5. Funciones analíticas y teoría del índice.

5.1. Definición y derivabilidad infinita de las funciones analíticas.

Sea Ω un abierto no vacío del plano complejo.

Definición 5.1.1. $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice *analítica en el punto* $z_0 \in \Omega$ si existe un disco $D_R(z_0)$, con $R > 0$ tal que:

$$\text{Para todo } z \in D_R(z_0) \cap \Omega : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

³ donde la serie de la derecha es convergente puntualmente para todo z fijo en $D_R(z_0)$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0)$ se llama *desarrollo en serie de potencias* centrado en z_0 de la función $f(z)$.

Definición 5.1.2. $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se dice *analítica en Ω* si es analítica en z_0 para todo $z_0 \in \Omega$.

Nota 5.1.3. En 6.3.5 probaremos que si f es analítica en $z_0 \in \Omega$ entonces también es analítica en todo los puntos del disco $D_R(z_0)$ de la definición 5.1.1.

Nota 5.1.4. De las definiciones anteriores, y de las propiedades de que la suma de series convergentes es la serie convergente de la sumas, y el producto de una serie convergente por una constante k es la serie convergente del producto de cada término por k , se deduce lo siguiente:

Si f y g son analíticas en Ω entonces $f + g$ y kf también lo son.

Nota 5.1.5. En 8.2.5 probaremos lo siguiente:

Si f es analítica en z_0 y si $D_R(z_0)$ es un disco como en la definición 5.1.1, entonces:

a) Si $D_R(z_0)$ no está contenido en Ω , entonces se puede extender f analíticamente a $\Omega_1 = \Omega \cup D_R(z_0)$ como la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0)$.

b) Si $D_R(z_0)$ está contenido en Ω el radio R puede elegirse por lo menos igual a la distancia de z_0 al complemento de Ω .

Teorema 5.1.6. Derivabilidad infinita de las funciones analíticas.

Convergencia uniforme y absoluta en compactos de las series de potencias.

Relación entre coeficientes del desarrollo y derivadas de la función.

Sea f analítica en z_0 .

Denotamos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z) \quad \forall z \in D_R(z_0)$ donde $R > 0$ ⁴

Se cumple:

a) $f \in H(D_R(z_0))$, f' es analítica en z_0 , y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1} \quad \forall z \in D_R(z_0)$.

b) Existen en $D_R(z_0)$ derivadas $f^{(k)}(z)$ (respecto de z) de orden k , para todo natural $k \geq 1$.

Es decir, para todo $k \geq 0$, la derivada k -ésima $f^{(k)}$ es holomorfa en $D_R(z_0)$.

c) f es C^∞ en $D_R(z_0)$.

³Por convención $z^0 = 1$ para todo z , aún abusando de la notación, cuando $z = 0$.

⁴La notación $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z) \quad \forall z \in D_R(z_0)$ resume dos afirmaciones. La primera es que la serie de potencias converge para todo $z \in D_R(z_0)$, aunque z no esté contenido en el conjunto Ω donde la función dada f estaba definida.

La segunda es que a la suma de la serie de potencias se la llama $f(z)$ para todo $z \in D_R(z_0)$, aunque z no esté contenido en Ω , y coincide con el valor de la función dada si $z \in D_R(z_0) \cap \Omega$.

d) Se verifica la siguiente relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de f centrado en $z_0 \in \Omega$ y la derivada n -ésima de f en z_0 :

$$a_0 = f(z_0), \quad a_1 = f'(z_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \forall n \geq 0$$

e) Para todo conjunto compacto K tal que $K \subset D_R(z_0)$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z)$ converge uniformemente y absolutamente en K .

Demostración:

Prueba de e): Sea $\alpha = \max_{z \in K} |z - z_0|$. Siendo K compacto este máximo existe, se alcanza en algún(os) punto(s) que llamo $z_1 \in K \subset D_R(z_0)$. Entonces $0 \leq \alpha = |z_1 - z_0| < R$. Elijamos un número real r tal que $0 \leq \alpha < r < R$. Se tiene

$$0 \leq \frac{\alpha}{r} < 1, \quad 0 < r < R \quad (1)$$

Por hipótesis la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge para todo $z \in D_R(z_0)$, en particular converge para $z = r + 0i$, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge. Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n r^n = 0$, de donde, para alguna constante k se cumple

$$0 \leq |a_n| r^n \leq k \quad \forall n \geq 0, \quad (2)$$

Acotemos ahora el término general de la serie de potencias centrada en z_0 para todo $z \in K$:

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| r^n \left(\frac{|(z - z_0)|}{r} \right)^n \leq k \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n = A_n \quad \text{independiente de } n \quad \forall z \in K$$

Además la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{es convergente}$$

porque es una serie geométrica de razón α/r y por (1) esta razón es no negativa y menor que 1.

Aplicando ahora el criterio de la mayorante de Weierstrass, se deduce que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente y absolutamente en K , y queda demostrada la parte e).

Nota: Observamos además que aplicando el teorema de convergencia uniforme y continuidad, f es continua en K para todo compacto $K \subset D_R(z_0)$, en particular para $K = \{z\}$ siendo $z \in D_R(z_0)$. Se deduce que f es continua en $D_R(z_0)$.

Prueba de a): Consideremos la serie formal (no sabemos aún si es convergente) que tiene como término general la derivada de $a_n(z - z_0)^n$. Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Afirmación i). Para todo conjunto compacto $K \subset D_R(z_0)$ la serie formal de las derivadas converge uniformemente en K .

Prueba de la afirmación i): Usamos la misma notación que en la demostración de la parte e), hasta la igualdad (2) incluida. Acotemos el término general de la serie formal de las derivadas:

$$|na_n(z - z_0)^{n-1}| = n \frac{|a_n| r^n}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^{n-1} \leq \frac{kn}{r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^{n-1} = B_n \text{ independiente de } n \quad \forall z \in K$$

Además la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \text{ es convergente}$$

porque $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n+1}/B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)/n) \cdot (\alpha/r) = \alpha/r < 1$ y por (1) este cociente es no negativo y menor que 1.

Aplicando ahora el criterio de la mayorante de Weierstrass, se deduce que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$ converge uniformemente en K y queda demostrada la afirmación i).

De la afirmación i), se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$ converge puntualmente para todo $z \in D_R(z_0)$, porque para cada z fijo en $D_R(z_0)$ el conjunto $\{z\}$ es compacto contenido en $D_R(z_0)$. Llamemos $g(z)$ a la suma de la serie de las derivadas. Es decir:

$$\forall z \in D_R(z_0), \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n$$

Por definición de analiticidad en un punto, la afirmación anterior dice que

$$g \text{ es analítica en } z_0, \quad g(z_0) = a_1 \quad (3)$$

Afirmación ii) f es derivable y $f'(z) = g(z)$ para todo $z \in D_R(z_0)$.

Prueba de la afirmación ii):

Consideremos un punto cualquiera $z_1 \in D_R(z_0)$ y una curva cualquiera contenida en $D_R(z_0)$ y que una z_0 con z_1 . Por el teorema de convergencia uniforme e integración se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} na_n(z - z_0)^{n-1} dz = \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1} dz$$

Observamos que la integral a la izquierda se puede calcular explícitamente aplicando la regla de Barrow porque $(z - z_0)^{n-1}$ tiene primitiva en $\mathbb{C}$ que es $(z - z_0)^n/n$. Por otro lado la serie a la derecha es convergente a $g(z)$. Se deduce:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n = \int_{\gamma} g(z) dz$$

Por hipótesis la suma de la izquierda es $f(z_1) - a_0 = f(z_1) - f(z_0)$. Concluimos que

$$f(z_1) - f(z_0) = \int_{\gamma} g(z) dz$$

para todo punto $z_1 \in D_R(z_0)$ y para toda curva $\gamma \subset D_R(z_0)$ que una z_0 con z_1 . Por el teorema fundamental del cálculo (parte a) del teorema 4.2.9 usando $D_R(z_0)$ en el lugar de Ω), se deduce

que f es una primitiva de g en $D_R(z_0)$. Es decir, existe $f'(z)$ y $f'(z) = g(z)$ para todo $z \in D_R(z_0)$. Queda probada la afirmación ii).

De la afirmación ii) y de (3) deducimos que f es derivable en $D_R(z_0)$, y que su derivada $f' = g$ es analítica en z_0 . Queda probada la parte a).

Observamos que además hemos demostrado lo siguiente:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1} \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad (4)$$

Parte b) Por inducción completa: si $f^{(k-1)}$ es holomorfa en $D_R(z_0)$ y $f^{(k)}$ es analítica en z_0 entonces, por lo demostrado en la parte a), aplicado a $f^{(k)}$ en vez de a f se deduce que $f^{(k)}$ es holomorfa en $D_R(z_0)$ y $f^{(k+1)}$ es analítica en z_0 . Por lo tanto para todo $n \geq 0$ la derivada n -ésima de f es analítica en z_0 y holomorfa en $D_R(z_0)$. Queda probada la parte b).

Parte c) La derivada primera f' tiene partes real e imaginaria que son las derivadas parciales de u y v respecto de x e y (Las cuatro derivadas parciales aparecen ya sean como parte real o imaginaria de f' .) Por la parte b) f' es holomorfa, luego es continua, de donde sus partes real e imaginaria son continuas; luego las derivadas parciales de u y v son continuas, y por definición f es C^1 . El mismo razonamiento puede aplicarse partiendo de la derivada $k-1$ -ésima de f en vez de f , para deducir que las derivadas parciales k -ésimas de u y v son continuas para cualquier $k \geq 1$. Entonces por definición f es C^∞ .

Parte d) De (4) se deduce que $f(z_0) = a_0$ y $f'(z_0) = a_1$. Además se deduce, aplicando (4) a f' en vez de a f , que

$$\forall z \in D_R(z_0), \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}$$

Luego $f''(z_0) = 2a_2$. Por inducción completa se obtiene para todo $k \geq 1$:

$$\forall z \in D_R(z_0), \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z-z_0)^{n-k} \quad (5)$$

En efecto, basta suponer que la igualdad anterior es cierta para algún valor de k y demostrarla para el siguiente $k+1$ usando la afirmación (4) aplicada a $f^{(k)}$ en vez de a f .

Sustituyendo en (5) $z = z_0$ se obtiene $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$, y queda probada la parte d). $\square$

Nota 5.1.7. Radio de convergencia y fórmula de la raíz n -ésima.

Usando el criterio de la raíz para la convergencia de series de términos positivos, aplicado la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z-z_0|^n$, se deduce que esta converge para $|z-z_0| = r$ si $r < 1/(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})$ y no converge si $r > 1/(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})$.

Se deduce que el máximo R tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente para todo $z \in D_R(z_0)$ es $R = 1/(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})$.

Por la parte e) del teorema 5.1.6 la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge para cierto $z \in D_R(z_0)$ si y solo si converge absolutamente para ese $z \in D_R(z_0)$. Luego, obtenemos el siguiente resultado:

El máximo R tal que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{converge } \forall z \in D_R(z_0)$$

es

$$R = 1/(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})$$

Este R se llama *radio de convergencia* de la serie de potencias, y al disco abierto $D_R(z_0)$ se lo denomina *disco de convergencia* de la serie de potencias.

(Por convención, si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ se dice que $R = +\infty$ y $D_R(z_0) = \mathbb{C}$).

5.2. Principio de prolongación analítica.

Teorema 5.2.1. *Sea f analítica en Ω , donde Ω es abierto conexo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- a) $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$.
- b) Para algún $z_0 \in \Omega$, se cumple $f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k \geq 0$.
- c) Existe una sucesión de puntos $z_n \in \Omega$ que converge $z_n \rightarrow z_0 \in \Omega$, tal que para todo $n \geq 1$, $z_n \neq z_0$ y $f(z_n) = 0$.

Nota: La afirmación c) se expresa también diciendo que: *Existe un punto de acumulación $z_0 \in \Omega$ del conjunto donde se anula f .*

Demostración: Probaremos que a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a).

Prueba de a) $\Rightarrow$ b) Basta tomar cualquier punto z_0 ya que si la función es idénticamente nula, todas sus derivadas son idénticamente nulas.

Prueba de b) $\Rightarrow$ c) Sea el desarrollo en serie de potencias de f centrado en z_0 en el disco $D_R(z_0)$ con $R > 0$ donde la serie es convergente:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad (1)$$

Por el teorema 5.1.6 $a_j = f^{(j)}(z_0)/j!$. Luego, por hipótesis (afirmación b) $a_j = 0 \quad \forall j \geq 0$ y obtenemos de (1) que

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in D_R(z_0)$$

Tomando cualquier sucesión $z_n \rightarrow z_0$ con $z_n \neq z_0$ en $D_R(z_0)$, por ejemplo $z_n = z_0 + R/(2n) \quad \forall n \geq 1$, se verifica $f(z_n) = 0 \quad \forall n \geq 1$, ya que $z_n \in D_R(z_0)$. Entonces se verifica la afirmación c) como queríamos probar.

Prueba de c) $\Rightarrow$ a) Sea Z el conjunto de los puntos donde se anula f .

Sea E el conjunto de los puntos de acumulación de Z en Ω , es decir E es el conjunto de todos los puntos $z_0 \in \Omega$ tales que existe una sucesión que cumple $z_n \rightarrow z_0$, $z_n \neq z_0$, $f(z_n) = 0$.

Si $z_0 \in E$ entonces $f(z_0) = \lim f(z_n) = 0$, porque f es continua, y porque $f(z_n) = 0 \quad \forall n \geq 1$. Se deduce que $E \subset Z$.

Sea $H = \Omega \setminus E$. Como $E \subset Z$, se deduce que H contiene todos los puntos de Ω donde f no se anula.

Basta probar que E y H son abiertos, pues como Ω es conexo, uno de los dos, o bien E o bien H será vacío. Como por hipótesis (afirmación c) E no es vacío, se deduce que H lo es. Luego, es vacío el conjunto de puntos donde f no se anula, y se concluye que $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$, y es cierta la afirmación a) como se quería probar.

Prueba de que H es abierto: Los puntos de H se clasifican en dos tipos: aquellos puntos z_0 tales que $f(z_0) \neq 0$, y aquellos puntos z_0 tales que $f(z_0) = 0$ pero z_0 no es punto de acumulación de Z .

Para probar que H es abierto hay que probar que dado cualquier $z_0 \in H$ existe un entorno de z_0 contenido en H .

Primer caso) $z_0 \in H$, $f(z_0) \neq 0$. Como f es continua, existe un entorno de z_0 donde f no se anula. Entonces ese entorno está contenido en H , como queríamos probar.

Segundo caso) $z_0 \in H$, $f(z_0) = 0$ pero z_0 no es punto de acumulación de Z .

Afirmación 1. En las hipótesis del segundo caso, existe $D_R(z_0)$ tal que $z \in D_R(z_0)$, $z \neq z_0 \Rightarrow f(z) \neq 0$.

Para probar que H es abierto, basta probar la afirmación anterior, pues ella implica que existe $D_R(z_0) \subset H$.

Prueba de la afirmación 1.: Por absurdo, supongamos que para todo $D_R(z_0)$ existe $z \in D_R(z_0)$, $z \neq z_0$, $f(z) = 0$ entonces en particular para $R = 1/n$ existe $z_n \in D_{1/n}(z_0)$, $z_n \neq z_0$, $f(z_n) = 0$. Como $|z_n - z_0| < 1/n$ se cumple $z_n \rightarrow z_0$. Luego z_0 es punto de acumulación de Z , contradiciendo la hipótesis de la afirmación 1.

Hemos terminado de probar que H es abierto.

Prueba de que E es abierto: Sea el desarrollo en serie de potencias de f centrado en z_0 :

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad (1)$$

Afirmación 2. Si $z_0 \in E$ entonces los coeficientes del desarrollo (1) cumplen: $a_j = 0 \quad \forall j \geq 0$.

Prueba: Supongamos por absurdo que no todos los a_j son nulos. Sea a_k el primer coeficiente no nulo. Tenemos

$$a_k \neq 0$$

Por (1), dividiendo entre $(z - z_0)^k$ para $z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, se obtiene:

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = g(z) \quad \forall z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\} \quad \text{donde} \quad (2)$$

$$g(z) = \sum_{j=k}^{\infty} a_j (z - z_0)^{j-k} \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad (3)$$

Aplicando la definición de función analítica en un punto, de (3) se deduce que g es analítica en z_0 , luego es holomorfa en $D_R(z_0)$, y por lo tanto continua, en particular en $z = z_0$. Luego tomando límite en (2) cuando $z \rightarrow z_0$ se deduce que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = g(z_0) = a_k \quad (4)$$

Pero por hipótesis $z_0 \in E$. Tomemos la sucesión $z_n \rightarrow z_0$, $z_n \neq z_0$, tal que $f(z_n) = 0 \forall n \geq 1$. Se cumple

$$z_n \rightarrow z_0, \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n)}{(z_n - z_0)^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \quad (5)$$

De (4) y (5) se concluye que $a_k = 0$ contradiciendo nuestra elección del coeficiente a_k .

Hemos terminado de probar la afirmación 2.

De la afirmación 2 deducimos que si $z_0 \in E$ entonces $f(z) = 0 \quad \forall z \in D_R(z_0)$ (6).

Afirmación 3. Si $z_0 \in E$ y $D_R(z_0)$ cumple (6), entonces $D_R(z_0) \subset E$.

Prueba: Fijemos $w_0 \in D_R(z_0)$. Basta probar que $w_0 \in E$. Sea $m = R - |w_0 - z_0| > 0$. La sucesión $w_n = w_0 + m/(2n) \quad \forall n \geq 1$ cumple que $w_n \rightarrow w_0$, $w_n \neq w_0$, y $|w_n - w_0| = m/(2n) < m \leq R$, luego $w_n \in D_R(w_0)$, de donde $f(w_n) = 0$. Entonces $w_0 \in E$. Hemos probado la afirmación 3.

De la afirmación 3 se deduce que E es abierto. $\square$

Corolario 5.2.2. Si una función f analítica no es idénticamente nula en una región Ω entonces sus ceros (i.e. puntos donde se anula f) son aislados.

Dicho de otra manera, cada punto z_0 tal que $f(z_0) = 0$ está contenido en algún entorno $D_R(z_0)$ que no contiene otros ceros de f más que z_0 .

Demostración: Por absurdo, si hubiera algún cero z_0 no aislado, entonces para todo entorno $D_r(z_0)$ habría algún punto diferente de z_0 donde se anula f . En particular tomando $r = 1/n$, existe z_n tal que $|z_n - z_0| < 1/n$, $z_n \neq z_0$, $f(z_n) = 0$. Luego z_0 es punto de acumulación del conjunto donde se anula f . Por el teorema 5.2.1 esto implica que f es idénticamente nula, contradiciendo la hipótesis de este corolario. $\square$

Corolario 5.2.3. Si dos funciones analíticas en la región Ω coinciden en un conjunto con un punto de acumulación en Ω entonces ambas coinciden en todo punto de Ω .

Demostración: Basta aplicar el teorema 5.2.1 a la función $f - g$. $\square$

5.3. Construcción de funciones analíticas mediante integración.

Teorema 5.3.1. Funciones analíticas construidas mediante integrales.

Hipótesis) Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función continua. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva. Se define para cada $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ fijo, el valor complejo $g(z_0)$ dado por la integral siguiente:

$$g(z_0) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Tesis) $g(z_0)$ como función de z_0 es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Además la derivada n -ésima de g está dada para todo $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ por la siguiente fórmula integral:

$$g^{(n)}(z_0) = n! \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Demostración:

Para demostrar que g es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, por definición, hay que probar que para cada z_0 fijo que no pertenezca a γ^* existe un disco $D_R(z_0)$, con $R > 0$ tal que para todo $w \in D_R(z_0)$ la función $g(w)$ está definida y tiene un desarrollo en series de potencias de $(w - z_0)$.

Entonces sea fijo $z_0 \notin \gamma^*$. Sea $R = \text{dist}(z_0, \gamma^*) = \min_{z \in \gamma^*} |z - z_0| > 0$. Existe ese mínimo porque γ^* es compacto, y es estrictamente positivo porque si fuera cero entonces z pertenecería a γ^* . Tenemos que $|z - z_0| \geq R \ \forall z \in \gamma^*$, luego:

$$\frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{R}, \quad \forall z \in \gamma^* \quad (1)$$

Sea (también fijo) un punto $w \in D_R(z_0)$, es decir $|w - z_0| < R$. Tenemos:

$$\frac{|w - z_0|}{R} < 1 \quad (2)$$

Por construcción de R y de w se verifica $|w - z_0| < R \leq |z - z_0|$, $\forall z \in \gamma^*$. Por lo tanto $w \notin \gamma^*$, y entonces la función g está definida en el punto w . Por definición de la función g tenemos:

$$g(w) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz \quad (3)$$

Descompongamos el integrando:

$$\frac{f(z)}{z - w} = \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - (w - z_0)/(z - z_0)}$$

y llamemos $u = (w - z_0)/(z - z_0)$. De las desigualdades (1) y (2) se deduce que $|u| < 1$. Por otra parte, recordemos la serie geométrica de razón u : Si $|u| < 1$ se cumple $1/(1 - u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$. Entonces el integrando de (3) queda:

$$\frac{f(z)}{z - w} = \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

Observamos que para sumar esta serie puntualmente para cada $z \in \gamma^*$, z está fijo, y por lo tanto el factor $f(z)/(z - z_0)$ puede pasarse para dentro del símbolo de sumatoria. Sustituyendo en (3) resulta:

$$g(w) = \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n dz \quad (4)$$

Ahora veamos que la serie dentro de la integral anterior, converge uniformemente en $z \in \gamma^*$ (recordar que z_0 y w están fijos), para poder aplicar el teorema de convergencia uniforme e

integración que asegura que se puede sacar el símbolo de sumatoria de la serie para afuera de la integral.

Primero acotemos el término general de la serie. Llamando M al máximo de $|f(z)|$ para $z \in \gamma^*$ y usando la desigualdad (1) se tiene:

$$\left| \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n \right| \leq \frac{M}{R} \cdot \left(\frac{|w - z_0|}{R} \right)^n = A_n \quad \text{independiente de } z \quad \forall z \in \gamma^*$$

Por otra parte $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge porque es una serie geométrica de razón $|w - z_0|/R < 1$. Luego, aplicando el criterio de la mayorante de Weierstrass se deduce que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n \quad \text{C.U. para } z \in \gamma^*$$

Aplicamos ahora el teorema de convergencia uniforme e integración a la igualdad (4):

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} (w - z_0)^n \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Llamando

$$a_n = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

se tiene:

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n \quad \forall w \in D_R(z_0)$$

lo que termina de probar que g es analítica. Además teniendo en cuenta la relación entre la derivada n -ésima en z_0 y los coeficientes del desarrollo en serie de potencias centrado en z_0 , de cualquier función analítica, se deduce:

$$g^{(n)}(z_0) = n! a_n = n! \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \square$$

5.4. Teoría del índice.

Definición 5.4.1. Índice de una curva cerrada.

Dada una curva cerrada cualquiera $\gamma : z = z(t), t \in [a, b]$ orientada para t creciente, y dado un punto $z_0 \notin \gamma$, se llama *índice de γ en el punto z_0* , y se denota $Ind_{\gamma}(z_0)$, a la *cantidad entera k neta de vueltas que da γ alrededor de z_0* .

La *cantidad entera k neta de vueltas que da γ alrededor de z_0* se define mediante la siguiente construcción:

El vector $z(t) - z_0$ varía continuamente con t cuando el parámetro real t de la curva γ varía en el intervalo $[a, b]$.

Ese vector $z(t) - z_0$ nunca se anula porque $z_0 \notin \gamma$. Entonces define la semirrecta con extremo en z_0 que pasa por $z(t)$, llamada *dirección del vector $z(t) - z_0$* .

Al variar $t \in [a, b]$ esa dirección sufre giro con centro en z_0 y ángulo $\alpha(t)$ (medido en radianes, positivamente si es en sentido antihorario y negativamente si es en sentido horario), con respecto a la dirección inicial $z(a) - z_0$ (es decir considerando $\alpha(0) = 0$).

El ángulo de giro neto al final del recorrido de la curva es por definición $\alpha(b)$.

Como $z(b) = z(a)$, la dirección final $z(b) - z_0$ es igual a la inicial $z(a) - z_0$. Entonces el ángulo de giro neto es un múltiplo entero de 2π , es decir $\alpha(b) = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

El entero k así construido se llama *cantidad neta de vueltas de γ alrededor de z_0* o $Ind_\gamma(z_0)$, Índice de γ en z_0 .

Teorema 5.4.2. Teorema del índice.

Sea γ una curva cerrada cualquiera C^1 a trozos. Para todo $z_0 \notin \gamma$ se cumple:

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Demostración: Se puede hacer una prueba, computando la integral, usando una rama del logaritmo complejo en el conjunto simplemente conexo que se obtiene del plano complejo retirando una semirrecta S adecuada que pasa por z_0 , y contando la cantidad de veces que la curva γ atraviesa esta semirrecta S (donde la rama del logaritmo complejo es discontinua) en sentido antihorario y en sentido horario. (Ver sección 3.1, ejercicio 3.1.13)

Sin embargo, presentaremos esta otra prueba que no requiere el estudio de las ramas del logaritmo complejo:

Sea $z = z(t) : t \in [a, b]$ una parametrización de clase C^1 a trozos de la curva γ . Definimos, para la variable real t

$$w(t) = \int_a^t \frac{\dot{z}(t)}{z(t) - z_0} dt$$

Por construcción

$$w(b) = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Por lo tanto el objetivo consiste en demostrar que $w(b) = Ind_\gamma(z_0)2\pi i$.

Por construcción $w(a) = 0$.

Por el teorema fundamental del cálculo para funciones de variable real, se tiene que $w(t)$ es derivable respecto de t y por lo tanto continua, y que su derivada es:

$$\dot{w}(t) = \frac{\dot{z}(t)}{z(t) - z_0}$$

Entonces

$$\left(e^{-w(t)}(z(t) - z_0) \right)' = e^{-w(t)} [\dot{w}(t)(z(t) - z_0) - \dot{z}(t)] = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Entonces $e^{-w(t)}(z(t) - z_0)$ es constante para todo t , igual a su valor para $t = b$ y para $t = a$:

$$e^{-w(b)}(z(b) - z_0) = e^{-w(t)}(z(t) - z_0) = e^{-w(a)}(z(a) - z_0) \quad \forall t \in [a, b]$$

Como la curva es cerrada $z(b) = z(a)$. Además por construcción $w(a) = 0$. Entonces:

$$e^{-w(b)}(z(a) - z_0) = e^{-w(t)}(z(t) - z_0) = (z(a) - z_0) \quad \forall t \in [a, b]$$

Dividiendo entre $z(a) - z_0$ y luego multiplicando por $e^{w(t)}$ se deduce:

$$e^{-w(b)} = 1, \quad \frac{z(t) - z_0}{z(a) - z_0} = e^{w(t)} \quad \forall t \in [a, b] \quad (1)$$

Recordemos que $|e^u| = e^{\operatorname{Re} u}$. Tomamos módulo en la primera igualdad de (1) y deducimos:

$$1 = e^{-\operatorname{Re} w(b)} \Rightarrow \operatorname{Re} w(b) = 0 \Rightarrow w(b) = i \operatorname{Im} w(b) \Rightarrow \operatorname{Im} w(b) = w(b)/i$$

Ahora, recordando que $\arg(e^u) = \{\operatorname{Im} u + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ tomando argumento en la segunda igualdad de (1) se obtiene:

$$\operatorname{Im} w(t) \in \arg \left(\frac{z(t) - z_0}{z(a) - z_0} \right) = \arg(z(t) - z_0) - \arg(z(a) - z_0) \quad \forall t \in [a, b]$$

Entonces $\operatorname{Im} w(t)$, que varía continuamente con t y cumple $w(a) = 0$, es el ángulo de giro $\alpha(t)$ de la dirección del vector $z(t) - z_0$ en relación a la dirección inicial $z(a) - z_0$. Por definición de índice

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{\alpha(b)}{2\pi} = \frac{\operatorname{Im} w(b)}{2\pi} = \frac{w(b)}{2\pi i} \Rightarrow w(b) = \operatorname{Ind}_\gamma(z_0) \cdot 2\pi i \quad \square$$

Teorema 5.4.3. Propiedades del índice.

Para toda curva cerrada γ el índice $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)$ definido para todo $z_0 \notin \gamma^*$ cumple:

- Es un número entero constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
- Es cero en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Demostración:

a) Dejemos fija la curva cerrada γ , y tomemos $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Por definición de Índice, $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)$ es un número entero para todo $z_0 \notin \gamma^*$.

Por el teorema del índice y el teorema de analiticidad de las funciones construidas mediante integración (teorema 5.3.1), se deduce que $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)$, es una función analítica como función de $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, y que para todo $z_0 \notin \gamma$:

$$\operatorname{Ind}_\gamma'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)^2} dz$$

Pero la integral de la derecha es cero por la Regla de Barrow, porque γ es una curva cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ y en ese abierto el integrando $(z - z_0)^{-2}$ tiene como primitiva $-(z - z_0)^{-1}$.

Entonces la función $\operatorname{Ind}_\gamma$ tiene derivada idénticamente nula en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Por el corolario de la Regla de Barrow, es constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, como enuncia la tesis a).

b) Sea R la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ y llamemos k al valor constante de $\operatorname{Ind}_\gamma(w)$ para todo $w \in R$.

Como R es no acotado, existe una sucesión $z_n \in R$ tal que $|z_n| \rightarrow \infty$. Denotemos con $d_n = \min_{z \in \gamma^*} |z - z_n|$ (es decir, d_n es la distancia del punto z_n a la curva γ^*).

Se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$$

$$\forall z \in \gamma^*, \quad |z - z_n| \geq d_n, \quad \frac{1}{|z - z_n|} \leq \frac{1}{d_n}$$

Por el teorema del índice, se deduce:

$$\forall n \geq 0, \quad k = \operatorname{Ind}_\gamma(z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_n} dz$$

Llamando L a la longitud de la curva γ , y aplicando el teorema de acotación de integrales, se obtiene:

$$\forall n \geq 0, \quad |k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{|z - z_n|} |dz| \leq \frac{1}{2\pi d_n} \int_{\gamma} ds = \frac{L}{2\pi d_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Luego $k = 0$ como queríamos demostrar. $\square$

Nota 5.4.4. Relación entre homotopía e índice. La siguiente propiedad distingue a las curvas cerradas homotópicas a un punto en Ω :

Si una curva cerrada C^1 a trozos $\gamma \subset \Omega$ es homotópica a un punto en Ω entonces para todo $z_0 \notin \Omega$ se cumple $Ind_{\gamma}(z_0) = 0$.

Demostraremos esa condición necesaria en 7.1.3. Advertimos que no es condición suficiente.