8. Consecuencias de la Teoría de Cauchy.

8.1. *Principio del módulo máximo.*

Definición 8.1.1. Sea f una función continua en Ω. Se dice que $|f|$ *tiene un máximo local en* $z_0 \in \Omega$ si existe un disco abierto $D_R(z_0) \subset \Omega$ tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D_R(z_0)$$

Teorema 8.1.2. Principio del módulo máximo. *Sea Ω un abierto conexo y sea $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ tiene algún máximo local en Ω entonces f es constante en Ω.*

Nota: Este principio es un corolario casi inmediato de la desigualdad de Parseval-Plancherel que se verá en el teorema 8.3.2. Se incluye en el párrafo 8.3.4 una demostración del prinicipio del módulo máximo usando esa desigualdad. Sin embargo se incluye aquí una demostración independiente.

Demostración: Si $|f|$ tiene un máximo local en $z_0 \in \Omega$, entonces existe un disco abierto $D_R(z_0) \subset \Omega$ tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D_R(z_0)$$

Sea $r \in (0, R)$ y sea C_r la circunferencia de centro z_0 y radio r, recorrida una sola vez en sentido antihorario. Se cumple $C_r \subset D_R(z_0)$, luego:

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in C_r \quad (1)$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy a la circunferencia C_r se obtiene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Por el teorema de acotación de integrales, sabiendo que $|z - z_0| = r \ \ \forall\, z \in C_r$, y que la longitud de C_r es $2\pi r$, se obtiene:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(z)|}{r}\, |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(z_0)|}{r}\, |dz| = \frac{|f(z_0)|}{2\pi r} \int_{C_r} |dz| = |f(z_0)|$$

Llamemos $I = (1/2\pi) \int_{C_r} (|f(z)|/r)\, |dz|$. Las desigualdades anteriores dicen que $|f(z_0)| \leq I$ y que $I \leq |f(z_0)|$. Entonces $I = |f(z_0)|$. Por lo tanto, sabiendo que $\int_{C_r} |dz| = 2\pi r$

$$0 = |f(z_0)| - I = \frac{1}{2\pi r} \left(\int_{C_r} |f(z_0)|\, |dz| - \int |f(z)|\, |dz| \right) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} (|f(z_0)| - |f(z)|)\, |dz|$$

Parametrizando la circunferencia $C_r : z = z_0 + re^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$, calculando la última integral de la igualdad de arriba, donde $|dz| = |\dot{z}(t)|\, dt = r dt$, se obtiene:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + e^{irt})|)\, dt \quad (2)$$

La integral de la derecha en (2), es la integral de una función real continua y no negativa (debido a la desigualdad (1)). Pero esa integral es 0. Luego la función real en el integrando tiene que ser idénticamente nula. Se deduce que $|f(z)| = |f(z_0)| \ \ \forall z \in C_r$.

Haciendo variar $r \in (0, R)$ se deduce que

$$|f(z)| = |f(z_0)| \quad \forall z \in D_R(z_0) \qquad (3)$$

Hemos probado que el módulo de f es constante en $D_R(z_0)$. Esto implica que f es constante en $D_R(z_0)$ por la proposición 4.1.6. Por el principio de prolongación analítica (ver Corolario 5.2.3), f es constante en Ω. $\square$

Corolario 8.1.3. Otro enunciado del Principio del módulo máximo.
Sea Ω un abierto conexo. Sea $f \in H(\Omega)$. Sea un disco cerrado $\overline{D} \subset \Omega$, y sea $M = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$.
Si f no es constante en Ω entonces el máximo M en $\overline{D}$ se alcanza solamente en la frontera ∂D (es estrictamente mayor que $|f(z)|$ para todo z en el interior D).

Demostración: Por absurdo, si el máximo M de $|f|$ en $\overline{D}$ se alcanzara en un punto z_1 interior a D entonces z_1 sería un máximo local de $|f|$ en Ω y por el teorema 8.1.2, f sería constante. $\square$

8.2. *Otras consecuencias de la Teoría de Cauchy.*

Teorema 8.2.1. Desigualdades de Cauchy. *Sea $f \in H(\Omega)$. Para todo $z_0 \in \Omega$, para todo $R > 0$ tal que $\overline{D_R(z_0)} \subset \Omega$, se cumple*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\, M(R)}{R^n}$$

donde $M(R) = \max_{z \in \overline{D_R(z_0)}} |f(z)|$

Demostración: Por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, siendo C_R la circunferencia de centro z_0 y radio R, se tiene:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

Aplicando el teorema de acotación de integrales, observando que para todo $z \in C_R$ vale $|z - z_0| = R$, y recordando que la longitud de la circunferencia C_R es $2\pi R$, se obtiene:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}}\, |dz| \leq$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_R} \frac{M(R)}{R^{n+1}}\, |dz| = \frac{n!}{2\pi} \frac{M(R)}{R^{n+1}} \int_{C_R} |dz| = \frac{n!}{2\pi} \frac{M(R) 2\pi R}{R^{n+1}} = \frac{n!\, M(R)}{R^n} \quad \square$$

Definición 8.2.2. Un función $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ se llama *entera* si $f \in H(\mathbb{C})$.
Por ejemplo la función $f(z) = e^z$ es entera. Los polinomios en z son funciones enteras.

Teorema 8.2.3. Teorema de Liouville *Si una función entera está acotada entonces es constante.*

Demostración: Fijemos un punto z_0 cualquiera en el plano complejo. Sea K una cota de $|f(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Aplicando la desigualdad de Cauchy para la derivada primera $f'(z_0)$ se obtiene:

$$0 \leq |f'(z_0)| \leq \frac{K}{R} \quad \forall R > 0$$

Luego, tomando $R \to +\infty$ se deduce que

$$f'(z_0) = 0$$

Como el razonamiento anterior es válido cualquiera sea $z_0 \in \mathbb{C}$ que se haya fijado, entonces la derivada f' es idénticamente nula. Luego, por el corolario de la Regla de Barrow, f es constante. $\square$

Teorema 8.2.4. Teorema fundamental del Álgebra.

a) Todo polinomio con coeficientes complejos de grado mayor o igual que 1 tiene alguna una raíz compleja.

b) Todo polinomio con coeficientes complejos de grado $k \geq 1$ tiene exactamente k raíces complejas, contada cada una tantas veces como sea su multiplicidad.

Demostración:

Parte a) Por absurdo, supongamos que el polinomio $P(z) = a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0$, con $a_k \neq 0$, tiene grado $k \geq 1$ y no se anula para ningún $z \in \mathbb{C}$. Entonces la función

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

es entera, porque es el cociente de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ con el denominador que no se anula. Además $f(z)$ no se anula nunca.

Demostremos que $f(z)$ es acotada. En efecto,

$$\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{|a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0|} = 0$$

Entonces, fijo algún $\epsilon > 0$ (por ejemplo $\epsilon = 1$), y por definición de límite cuando $z \to \infty$, existe $R > 0$ tal que

$$|z| \geq R \;\; \Rightarrow \;\; |f(z)| < \epsilon$$

Por lo tanto $|f(z)|$ está acotada (con cota ϵ) fuera del disco cerrado $\overline{D_R(0)}$. Pero en el disco cerrado $\overline{D_R(0)}$, como f es continua, $|f|$ tiene un máximo M. Tomando

$$K = \max\{\epsilon, M\}$$

resulta

$$|f(z)| \leq K \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Por el teorema de Liouville $f(z)$ es constante para todo $z \in \mathbb{C}$. Esa constante no es cero porque $f(z)$ no se anula. Entonces $P(z) = 1/f(z)$ también es constante. Luego, $P(z) = a_0$ y tiene grado cero, contradiciendo la hipótesis de que tiene grado $k \geq 1$.

Parte b) Dado el polinomio $P(z)$ de grado $k \geq 1$, por la parte anterior tiene alguna raíz compleja z_1. Entonces $P(z)$ es divisible entre $z - z_1$. ($P(z)$ se puede bajar por el procedimiento de Ruffini aplicado a $z = z_1$: queda resto nulo y un polinomio cociente $Q_1(z)$ de grado $k - 1$). Resulta

$$P(z) = (z - z_1) Q_1(z) \quad \text{grado } (Q_1(z)) = k - 1$$

Si $k-1 \geq 1$ podemos aplicar el mismo razonamiento a $Q_1(z)$ y resulta

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)Q_2(z) \quad \text{grado } (Q_2(z)) = k - 2$$

donde las raíces z_1 y z_2 no son necesariamente diferentes entre sí.

Se puede repetir el razonamiento anterior exactamente k veces, hasta que el grado de $Q_k(z)$ sea nulo, es decir $Q_k(z) = a$ constante. Resulta

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_{k-1})(z - z_k)a \quad (1)$$

donde las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_k$ pueden estar repetidas. La cantidad de veces que cada raíz aparece en la factorización anterior es la multiplicidad de la raíz. La constante a no es nula porque de lo contrario $P(z)$ sería idénticamente nulo, y no tendría grado $k \geq 1$.

La factorización (1) muestra que $P(z)$ tiene exactamente k raíces complejas, contando cada una con su multiplicidad. $\square$

Teorema 8.2.5. *Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ analítica en $z_0 \subset \Omega$ y sea*

$$D_R(z_0) \text{ tal que } R > 0, \;\; R = \lim \sup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

el disco de convergencia del desarrollo en serie de potencias de f centrado en z_0; es decir

$$R > 0 \text{ es el máximo tal que } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ converge } \forall\, z \in D_R(z_0)$$

Se cumple:

a) Si $D_R(z_0)$ no está contenido en Ω, y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in D_R(z_0) \cap \Omega$, entonces se puede extender f analíticamente a $\Omega_1 = \Omega \cup D_R(z_0)$ como la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \;\forall\, z \in D_R(z_0)$.

b) Si $D_R(z_0)$ está contenido en $\Omega \neq \mathbb{C}$ entonces el radio R es igual a la distancia de z_0 al complemento de Ω.

Demostración: La parte a) es consecuencia del teorema 6.3.5. En efecto, definiendo $f(z)$ como la suma del desarrollo en serie de potencias para todo $z \in D_R(z_0)$, se extiende la función dada $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ analíticamente al conjunto $\Omega \cup D_R(z_0)$. (La extensión está bien definida porque por hipótesis la suma del desarrollo en serie de potencias toma el mismo valor que la función $f(z)$ dada, para todo $z \in D_R(z_0) \cap \Omega$.)

Demostración de la parte b):

Sea $R_0 = \min_{w \notin \Omega} |w - z_0| > 0$, la distancia de z_0 al complemento de Ω. Se observa que $D_{R_0}(z_0) \subset \Omega$.

Enunciamos lo siguiente:

Afirmación: Para todo $z \in D_{R_0}(z_0)$ la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge.

Basta probar la afirmación anterior, pues el radio de convergencia es por definición el máximo R tal que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge para todo $z \in D_R(z_0)$. De la afirmación anterior y de la definición de radio de convergencia se concluye que $R \geq R_0$. Pero como $D_R \subset \Omega$, se tiene $R \leq R_0$. Entonces $R = R_0$ como queríamos demostrar.

Prueba de la afirmación: Sea $z \in D_{R_0}(z_0)$. Se tiene $|z - z_0| = r < r_0 < R_0$, donde r_0 se elige fijo en el intervalo (r, R_0).

Sea $M = \max_{|z-z_0|\leq r_0} |f(z)|$.

Por la parte d) del teorema 5.1.6 y por la desigualdad de Cauchy (teorema 8.2.1) se obtiene:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \leq \frac{M}{(r_0)^n} \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{1}{r^n}$$

De donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

La última serie converge porque es geométrica de razón $0 \leq r/r_0 < 1$. Luego, por el criterio de comparación de series de términos positivos, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ converge; es decir la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente, y por lo tanto converge. □

8.3. *Series de Fourier.*

Definición 8.3.1. Sea $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ que toma valores complejos $g = g(t)$ en función de una variable real t. La función g se llama periódica de período 2π si

$$g(t + 2\pi) = g(t) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo para toda función compleja $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, y todo disco $D_R(z_0) \subset \Omega$, y todo $0 < r < R$, es periódica de período $2pi$ la función:

$$g_r(t) = f(z_0 + re^{it})$$

Si $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ es periódica de período 2π y es continua a trozos, se llaman *coeficientes de Fourier de* g a los números:

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-int}\, dt \quad \forall n \geq 0$$

Teorema 8.3.2. Igualdad de Parseval-Plancherel.

Sea $f \in H(\Omega)$. Para cierto $D_R(z_0)$ denotamos al desarrollo en serie de potencias de f como:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Para todo $0 < r < R$ se cumple:

$$a_n\, r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it})e^{-int}\, dt \ \ \ \forall\, n \geq 0$$

Es decir, $a_n\, r^n$ son los coeficientes de Fourier de la función periódica $g_r(t) = f(z_0 + re^{it})$.

Además

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^{2n} = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(z_0)} |f(z)|^2\, |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2\, dt$$

Esta igualdad se llama de Parseval-Plancherel.

Demostración:
Por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, se cumple:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

Parametrizando la circunferencia $\partial D_r(z_0)$ como $z(t) = z_0 + e^{it}$, $\quad t \in [-\pi, \pi]$ y usando que $a_n = (f^{(n)}(z_0))/n!$ (ver teorema 5.1.6), resulta:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})\, rie^{it}}{(r)^{n+1} e^{i(n+1)t}}\, dz = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int}\, dt$$

De donde

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int}\, dt \qquad (1)$$

quedando probada la primera igualdad del enunciado.

Ahora probemos la igualdad de Parseval-Plancherel:

Multipliquemos la igualdad (1) por $(\overline{a}_n) r^n$, donde $(\overline{a}_n)$ indica el conjugado de a_n. Sabiendo que $|a_n|^2 = a_n\, (\overline{a}_n)$ resulta:

$$|a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) (\overline{a}_n) r^n e^{-int}\, dt \qquad (2)$$

Usaremos el criterio de la mayorante de Weierstrass para demostrar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(z_0 + re^{it}) (\overline{a}_n) r^n e^{-int}$$

converge uniformemente en $t \in \mathbb{R}$.

En efecto, siendo M el máximo de $|f(z)|$ cuando $z \in \partial D_r(z_0)$, resulta:

$$|f(z_0 + re^{it}) (\overline{a}_n) r^n e^{-int}| \leq M |a_n| r^n = A_n \quad \text{independiente de } t \in \mathbb{R}$$

Además la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = M \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, r^n|$$

es convergente porque es la serie de los módulos del desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in D_R(z_0) \quad (3)$$

cuando $z = z_0 + r$ con $0 < r < R$. (Se recuerda que el desarrollo en serie de potencias converge absolutamente en todo punto de $D_R(z_0)$, por el teorema 5.1.6, parte e).)

Aplicando el criterio de la mayorante de Weierstrass se concluye que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(z_0 + re^{it}) (\overline{a}_n) r^n e^{-int} \quad C.U. \text{ en } t \in \mathbb{R}$$

Luego, por el teorema de convergencia uniforme e integración:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it})(\overline{a}_n) r^n e^{-int} \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(z_0 + re^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{a}_n) r^n e^{-int} \right) dt \qquad (4)$$

Se observa que, usando (3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\overline{a}_n) r^n e^{-int} \quad \text{es el conjugado de} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} = f(x_0 + re^{it})$$

Sustituyendo en (2) y en (4) se deduce:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{a}_n) r^n e^{-int} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) \, \overline{f(z_0 + re^{it})} \, dt$$

Deducimos la igualdad de Parseval-Plancherel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, dt \qquad \square$$

Corolario 8.3.3. Serie de Fourier.

Sea $f \in H(\Omega)$ y $D_R(z_0) \subset \Omega$. Para $0 < r < R$, se define la función g periódica de período 2π:

$$g(t) = f(z_0 + re^{it}), \quad t \in \mathbb{R}$$

y se definen sus coeficientes de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \, e^{-int} \, dt$$

Entonces:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esta serie se llama serie de Fourier de g.

La serie de Fourier converge absolutamente y uniformemente en $t \in \mathbb{R}$. Además:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \, dt$$

Demostración: Sea el desarrollo en serie de potencias de f:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \;\; \forall z \in D_R(z_0)$$

Sustituyendo $z - z_0 = re^{it}$ en ese desarrollo, que por el teorema 5.1.6 converge absolutamente y uniformemente en $z \in \partial D_r(z_0)$ se obtiene:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} \qquad (1)$$

que converge absolutamente y uniformemente en $t \in \mathbb{C}$.

Usando el teorema 8.3.2 se tiene

$$c_n = a_n r^n, \qquad |c_n|^2 = |a_n|^2 r^{2n} \qquad (2)$$

Luego, sustituyendo en (1):

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$$

que converge absolutamente y uniformemente en $t \in \mathbb{C}$. Sustituyendo (2) en la igualdad de Parseval-Plancherel del teorema 8.3.2 se deduce:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \, dt \quad \square$$

8.3.4. Otra demostración del principio del módulo máximo, teorema 8.1.2:

Si z_0 es un máximo local de $|f(z)|$, entonces

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \ \ \forall z \in D_R(z_0) \ \ \Rightarrow \ \ |f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)| \ \ \forall\, 0 < r < R, \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Sean $a_n, \quad n \geq 0$ los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de f centrado en z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in D_R(z_0) \qquad (1)$$

Por el teorema 5.1.6, se tiene

$$a_0 = f(z_0)$$

Aplicando la desigualdad de Parseval-Plancherel del teorema 8.3.2, se obtiene:

$$|a_0|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, dt \leq \frac{|f(z_0)|^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = |f(z_0)|^2 = |a_0|^2$$

Luego, todas las desigualdades son igualdades. Restando $|a_0|^2$ se deduce que la siguiente serie de términos no negativos, (sumando en $n \geq 1$) tiene suma nula:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = 0$$

Pero una serie de términos no negativos tiene suma nula solo si todos sus términos son nulos. Entonces $|a_n| r^{2n} = 0$. Como $r > 0$ deducimos que $|a_n| = 0$ para todo $n \geq 1$. Entonces por (1)

$$f(z) = a_0 \ \text{ constante } \quad \forall\, z \in D_R(z_0)$$

Por el principio de prolongación analítica (ver Corolario 5.2.3), f es constante igual a a_0 en el conexo abierto Ω. $\square$