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z_1^n}{n} \quad \forall z_1 \in D_1(0)$$