SEGUNDA PARTE. FUNCIONES ANALÍTICAS Y TEORÍA DE CAUCHY.

Resumen

Se prueba que toda función holomorfa es analítica, y recíprocamente. Se desarrolla la teoría de Cauchy-Goursat local en un rectángulo. Se demuestran el teorema de Cauchy global, y la fórmula integral de Cauchy global para la función y para su derivada n -ésima. Se demuestra el principio del módulo máximo y otros teoremas que son consecuencias de la Teoría de Cauchy. Se incluyen aplicaciones al cálculo de integrales impropias en variable real.

4. Síntesis de la primera parte.

Se suponen conocidos las siguientes notaciones y conceptos, expuestos en la sección 1.1:

El plano complejo $\mathbb{C}$. Conceptos de conjunto abierto, cerrado, acotado y compacto en $\mathbb{C}$.

Ω indica un conjunto abierto. $D_R(z_0)$ es el disco abierto de centro z_0 y radio R , $\overline{D}_R(z_0)$ es el disco cerrado.

Conceptos de conjunto abierto conexo (región), y de componentes conexas.

Las curvas en γ son siempre C^1 a trozos.

Conceptos de curvas homotópicas en Ω , y de curvas cerradas homotópicas en Ω a un punto.

Concepto de abierto Ω simplemente conexo.

Concepto de suma de curvas, y de curva opuesta.

Conceptos de límite y continuidad de funciones complejas de variable compleja. Concepto de funciones complejas de clase C^r y de clase C^∞ .

La función exponencial compleja. El argumento de un complejo como conjunto.

Teorema de Green para la integración de campos de clase C^1 en el plano, y sus corolarios.

4.1. Derivación y funciones holomorfas.

Los detalles así como las demostraciones de los teoremas y proposiciones de esta subsección pueden encontrarse en la sección 2.

Sea Ω abierto contenido en $\mathbb{C}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.

Definición 4.1.1. Función derivable en un punto y función holomorfa.

$f(z)$ es derivable en z_0 si existe el límite siguiente, llamado derivada de f en z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

f es holomorfa en Ω si es derivable en z_0 para todo $z_0 \in \Omega$.

Notación: Se denota $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω .

Teorema 4.1.2. Toda función holomorfa es continua.

4.1.3. Ejemplos de funciones holomorfas y algunas propiedades.

- a) Si $f(z) = k$ constante en Ω , entonces $f'(z) = 0, \forall z \in \Omega$.
- b) Para todo n natural $n \geq 1$, vale $(z^n)' = nz^{n-1}, \forall z \in \mathbb{C}$.
- c) Para todo n natural $n \geq 1$, vale $(z^{-n})' = -nz^{-n-1}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.
- d) La suma, el producto y la composición de funciones holomorfas son holomorfas. Valen las mismas reglas de derivación para la suma, el producto y la composición, que para funciones de variable real (en particular la regla de la cadena para derivar la composición de funciones).
- e) Los polinomios son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$.
- f) El cociente de funciones holomorfas en Ω es una función holomorfa en Ω si no se anula el denominador en Ω .
- g) e^z es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ y $(e^z)' = e^z$ para todo complejo z .

Teorema 4.1.4. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

f es holomorfa en Ω si y solo si u y v son diferenciables en todo punto de Ω y cumplen las ecuaciones de Cauchy- Riemann siguientes:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad \forall z \in \Omega$$

Teorema 4.1.5. Expresión de la derivada. Si f es holomorfa en Ω entonces

$$f' = u_x - iv_y = v_y + iv_x, \quad f' = f_x = -if_y$$

donde $f_x = u_x + iv_x$ y $f_y = u_y + iv_y$.

Corolario 4.1.6. Si $f \in H(\Omega)$ tiene módulo constante en el abierto conexo Ω entonces es constante en Ω .

4.2. Integración compleja.

Las demostraciones de los teoremas y proposiciones de esta subsección se encuentran en la sección 3.1.

Definición 4.2.1. Dada una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continua, y una curva C^1 a trozos $\gamma : z = z(t), t \in [a, b]$, se define la integral de f a lo largo de γ como:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}[f(z(t))\dot{z}(t)] dt + i \int_a^b \operatorname{Im}[f(z(t))\dot{z}(t)] dt$$

Ejemplo 4.2.2. Si C_r es la circunferencia de centro en el punto a y radio $r > 0$, recorrida una sola vez en sentido antihorario, entonces:

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$$

Proposición 4.2.3. Propiedades de la integral compleja.

1. $\int_{\gamma} f(z) dz$ es independiente de la parametrización C^1 a trozos que se elija, con tal que se preserve la misma orientación de la curva.
2. $\int_{-\gamma} f(z) dz = -\int_{\gamma} f(z) dz$
3. $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$.
4. $\int_{\gamma} kf(z) dz = k \int_{\gamma} f(z) dz$ si k es una constante compleja independiente de z para $z \in \gamma$.
5. $\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$

Definición 4.2.4. Dada una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se llama primitiva de f en Ω , si existe alguna, a cualquier función holomorfa $F \in H(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$.

Teorema 4.2.5. Regla de Barrow.

Si f es continua y si existe F primitiva de f en Ω , entonces:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

para toda curva $\gamma \subset \Omega$ con extremo inicial z_1 y extremo final z_2 .

En particular $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$.

Ejemplo 4.2.6. 1. Sea m un número entero, $m \neq -1$. La función $(z-a)^{m+1}/(m+1)$ es primitiva de $(z-a)^m$ en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Luego, para toda curva cerrada γ que no pase por a :

$$\int_{\gamma} (z-a)^m dz = 0 \quad \text{si } m \neq -1$$

En particular si $m \geq 0$ entonces vale para toda curva cerrada aunque pase por a .

Ejemplo 4.2.7. La función $1/(z-a)$ es continua en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Sin embargo su integral a lo largo de la circunferencia $C_r \subset \Omega$ es $2\pi i \neq 0$. Luego, usando el contrarrecíproco de la Regla de Barrow, se deduce que no existe primitiva de $1/(z-a)$ en Ω .

Corolario 4.2.8. Corolario de la Regla de Barrow. Si $f \in H(\Omega)$ cumple $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$ entonces f es constante en cada componente conexa de Ω .

Teorema 4.2.9. Teorema fundamental del cálculo.

Sea f es continua en Ω .

a) Si existe alguna función F definida en Ω que cumple para toda componente conexa R de Ω

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma} f(z) dz$$

para algún punto $z_0 \in R$, para todo $z_1 \in R$ y para toda curva $\gamma \subset \Omega$ que una z_0 con z_1 , entonces F es una primitiva de f en Ω (es decir $F \in H(\Omega)$ y $F' = f$).

b) Si $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en Ω entonces existe primitiva de f en Ω .

Teorema 4.2.10. Acotación de integrales.

Sea $\gamma \subset \Omega$ un curva cualquiera C^1 a trozos, con longitud L , y parametrizada con $z = z(t)$, $t \in [a, b]$. Sea f continua en Ω , y sea $M \geq \max_{z \in \gamma} |f(z)|$. Se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq ML$$

donde $|dz| = |\dot{z}(t)| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = ds$, siendo $s \in [0, L]$ la abscisa curvilínea de la curva γ orientada para t creciente.

4.3. Convergencia uniforme de series de funciones complejas.

Los detalles así como las demostraciones de los teoremas y proposiciones de esta subsección se encuentran en la sección 3.2.

Sea K un conjunto no vacío de complejos. Sea para cada natural $n \geq 0$ una función compleja f_n definida para todo $z \in K$ (no necesariamente continua).

Se denota con

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z) \quad \forall z \in K$$

a la serie que converge a la función $f(z)$ puntualmente en K , es decir, para cada z fijo en K . (Ver definición de convergencia puntual en 3.2.1.)

Se denota con

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \quad (C.U. \text{ en } K)$$

a la serie que converge uniformemente en el conjunto K a la función $f(z)$. (Ver definición de convergencia uniforme en 3.2.3.)

Se denota con

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \quad (C.A. \quad \forall z \in K)$$

a la serie que converge absolutamente en el conjunto K a la función $f(z)$. Es decir, la serie de los módulos $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ converge puntualmente para cada $z \in K$ fijo. Luego, la serie dada, sin los módulos, converge también puntualmente a cierta función $f(z)$.

Nota: Si una serie de funciones converge uniformemente en K a f , entonces converge puntualmente a $f(z)$ para todo $z \in K$ fijo. El recíproco es falso.

Ejemplo 4.3.1. La serie geométrica de razón z definida como $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ² converge puntualmente a $1/(1-z)$ para todo z tal que $|z| < 1$. Es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall z \in D_1(0)$$

Sin embargo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ no converge uniformemente en $D_1(0)$.

Teorema 4.3.2. Criterio de la mayorante de Weierstrass. Si $|f_n(z)| \leq A_n$, independiente de z , para todo $z \in K$ y si $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \text{ converge uniformemente y absolutamente en } K$$

Ejemplo 4.3.3. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ converge uniformemente en cualquier conjunto compacto K contenido en $D_1(0)$.

Teorema 4.3.4. Convergencia uniforme y continuidad. Si para todo $n \geq 0$ la función f_n es continua en K , y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ (C.U. en K), entonces f es continua en K .

²Por convención $z^0 = 1$ para todo z , aún abusando de la notación, cuando $z = 0$.

Teorema 4.3.5. Convergencia uniforme e integración. *Si para todo $n \geq 0$ la función f_n es continua en K , y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en K , entonces*

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma} f_n(z) dz \right)$$

para cualquier curva C^1 a trozos contenida en K .