7. Teoría de Cauchy global.

7.1. Teorema de Cauchy global.

Sea un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Teorema 7.1.1. Teorema de Cauchy global.

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Demostración: De acuerdo al Corolario de derivabilidad infinita de las funciones holomorfas (parte b. del Corolario 6.3.4), toda función holomorfa es de clase C^1 . Entonces se puede demostrar este teorema usando el Corolario 1 del Teorema de Green (párrafo 1.1.8) como se sugiere en el Ejercicio 6.2.3.

Sin embargo demostraremos el teorema de Cauchy global sin asumir conocido el teorema de Green:

Para seguir esta demostración hágase un dibujo ⁵.

Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω . Sea $\bar{R} = (R \cup \gamma^*) \subset \Omega$ el conjunto compacto (cerrado y acotado), recorrido por la homotopía $z = z_s(t)$ $t \in [a, b]$, $s \in [0, 1]$ que deforma continuamente γ hasta transformarla en un punto. (Para fijar ideas considérese el abierto R como la unión de regiones acotadas que tienen su borde contenido en la curva γ y tómesese $\bar{R} = R \cup \gamma^*$.)

Como $\bar{R}$ es compacto contenido en Ω , y la función f es analítica en cada punto de Ω , existe una cantidad finita k de (pequeños) discos D_j , $j = 1, 2, \dots, k$, centrados en puntos $z_i \in \bar{R}$, con radios positivos, tales que cubren $\bar{R}$ (es decir $\cup_{j=1}^k D_j \supset \bar{R}$), están contenidos en Ω , y además:

$$\forall z \in D_j : \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j} (z - z_j)^n \quad (1)$$

Elegimos en cada disco D_j una curva cerrada $\gamma_j \subset D_j$ de tal forma que, al recorrer todas las curvas γ_j , se vaya recorriendo (de a pequeños trozos) toda la curva γ y además eventualmente otros arcos de las curvas γ_j que no están en γ y que se cancelan al estar recorridos en sentidos opuestos (es decir, arcos recorridos en un sentido en γ_j y que después serán recorridos en sentido opuesto en otras curvas γ_i contiguas a γ_j , con $i \neq j$). Para fijar ideas, se puede dibujar en $\bar{R}$ un cuadrículado con cuadraditos de lado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y tomar como curva γ_j la frontera de cada cuadradito intersectado con $\bar{R}$, orientado adecuadamente.

Por construcción:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

Basta demostrar que para todo $j = 0, 1, 2, \dots, k$ la integral de $f(z)$ a lo largo de γ_j es cero.

Por construcción $\gamma_j^* \subset D_j$. Entonces usando (1) se deduce:

⁵La explicación resulta complicada debido a la dificultad que tengo para incluir un dibujo en estas notas. Si se hace un buen dibujo puede sustituirse la explicación por la frase: Sean las curvas γ_i como en la figura.

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_{\gamma_j} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j} (z - z_j)^n dz$$

Por la parte e) del teorema 5.1.6 la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j} (z - z_j)^n$ converge uniformemente en γ_j^* . Entonces, aplicando el teorema de Convergencia Uniforme e integración, se deduce:

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_j} a_{n,j} (z - z_j)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j} \int_{\gamma_j} (z - z_j)^n dz$$

Pero $\int_{\gamma_j} (z - z_j)^n dz = 0$ por la Regla de Barrow, porque γ_j es cerrada y $(z - z_j)^{n+1}/(n+1)$ es una primitiva de $(z - z_j)^n$ en todo el plano complejo. Entonces deducimos que

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j} \cdot 0 = 0. \quad \square$$

Corolario 7.1.2. Otra versión del teorema de Cauchy global. Sea $f \in H(\Omega)$. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas en Ω , ambas con el mismo extremo inicial y con el mismo extremo final. Si γ_1 es homotópica a γ_2 en Ω , entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Demostración: Siendo γ_1 homotópica a γ_2 en Ω , la curva cerrada $\gamma_1 - \gamma_2$ es homotópica a un punto en Ω . Aplicando el Teorema de Cauchy global 7.1.1:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z) dz = 0 \quad \square$$

Corolario 7.1.3. Relación entre curvas homotópicas e índice. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$.

a) Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva cerrada. Si γ es homotópica a un punto en Ω , entonces $Ind_{\gamma}(z_0) = 0$ para todo $z_0 \notin \Omega$.

b) Sean γ_1 y γ_2 dos curvas contenidas en Ω , ambas cerradas y con el mismo extremo inicial y final. Si γ_1 y γ_2 son homotópicas en Ω , entonces $Ind_{\gamma_1}(z_0) = Ind_{\gamma_2}(z_0)$ para todo $z_0 \notin \Omega$.

Nota: No valen los recíprocos de las proposiciones a) y b).

Demostración:

a) Para todo $z_0 \notin \Omega$ fijo, la función $1/(z - z_0)$ es holomorfa en Ω , porque no se anula el denominador. Por el Teorema del índice y el Teorema de Cauchy (teorema 7.1.1) se cumple:

$$2\pi i \cdot Ind_{\gamma}(z_0) = \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 0. \quad \square$$

b) Siendo γ_1 homotópica a γ_2 en Ω , la curva cerrada $\gamma_1 - \gamma_2$ es homotópica a un punto en Ω . Para todo $z_0 \notin \Omega$ fijo, la función $1/(z - z_0)$ es holomorfa en Ω , porque no se anula el denominador. Aplicando el Teorema del índice y luego el Teorema de Cauchy global 7.1.1:

$$2\pi i (Ind_{\gamma_1}(z_0) - Ind_{\gamma_2}(z_0)) = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz - \int_{\gamma_2} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{1}{z - z_0} dz = 0. \quad \square$$

Corolario 7.1.4. Existencia de primitiva en simplemente conexos.

Si Ω es simplemente conexo y $f \in H(\Omega)$ entonces existe primitiva F de f en Ω , es decir existe $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$.

Demostración: Elijamos $z_0 \in \Omega$ y dejémoslo fijo. Tomemos $z_1 \in \Omega$ cualquiera. Definamos la función

$$F(z_1) = \int_{\gamma} f(z) dz$$

donde γ es cualquier curva C^1 a trozos contenida en Ω que une z_0 con z_1 .

La función F está bien definida, es decir no depende de la curva γ elegida. En efecto, si tomamos dos curvas γ_1 y γ_2 contenidas en Ω que unan el punto z_0 con z_1 , la curva cerrada $\gamma_1 - \gamma_2$ es homotópica a un punto en Ω , porque Ω es simplemente conexo. Entonces γ_1 y γ_2 son homotópicas en Ω y por el teorema de Cauchy, la integral de f a lo largo de ambas, da lo mismo.

Probemos que $F'(z_1)$ existe y es igual a $f(z_1)$.

Elijamos un disco D de centro z_1 y radio positivo, contenido en Ω . Tomemos $z_2 \in D, z_2 \neq z_1$. Elijamos una curva γ cualquiera que una z_0 con z_1 . Tomemos el segmento $S : z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in [0, 1]$ que une z_1 con z_2 . La curva $\gamma + S$ une z_0 con z_2 . Entonces:

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma+S} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz = \int_S f(z) dz = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))](z_2 - z_1) dz$$

Dividiendo entre $z_2 - z_1$ se deduce:

$$\frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))] dz$$

Tomando límite cuando $z_2 \rightarrow z_1$ el integrando en la igualdad anterior tiende a $f(z_1)$ uniformemente con $t \in [0, 1]$ (porque f es continua en el segmento compacto S , por lo tanto es uniformemente continua en S). Resulta que existe el límite y es

$$\lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \lim_{z_2 \rightarrow z_1} \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))] dz = f(z_1)$$

Por definición de derivada ese límite es $F'(z_1) = f(z_1)$ como queríamos demostrar. $\square$

7.2. Fórmulas integrales de Cauchy global.**Teorema 7.2.1. Fórmula integral de Cauchy global.**

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω . Sea $z_0 \in \Omega$ un punto que no pertenece a γ^* . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z_0)$$

Demostración: Sea $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la siguiente función auxiliar:

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{si } z \neq z_0, \quad g(z_0) = f'(z_0)$$

Afirmación: $g \in H(\Omega)$. En efecto, para $z \neq z_0$ la función g es holomorfa (o lo que es lo mismo, analítica) porque es cociente de funciones holomorfas con el denominador que no se anula. Para probar la afirmación basta entonces probar que g es analítica también en z_0 .

Como f es analítica en $z = z_0$, existe un disco $D_r(z_0)$, con $r > 0$ tal que

$$\forall z \in D_r(z_0) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

siendo $a_0 = f(z_0)$ y $a_1 = f'(z_0)$. Por lo tanto $\forall z \in D_r(z_0)$ tal que $z \neq z_0$

$$g(z) - g(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Entonces, sumando $g(z_0) = f'(z_0) = a_1$ a la serie de la derecha:

$$\forall z \in D_r(z_0) \text{ tal que } z \neq z_0, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Pero la igualdad anterior es válida también para $z = z_0$ porque queda $g(z_0) = a_1 = f'(z_0)$. Entonces, para todo $z \in D_r(z_0)$ la función $g(z)$ es igual a la suma de un desarrollo en serie de potencias centrado en z_0 , y por definición, g es analítica en z_0 . Quedó probada la afirmación.

Apliquemos ahora el Teorema de Cauchy global a la función $g \in H(\Omega)$. Resulta:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0$$

Entonces:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

Por el teorema del índice: $\int_{\gamma} 1/(z - z_0) dz = 2\pi i \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z_0)$. Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \cdot 2\pi i \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z_0) \quad \square$$

Teorema 7.2.2. Fórmula integral de Cauchy global para las derivadas.

Sea $f \in H(\Omega)$. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω . Sea $z_0 \in \Omega$ un punto que no pertenece a γ^* . Entonces

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z_0)$$

Demostración: Tomemos $z_0 \in \Omega \setminus \gamma^*$ y dejémoslo fijo. Sea R la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ tal que $z_0 \in R$.

La función $\text{Ind}_{\gamma}(w)$ es constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Entonces $\text{Ind}_{\gamma}(w) = \text{Ind}_{\gamma}(z_0) \quad \forall w \in R$.

Sea $\Omega_1 = R \cap \Omega$. Es abierto porque es intersección de dos abiertos. No es vacío porque $z_0 \in \Omega_1$. Por construcción, para todo $w \in \Omega_1$ se cumple $Ind_\gamma(w) = Ind_\gamma(z_0)$.

Aplicando la fórmula integral de Cauchy en el punto $w \in \Omega_1$, y usando que $Ind_\gamma(w) = Ind_\gamma(z_0)$ se obtiene:

$$\forall w \in \Omega_1, \quad Ind_\gamma(z_0) \cdot f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (1)$$

Para todo $w \in \Omega_1 \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ definimos la función siguiente:

$$g(w) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (2)$$

Por el teorema 5.3.1 g es analítica y

$$g^{(n)}(w) = n! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad \forall w \in \Omega_1 \quad (3)$$

Combinando (1) y (2) se deduce:

$$\forall w \in \Omega_1 : Ind_\gamma(z_0) \cdot 2\pi i \cdot f(w) = g(w)$$

Derivando n veces respecto de w y aplicando (3) se obtiene:

$$Ind_\gamma(z_0) \cdot 2\pi i \cdot f^{(n)}(w) = n! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad \forall w \in \Omega_1$$

En particular la igualdad anterior se verifica para $w = z_0$ como queríamos demostrar. $\square$

7.3. Recíprocos de los Teoremas de Cauchy.

El siguiente teorema dice que vale también un recíproco del Teorema de Cauchy global, si se supone que la función es continua.

Teorema 7.3.1. *Sea f una función continua en el abierto Ω . Se cumple $f \in H(\Omega)$ si y solo si*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

para toda curva cerrada γ que sea homotópica a un punto en Ω .

Demostración: Directo: Es el teorema de Cauchy global: si $f \in H(\Omega)$ entonces

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

para toda curva cerrada γ homotópica a un punto en Ω .

Recíproco: Tomemos como hipótesis que f es continua y que

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

para toda curva cerrada γ que sea homotópica a un punto en Ω . Probemos que $f \in H(\Omega)$.

Hay que probar que para todo $z_0 \in \Omega$ la función f es derivable en z_0 . Tomemos un disco abierto $D_R(z_0) \subset \Omega$, con $R > 0$. Cualquier curva cerrada γ contenida en $D_R(z_0)$ es homotópica a un punto en Ω . Entonces, de la hipótesis se deduce que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall \text{ curva cerrada } \gamma \text{ contenida en } D_R(z_0).$$

Por el teorema fundamental del cálculo (parte b) del teorema 4.2.9), existe primitiva F de f en $D_R(z_0)$, es decir existe $F \in H(D_R(z_0))$ tal que $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D_R(z_0)$. Como toda función holomorfa es infinitamente derivable, existe $F'' = f'$ lo que muestra que $f \in H(D_R(z_0))$, y en particular es f derivable en z_0 . $\square$

El siguiente teorema (de Morera) da un recíproco del teorema de Cauchy local en rectángulos, para funciones continuas.

Teorema 7.3.2. Teorema de Morera.

Sea f una función continua en Ω . Se cumple:

$f \in H(\Omega)$ si y solo si

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

para todo rectángulo $R \subset \Omega$ que tenga lados paralelos a los ejes real e imaginario.

Nota: El teorema de Morera vale también para triángulos por ejemplo, en vez de rectángulos. Lo que se llama Teorema de Morera es el recíproco, pues el directo es el teorema de Cauchy. El recíproco asegura que basta verificar en los bordes de ciertos rectángulos contenidos en Ω que la integral de f es nula, para deducir que f es holomorfa en Ω . Dicho de otra manera, no es necesario verificar a priori que la integral es también nula en todas las otras curvas homotópicas a un punto en Ω (aunque a posteriori, una vez que sabemos que f es holomorfa, por el teorema de Cauchy global va a ser nula la integral también en todas en esas curvas).

Demostración:

Directo: Es el teorema de Cauchy local en rectángulos: si $f \in H(\Omega)$ entonces

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

para todo rectángulo $R \subset \Omega$.

Recíproco: Tomemos como hipótesis que f es continua y que

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

para todo rectángulo $R \subset \Omega$. Probemos que $f \in H(\Omega)$. Fijemos $z_0 \in \Omega$. Hay que probar que cualquiera sea z_0 que hayamos fijado en Ω , la función f es derivable en z_0 .

En lo que sigue hágase un dibujo.

Tomemos un disco abierto $D_R(z_0) \subset \Omega$, con $R > 0$. Para todo punto $z_1 \in D_R(z_0)$ definamos:

$$F(z_1) = \int_{\Gamma_{HV}(z_0 \rightarrow z_1)} f(z) dz = \int_{\Gamma_{VH}(z_0 \rightarrow z_1)} f(z) dz \quad (1)$$

donde:

$\Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1)$ es la curva formada por el segmento horizontal (paralelo al eje real) que une el punto z_0 con cierto punto z_2 , más el segmento vertical (paralelo al eje imaginario) que une el punto z_2 con el punto z_1 .

$\Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1)$ es la curva formada por el segmento vertical (paralelo al eje imaginario) que une el punto z_0 con cierto punto z_3 , más el segmento horizontal (paralelo al eje real) que une el punto z_3 con el punto z_1 .

Sea R el rectángulo con vértices z_0, z_2, z_1, z_3 . (quizás el rectángulo R degenera a un segmento, cuando la parte real o la parte imaginaria de $z_1 - z_0$ es nula). Entonces:

$$\pm \partial R = \Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1) - \Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1)$$

El signo $\pm$ indica que o bien queda ∂R orientada en sentido antihorario, o bien queda $-\partial R$ orientada en sentido horario, dependiendo de la posición relativa del punto z_1 respecto a z_0 .

Obsérvese que $R \subset D_R(z_0) \subset \Omega$. Entonces por hipótesis la integral de f a lo largo de ∂R da cero, de donde, las integrales de f a lo largo de $\Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1)$ y de $\Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1)$ dan el mismo resultado y definen según (1) a una única función $F(z_1)$.

Afirmación: La función F definida por (1) en el disco abierto $D_R(z_0)$, es una primitiva de f en $D_R(z_0)$, es decir: F es holomorfa en ese disco y su derivada es f .

Una vez probada la afirmación, como toda función holomorfa tiene derivadas de todos los órdenes, existe, en el disco $D_R(z_0)$ la derivada segunda $F'' = f'$. Se deduce que f es holomorfa en $D_R(z_0)$, en particular es derivable en $z = z_0$ como queríamos demostrar.

Prueba de la afirmación: Demostremos que $F = U + iV$ es holomorfa en $D_R(z_0)$. Para eso, aplicando el teorema 4.1.4, verificaremos que cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann $U_x = V_y$, $U_y = -V_x$ y que U y V son diferenciables en $D_R(z_0)$.

Calculemos primero las derivadas parciales U_x, V_x respecto de x , en el punto $z_1 = x_1 + iy_1$. Para eso debemos incrementar x_1 en una cantidad real $h \neq 0$, dejando y_1 constante. Entonces calculemos el incremento de F , en los puntos $x_1 + iy_1 = z_1$, $x_1 + h + iy_1 = z_1 + h$ donde h es un real no nulo. Para calcular F en cada uno de esos puntos, aplicamos la definición (1), ya sea usando la curva Γ_{VH} o la curva Γ_{HV} , según más convenga:

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_{\Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1 + h)} f(z) dz - \int_{\Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1)} f(z) dz \quad (2)$$

Observemos que $\Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1 + h) = \Gamma_{VH}(z_0 \mapsto z_1) + [z_1, z_1 + h]$, donde $[z_1, z_1 + h]$ denota el segmento horizontal que une z_1 con $z_1 + h$, que puede parametrizarse como $z = z_1 + ht$, $t \in [0, 1]$. Luego, de (2) se obtiene:

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_{[z_1, z_1 + h]} f(z) dz = \int_0^1 f(z_1 + th)h dt$$

Dividiendo entre h y haciendo $h \rightarrow 0$, como f es continua $\lim_{h \rightarrow 0} f(z_1 + th) = f(z_1)$, se obtiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} = \int_0^1 f(z_1) dt = f(z_1)$$

de donde, sustituyendo en partes real e imaginaria de $F = U + iV$ y de $f = u + iv$, resulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x_1 + h, y_1) - U(x_1, y_1)}{h} + i \frac{V(x_1 + h, y_1) - V(x_1, y_1)}{h} = u(x_1, y_1) + iv(x_1, y_1)$$

De esa igualdad se deduce que existe el límite de la parte real y el límite de la parte imaginaria. Por definición de derivada parcial respecto de x esos límites son U_x y V_x respectivamente. Se concluye que existen las derivadas parciales de U y V respecto de x en el punto (x_1, y_1) y son

$$U_x = u, \quad V_x = v \quad (3)$$

Calculemos ahora las derivadas parciales U_y, V_y respecto de y , en el punto $z_1 = x_1 + iy_1$. El procedimiento es análogo pero no totalmente igual. Para eso debemos incrementar y_1 en una cantidad real $h \neq 0$, dejando x_1 constante. Entonces calculemos el incremento de F , en los puntos $x_1 + iy_1 = z_1$, $x_1 + i(y_1 + h) = z_1 + ih$ donde h es un real no nulo. Para calcular F en cada uno de esos puntos, aplicamos la definición (1), pero ahora usando la curva Γ_{HV} :

$$F(z_1 + ih) - F(z_1) = \int_{\Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1 + ih)} f(z) dz - \int_{\Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1)} f(z) dz \quad (4)$$

Observemos que $\Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1 + ih) = \Gamma_{HV}(z_0 \mapsto z_1) + [z_1, z_1 + ih]$, donde $[z_1, z_1 + ih]$ denota el segmento vertical que une z_1 con $z_1 + ih$, que puede parametrizarse como $z = z_1 + iht$, $t \in [0, 1]$. Luego, de (4) se obtiene:

$$F(z_1 + ih) - F(z_1) = \int_{[z_1, z_1 + ih]} f(z) dz = \int_0^1 f(z_1 + ith) ih dt$$

Dividiendo entre h y haciendo $h \rightarrow 0$, como f es continua $\lim_{h \rightarrow 0} f(z_1 + ith) = f(z_1)$, se obtiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z_1 + ih) - F(z_1)}{h} = i \int_0^1 f(z_1) dt = if(z_1)$$

de donde, sustituyendo en partes real e imaginaria de $F = U + iV$ y de $f = u + iv$, resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x_1, y_1 + h) - U(x_1, y_1)}{h} + i \frac{V(x_1, y_1 + h) - V(x_1, y_1)}{h} &= \\ &= i(u(x_1, y_1) + iv(x_1, y_1)) = -v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1) \end{aligned}$$

Se concluye que existen las derivadas parciales de U y V respecto de y en el punto (x_1, y_1) y son

$$U_y = -v, \quad V_y = u \quad (5)$$

De (3) y (5) se concluye:

$$\blacksquare U_x = V_y = u, \quad U_y = -V_x = -v \quad \forall z \in D_R(z_0) \quad (6)$$

o sea F verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $D_R(z_0)$.

- Además U_x, U_y, V_x, V_y son continuas en $D_R(z_0)$, porque por (6) cada una de ellas es igual a, ya sea u , ya sea $\pm v$, y por hipótesis $f = u + iv$ es continua.

Como las funciones reales de dos variables reales, que tienen derivadas parciales continuas en un abierto, son diferenciables en todo punto del abierto, se concluye que F cumple la siguiente condición necesaria y suficiente para ser holomorfa en $D_R(z_0)$: sus partes real e imaginaria son diferenciables y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. (Ver teorema 4.1.4.)

Hemos probado que $F \in H(\Omega)$.

En virtud del teorema 4.1.5, la derivada $F'(z)$ de cualquier función holomorfa $F = U + iV$ se expresa en función de su parte real como

$$F'(z) = U_x - iU_y$$

De esta expresión y de (6) se deduce

$$F'(z) = u + iv = f(z) \quad \square$$