6. Teoría de Cauchy local.

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se denota con $R \subset \Omega$ a un rectángulo contenido en Ω . R indica el conjunto de puntos que están, ya sea en el interior del rectángulo, ya sea en el borde del rectángulo. Se denota con ∂R al borde del rectángulo, como curva C^1 a trozos formado por cuatro segmentos que son los lados del rectángulos. Siempre que se denote ∂R se refiere al borde del rectángulo, orientado en sentido antihorario, y recorrido una sola vez.

6.1. Sucesión de rectángulos encajados convergentes para acotar integrales.

Lema 6.1.1. *Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función continua. Sea R_0 un rectángulo tal que $R_0 \subset \Omega$. Entonces, existe un rectángulo R_1 , tal que:*

- 1) $R_1 \subset R_0$.
- 2) $|I_1| \geq |I_0|/4$, donde $I_j = \int_{\partial R_j} f(z) dz$, $j = 0, 1$.
- 3) $P_1 = P_0/2$ y $D_1 = D_0/2$, donde P_j es el perímetro del rectángulo R_j , y D_j es la longitud de la diagonal del rectángulo R_j , para $j = 0, 1$.

Demostración: (Hágase un dibujo para seguir los razonamientos.)

Trazando los dos segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos del rectángulo R_0 , dividimos a R_0 en cuatro rectángulos iguales $R_0 = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. El perímetro de cada S_j , ($j = 1, 2, 3, 4$) es la mitad del perímetro de R_0 . Además la diagonal de cada S_j es la mitad de la diagonal de R_0 .

Consideramos las curvas ∂S_j , borde de S_j , orientada en sentido antihorario, para cada $j = 1, 2, 3, 4$. Al recorrer las cuatro curvas ∂S_j , los lados de cada ∂S_j que no están contenidos en ∂R_0 se cancelan, porque están recorridos en sentido opuesto en las curvas ∂S_k contiguas a ∂S_j .

Entonces tenemos:

$$I_0 = \int_{\partial R_0} f(z) dz = \int_{\partial S_1} f(z) dz + \int_{\partial S_2} f(z) dz + \int_{\partial S_3} f(z) dz + \int_{\partial S_4} f(z) dz$$

Aplicando la propiedad triangular del módulo, se tiene:

$$|I_0| \leq \left| \int_{\partial S_1} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial S_2} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial S_3} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial S_4} f(z) dz \right|$$

Por lo tanto $|I_0|$ es un número real menor o igual que la suma de 4 números reales. Entonces alguno de estos 4 números reales debe ser mayor o igual que $|I_0|/4$. (Pues si los 4 números fueran menores que $|I_0|/4$ su suma sería menor que $|I_0|$.) Si existe más de uno entre los 4 números reales que es mayor o igual que $|I_0|/4$ elijo uno. Llamo R_1 al rectángulo S_j correspondiente. Entonces:

$$\left| \int_{\partial R_1} f(z) dz \right| \geq \frac{|I_0|}{4} \quad \square$$

Proposición 6.1.2. Construcción de rectángulos encajados convergentes para acotar integrales.

Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función continua. Sea R_0 un rectángulo tal que $R_0 \subset \Omega$. Entonces, existe una sucesión de rectángulos $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$, tal que:

- 1) $R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_{n-1} \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \dots$

- 2) $|I_0| \leq 4^n |I_n| \quad \forall n \geq 0$, donde $I_n = \int_{\partial R_n} f(z) dz$.
- 3) $P_n = P_0/2^n$ y $D_n = D_0/2^n$, para todo $n \geq 0$, donde P_n es el perímetro del rectángulo R_n , y D_n es la longitud de la diagonal del rectángulo R_n .
- 4) Existe un punto a (independiente de n) tal que $a \in R_n \quad \forall n \geq 0$. (Esto se escribe: $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n$.)

Demostración:

Construyamos R_n para todo $n \geq 0$, por inducción completa en n .

Para $n = 0$ aplicamos el lema 6.1.1 al rectángulo dado R_0 , para construir R_1 .

Para $n = h$, dado el rectángulo R_h , construimos el rectángulo R_{h+1} aplicando el lema 6.1.1, usando R_h en vez de R_0 .

Entonces, por inducción tenemos para todo $n \geq 0$ un rectángulo R_n tal que:

- 1) $R_n \supset R_{n+1}$
- 2) $|I_{n+1}| \geq |I_n|/4$
- 3) $P_{n+1} = P_n/2$ y $D_{n+1} = D_n/2$

Luego:

- 1) $R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_{n-1} \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \dots$
- 2) $|I_n| \geq |I_{n-1}|/4 \geq |I_{n-2}|/4^2 \geq |I_{n-3}|/4^3 \geq \dots \geq |I_0|/4^n$. De donde $|I_0| \leq 4^n |I_n|$
- 3) $P_n = P_{n-1}/2 = P_{n-2}/2^2 = P_{n-3}/2^3 = \dots = P_0/2^n$. Y análogamente para la longitud de la diagonal: $D_n = D_0/2^n$.

Solo resta probar que existe $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n$.

Sea z_n el centro del rectángulo R_n . Probemos que la sucesión z_n es de Cauchy:

Dado $\epsilon > 0$ elijamos N tal que la diagonal D_N del rectángulo R_N sea menor que ϵ . (Existe tal N porque $D_n = 1/2^n D_0 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$.)

Para todos $n, m \geq N$ los centros z_n, z_m de los rectángulos R_n y R_m están en R_N porque $R_n \subset R_N$ y $R_m \subset R_N$. Entonces la distancia entre ellos es menor o igual que la longitud de la diagonal de R_N . Tenemos así:

$$n, m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| \leq D_N < \epsilon$$

Luego, la sucesión z_n es de Cauchy. Tomemos parte real e imaginaria: $z_n = x_n + iy_n$. Las sucesiones de reales x_n e y_n son de Cauchy porque lo es z_n y porque $|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m|$, $|y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$. Como la recta real es completa, toda sucesión de Cauchy de reales es convergente. Luego, la sucesión $z_n = x_n + iy_n$ converge a un complejo que llamamos a .

Probemos que $a \in R_m \quad \forall m \geq 0$. Fijado $m \geq 0$, tomemos variable $n \geq m$. Tenemos que el centro z_n del rectángulo R_n está contenido en R_m porque $R_n \subset R_m$. Resumiendo:

$z_n \in R_m$ con m fijo para todo $n \geq m$.

$z_n \rightarrow a$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

R_m es cerrado.

Entonces $a \in R_m$.

Como $a \in R_m$ para cualquier $m \geq 0$ se tiene $a \in \bigcap_{m=0}^{\infty} R_m$. $\square$

6.2. Teoría de Cauchy-Goursat en rectángulos.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. En lo que sigue R es un rectángulo contenido en Ω y δR denota al borde de R orientado en sentido antihorario y recorrido una sola vez.

Teorema 6.2.1. Teorema de Cauchy local en rectángulos.

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea R un rectángulo contenido en Ω . Entonces

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

Demostración: Llamemos $R_0 = R$ y construyamos la sucesión de rectángulos encajados convergentes $R_0 \supset R_1 \supset \dots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \dots$, de la proposición 6.1.2. Usamos la misma notación que en el enunciado de esa proposición. El objetivo es probar que $I_0 = 0$.

Como f es holomorfa en Ω , $R_0 \subset \Omega$ y $a \in R_0$, entonces f es derivable en a . Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow a} \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) \right| = 0$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) \right| < \epsilon \quad (1)$$

Tomemos un rectángulo R_n de la sucesión de rectángulos convergentes, con n fijo suficientemente grande tal que la longitud D_n de la diagonal de R_n sea menor que δ . (Esto es posible porque $D_n = D_0/2^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$.) Para todo $z \in R_n$, como $a \in R_n$, se cumple $|z - a| \leq D_n < \delta$. Luego, por (1):

$$z \in R_n \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) \right| < \epsilon \quad (2)$$

Ahora consideremos la integral:

$$J = \int_{\partial R_n} (f(z) - f(a) - (z - a)f'(a)) dz = \int_{\partial R_n} (z - a) \left(\frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) \right) dz \quad (3)$$

(el integrando de la derecha en la igualdad anterior, debe interpretarse como 0 si $z = a$. Así definido el integrando es una función continua para todo $z \in \Omega$, incluso si $z = a$, y la integral de la derecha está definida).

Usando (2) y que $|z - a| \leq D_n \quad \forall z \in R_n$, sustituimos en (3) y resulta:

$$|J| \leq \int_{\partial R_n} |z - a| \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) \right| |dz| \leq D_n \cdot \epsilon \int_{\partial R_n} |dz| = D_n P_n \cdot \epsilon$$

En las desigualdades anteriores hemos usado que $\int_{\partial R_n} |dz| = \int_{\partial R_n} ds =$ Longitud de la curva $\partial R_n = P_n$ donde s indica la abscisa curvilínea de la curva ∂R_n , y P_n denota el perímetro del rectángulo R_n .

Ahora aplicamos las afirmaciones en la parte 3) de la proposición 6.1.2 que dice que $D_n = D_0/2^n$ y $P_n = P_0/2^n$. Luego

$$|J| \leq \frac{D_0 P_0 \cdot \epsilon}{4^n} \quad (4)$$

Por otra parte, conviniendo que $(z - a)^0 = 1$ tomamos la primera igualdad de (3) y resulta:

$$J = \int_{\partial R_n} f(z) dz - f(a) \int_{\partial R_n} (z - a)^0 dz - f'(a) \int_{\partial R_n} (z - a)^1 dz \quad (5)$$

Recordando que $(z - a)^m$, para cualquier $m \geq 0$ fijo, tiene primitiva en todo el plano complejo que es $(z - a)^{m+1}/(m+1)$, se deduce por la regla de Barrow que su integral a lo largo de cualquier curva cerrada es cero. Entonces de (4) y (5) se obtiene:

$$J = \int_{\partial R_n} f(z) dz = I_n, \quad |I_n| \leq \frac{D_0 P_0 \cdot \epsilon}{4^n}$$

Y usando la parte 2) del enunciado de la proposición 6.1.2 se obtiene:

$$|I_0| \leq 4^n |I_n| \leq 4^n \frac{D_0 P_0 \cdot \epsilon}{4^n} = D_0 P_0 \cdot \epsilon$$

Como ϵ es arbitrario, haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ se deduce que $|I_0| = 0$, luego $I_0 = 0$ como queríamos probar. $\square$

Nota 6.2.2. Si se supone que $f \in H(\Omega)$ es además de clase C^1 , entonces aplicando el Corolario 1 del Teorema de Green (ver párrafo 1.1.8), se obtiene la tesis del teorema de Cauchy local en un rectángulo, como se muestra en el ejercicio siguiente.

Sin embargo, el Teorema de Cauchy local que acabamos de demostrar no requiere la hipótesis de que f sea de clase C^1 , como lo requiere el Teorema de Green.

Usando el Teorema de Cauchy local en un rectángulo, demostraremos en la sección 6.3 que toda función $f \in H(\Omega)$ es también de clase C^1 . Y por eso es importante que en la demostración del Teorema de Cauchy local no se suponga que f es C^1 .

Por ese motivo no se debe demostrar el Teorema de Cauchy local usando el corolario 1 del Teorema de Green. (Pero una vez que probemos en la sección 6.3 que toda función $f \in H(\Omega)$ es de clase C^1 , entonces sí, se puede aplicar el Corolario 1 del Teorema de Green para ulteriores demostraciones y ejercicios.)

Ejercicio 6.2.3. ■ **Parte a)** Demostrar que para toda función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ continua en Ω y para toda curva $\gamma \subset \Omega$:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy$$

Por lo tanto la integración compleja a lo largo de una curva se traduce en la integración de dos campos reales, $(u, -v)$ y (v, u) , a lo largo de la misma curva.

- **Parte b)** Demostrar que si f es holomorfa en Ω y de clase C^1 , entonces los campos $(u, -v)$ y (v, u) cumplen las hipótesis del corolario 1 del teorema de Green (ver sección 1.1.8). Sugerencia: usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann (ver apéndice 2.1).
- **Parte c)** Deducir que si $f \in H(\Omega)$ es de clase C^1 , entonces para toda curva cerrada γ homotópica a un punto en Ω se cumple:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

El siguiente teorema es una generalización del Teorema de Cauchy local en rectángulos, que en vez de pedir que f sea holomorfa en todo Ω , admite que haya un punto excepcional $z_0 \in \Omega$ donde f no es holomorfa (y hasta puede f no estar siquiera definida en z_0).

Teorema 6.2.4. Teorema de Cauchy-Goursat local en rectángulos.

Sea $z_0 \in \Omega$ y sea $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

Sea R un rectángulo contenido en Ω tal que su borde ∂R no pasa por z_0 . Entonces

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

Demostración:

1er. caso) $z_0 \notin \text{int } R$, donde $\text{int } R$ indica el interior de R , o sea $R \setminus \partial R$.

Considerando el abierto $\Omega_1 = \Omega \setminus \{z_0\}$, por hipótesis $f \in H(\Omega_1)$ y $R \subset \Omega_1$. Aplicando el teorema de Cauchy local en rectángulos, resulta $\int_{\partial R} f(z) dz$ como queríamos demostrar.

2do caso) $z_0 \in \text{int } R$. Hágase un dibujo. El punto z_0 es interior al rectángulo R .

Por hipótesis, como $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |(z - z_0)f(z)| < \epsilon \quad (1)$$

Elijamos un cuadrado Q (que depende del valor de ϵ dado) con centro en z_0 , lados paralelos a los lados de R , diagonal D menor que δ , y que esté contenido en R . Denotemos con ∂Q el borde del cuadrado recorrido una sola vez en sentido antihorario.

Para todo $z \in \partial Q$ se cumple $0 < |z - z_0| \leq D < \delta$. De esto y de (1) se deduce:

$$z \in \partial Q \Rightarrow |(z - z_0)f(z)| < \epsilon \quad (2)$$

Calculemos la integral de f a lo largo de ∂Q :

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = \int_{\partial Q} \frac{(z - z_0)f(z)}{z - z_0} dz \quad (3)$$

Denotemos con L la longitud del lado de Q . El perímetro de Q , que es igual a la longitud de ∂Q , es $4L$. La distancia de un punto $z \in \partial Q$ al centro z_0 de Q es $|z - z_0| \geq L/2 \quad \forall z \in \partial Q$. Luego sustituyendo en (3) y usando (2) queda:

$$\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial Q} \frac{|(z - z_0)f(z)|}{|z - z_0|} |dz| \leq \frac{\epsilon}{L/2} \int_{\partial Q} ds = \frac{\epsilon}{L/2} \cdot 4L = 8 \cdot \epsilon \quad (4)$$

Si prolongamos dos lados paralelos de Q hasta cortar a los lados de R que son perpendiculares a ellos, el rectángulo R queda dividido en cinco rectángulos, de los cuales uno es el cuadrado Q . Tenemos $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup Q$. Orientando los bordes de cada uno de esos rectángulos en sentido antihorario, se cumple:

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R_1} f(z) dz + \int_{\partial R_2} f(z) dz + \int_{\partial R_3} f(z) dz + \int_{\partial R_4} f(z) dz + \int_{\partial Q} f(z) dz$$

Pero $z_0 \notin R_j$, para $j = 1, 2, 3, 4$, y entonces, por lo probado en el primer caso, las primeras cuatro integrales del segundo miembro de la igualdad anterior son cero. Es decir $\int_{\partial R_j} f(z) dz = 0$ para $j = 1, 2, 3, 4$. Resulta

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial Q} f(z) dz$$

y usando (4) se deduce que

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 8 \cdot \epsilon$$

La desigualdad anterior vale para $\epsilon > 0$ arbitrario. Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ se deduce:

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| = 0. \quad \square$$

Teorema 6.2.5. Fórmula integral de Cauchy local en rectángulos.

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea R un rectángulo contenido en Ω . Sea z_0 un punto en el interior de R . Sea ∂R el borde del rectángulo, recorrido una sola vez en sentido antihorario. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

Demostración:

Sea g la siguiente función auxiliar definida en $\Omega \setminus \{z_0\}$:

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \forall z \neq z_0, \quad z \in \Omega$$

Se observa que $g(z)$ es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$ porque es cociente de dos funciones holomorfas, con el denominador que no se anula.

Además, como $f(z)$ es continua en z_0 , se deduce:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = 0$$

Por lo tanto g cumple las hipótesis del Teorema de Cauchy-Goursat local en un rectángulo, y se tiene:

$$\int_{\partial R} g(z) dz = 0$$

Luego

$$\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\partial R} \frac{1}{z - z_0} dz = 0 \quad (1)$$

Como z_0 pertenece al interior del rectángulo R y el borde ∂R del rectángulo está recorrido una sola vez en sentido antihorario, se tiene que $Ind_{\partial R}(z_0) = 1$. Por el teorema del índice: $Ind_{\partial R}(z_0) = (1/(2\pi i)) \int_{\partial R} (1/(z - z_0)) dz$, de donde se deduce que:

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

Sustituyendo en (1):

$$\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) 2\pi i \quad \square$$

6.3. Analiticidad de las funciones holomorfas.

Teorema 6.3.1. Analiticidad de las funciones holomorfas.

Toda función holomorfa es analítica y recíprocamente.

Nota 6.3.2. Debido al resultado del teorema 6.3.1 la notación $H(\Omega)$ indica el conjunto de todas las funciones analíticas en Ω , que es el mismo que el de todas las funciones holomorfas en Ω .

Demostraremos el teorema 6.3.1 junto al teorema siguiente:

Teorema 6.3.3. Fórmula integral de Cauchy local en rectángulos para las derivadas.

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea R un rectángulo contenido en Ω . Sea z_0 un punto en el interior de R . Sea ∂R el borde del rectángulo, recorrido una sola vez en sentido antihorario. Entonces

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0)$$

Demostración de los teoremas 6.3.1 y 6.3.3:

Sea $f \in H(\Omega)$. Para demostrar que f es analítica en Ω , por definición hay que probar que para cada $z_0 \in \Omega$, f es analítica en z_0 .

Entonces fijemos $z_0 \in \Omega$, cualquiera pero fijo. Y después fijemos R rectángulo, cualquiera pero fijo, contenido en Ω que tenga a z_0 en su interior. Haremos un razonamiento (con construcciones que dependen del z_0 elegido y del rectángulo R elegido), con el objetivo de

$$\text{Probar que } f \text{ es analítica en } z_0 \text{ y } f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Por la fórmula integral de Cauchy local en el rectángulo R se cumple:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - w} dz \quad \forall w \in \text{int } R \quad (1)$$

Consideremos la función auxiliar g definida como sigue:

$$g(w) = \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - w} dz \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \partial R \quad (2)$$

Por el teorema de construcción de funciones analíticas mediante integración (Teorema 5.3.1), se tiene

$$g(w) \text{ es analítica } \forall w \in \mathbb{C} \setminus \partial R \quad \text{y} \quad g^{(n)}(w) = n! \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz \quad \forall n \geq 0, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \partial R \quad (3)$$

De (1) y (2) se deduce que $f(w) = (1/2\pi i)g(w) \quad \forall w \in \text{int } R$. Entonces, aplicando (3) se deduce:

$$f(w) \text{ es analítica } \forall w \in \mathbb{C} \setminus \partial R \quad \text{y} \quad f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz \quad \forall n \geq 0, \quad \forall w \in w \in \text{int } R$$

En particular las afirmaciones anteriores se verifican para $w = z_0$ como queríamos demostrar. $\square$

Corolario 6.3.4. Derivabilidad infinita de las funciones holomorfas.

Toda función holomorfa en Ω cumple:

a) Existen en Ω derivadas $f^{(k)}(z)$ (respecto de z) de orden k , para todo natural $k \geq 1$. Para todo $k \geq 0$ la derivada $f^{(k)}$ es holomorfa (o lo que es lo mismo, analítica) en Ω .

b) f es C^∞ en Ω .

c) Se verifica la siguiente relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z) \quad \forall z \in D_R(z_0)$ y la derivada n -ésima de f en z_0 :

$$a_0 = f(z_0), \quad a_1 = f'(z_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \forall n \geq 0$$

d) Para todo conjunto compacto K tal que $K \subset D_R(z_0)$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z)$ converge uniformemente en K .

Demostración: Es consecuencia inmediata del teorema de analiticidad de las funciones holomorfas (Teorema 6.3.1) y del teorema de derivabilidad infinita de las funciones analíticas (Teorema 5.1.6). $\square$

Corolario 6.3.5. Si f es analítica en $z_0 \in \Omega$ entonces también es analítica en todos los puntos del disco $D_R(z_0)$ donde converge la serie de potencias de f centrada en z_0 .

Demostración: Por la parte a) del teorema 5.1.6 la función f es holomorfa en $D_R(z_0)$, luego, por el teorema de analiticidad de funciones holomorfas (teorema 6.3.1), f es analítica en todo punto $z \in D_R(z_0)$. $\square$

Corolario 6.3.6. Teorema de Cauchy-Goursat extendido.

Si $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ cumple

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

entonces f puede extenderse holomórficamente a Ω y $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ para todo rectángulo R contenido en Ω .

Demostración: Sea $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$. Es holomorfa si $z \neq z_0$ porque es producto de funciones holomorfas en $\Omega \setminus \{z_0\}$. Afirmamos que g también es holomorfa en z_0 y $g'(z_0) = 0$. En efecto, calculando el cociente incremental de g en z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^2 f(z)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

Luego, el desarrollo en serie de potencias de g centrado en z_0 es, para algún disco $D_R(z_0) \subset \Omega$, con $R > 0$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad (1)$$

Pero $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$, $a_1 = 0$. Entonces, sustituyendo en (1) y dividiendo entre $(z - z_0)^2$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-2} \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad z \neq z_0 \quad (2)$$

Definiendo $f(z_0) = a_2$ a partir de (2) se obtiene:

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2} \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad (3)$$

La afirmación (3) dice que la función f extendida a $z = z_0$ como $f(z_0) = a_2$, es analítica en z_0 . Luego existe una extensión analítica (o lo que es lo mismo holomorfa) de la función f dada a todo Ω .

Aplicando el teorema de Cauchy local en rectángulos a la función f extendida, se deduce que $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ para todo rectángulo cerrado R contenido en Ω . $\square$

Corolario 6.3.7. a) Si $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ es acotada en algún entorno de z_0 entonces se puede extender holomóficamente a Ω .

b) Si $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ no se puede extender holomóficamente a Ω entonces $f(z)$ no es acotada en ningún entorno de z_0 .

Demostración: Parte a) Si f es acotada en algún entorno de z_0 entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

y f cumple las hipótesis del teorema de Cauchy-Goursat extendido (corolario 6.3.6), de donde se deduce que f tiene una extensión holomorfa a Ω .

Parte b) Es el contrarrecíproco de la parte a). $\square$