9. Aplicaciones al cálculo de integrales impropias.

Las aplicaciones de la teoría de Cauchy de funciones analíticas para el cálculo de integrales impropias, se puede resumir como sigue:

El objetivo es calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, para una cierta función integrable $f(x)$ de variable real x sabiendo que la integral impropia es convergente, y está definida como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

El procedimiento que resumimos a continuación no es aplicable a cualquier función $f(x)$ dada, pero es aplicable a algunos ejemplos, como los que se exponen en las subsecciones siguientes:

Paso 1) Cuando la función $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ se obtiene restringiendo a $z = x \in \mathbb{R}$ una cierta función $f(z)$ de variable compleja $z \in \mathbb{C}$, se puede completar el segmento $[-R, R]$ en el eje real con un camino de regreso, que puede ser una semicircunferencia S_R de centro en el origen y radio $R > 0$: $S_R : z = z(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$. (Hágase un dibujo).

Se define así una curva cerrada $\gamma_R = [-R, R] + S_R$.

Paso 2) Si la función f cumple las hipótesis correspondientes, podemos aplicar el teorema de Cauchy, o las fórmulas integrales de Cauchy.

Por ejemplo cuando $f(z) = g(z)/(z - z_0)^{k+1}$ para todo $z \neq z_0$ de un abierto Ω que contiene al semiplano $\{Im(z) \ge 0\}$ del plano complejo, (en particular contiene a la región encerrada por γ_R); si $g(z)$ es una función holomorfa en Ω; y si z_0 está en la región encerrada por γ_R, se obtiene:

$$\frac{2\pi i g^{(k)}(z_0)}{k!} = \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{S_R} f(z)\,dz$$

Y tomando límite cuando $R \to +\infty$, suponiendo que existiera el límite de la integral de la derecha, se deduce:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{2\pi i g^{(k)}(z_0)}{k!} - \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz$$

Nota: Quizás haya que descomponer f como suma de varias funciones del tipo $f(z) = g(z)/(z - z_0)^{k+1}$, por ejemplo cuando f es una función racional descompuesta en fracciones simples.

Paso 3) Cuando se cumplen las hipótesis correspondientes, se aplican los lemas de deformación de curvas o el lema de Jordan, detallados en las subsecciones próximas, para calcular el límite de la integral en la semicircunferencia S_R.

9.1. *Lema de deformación de curvas y sus aplicaciones.*

Lema 9.1.1. Lema de deformación de curvas.

Sea $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ *continua. Sea* S_R *el arco de circunferencia* $z = z(t) = Re^{it}$, $\theta_1 \le t \le \theta_2$.

a) Si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = L$ *entonces*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = iL(\theta_2 - \theta_1)$$

b) Si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ *entonces*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

Demostración: La parte b) se deduce de la parte a) usando $L = 0$.
Para probar la parte a) consideramos

$$I_R = \int_{S_R} \frac{zf(z) - L}{z}\, dz = \int_{S_R} f(z)\, dz - L \int_{S_R} \frac{dz}{z}$$

$$I_R = \int_{S_R} f(z)\, dz - L \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}}\, dt$$

$$I_R = \left(\int_{S_R} f(z)\, dz \right) - iL(\theta_2 - \theta_1)$$

Entonces basta probar que $I_R \to 0$ cuando $R \to +\infty$. Acotando la integral I_R se obtiene

$$|I_R| \leq \int_{S_R} \frac{|zf(z) - L|}{|z|}\, |dz| \quad (1)$$

Como por hipótesis $|zf(z) - L| \to 0$ cuando $z \to \infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe R_0 tal que

$$|z| > R_0 \;\Rightarrow\; |zf(z) - L| < \epsilon \quad (2)$$

En (1) sustituimos la última desigualdad (2) , sabiendo que $|z| = R$ para todo $z \in S_R$. Resulta:

$$R > R_0 \;\Rightarrow\; |I_R| \leq \frac{\epsilon}{R} \int_{S_R} |dz| = \frac{\epsilon}{R}(\theta_2 - \theta_1)R = k\epsilon < \epsilon^*$$

donde $k = \theta_2 - \theta_1 \geq 0$ es constante, y dado $\epsilon^* > 0$ se elige $\epsilon > 0$ de modo que $k\epsilon < \epsilon^*$. Luego:

$$\forall \epsilon^* > 0 \;\text{ existe } R_0 > 0 \;\text{ tal que: }\; R > R_0 \;\Rightarrow\; |I_R| < \epsilon^*$$

Por definición de límite, la afirmación anterior dice que $I_R \to 0$ cuando $R \to +\infty$, como queríamos demostrar. $\Box$

Ejemplo 9.1.2. Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2}\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{(x^2 + 4)^2}\, dx$$

Consideremos la curva cerrada orientada en sentido antihorario $\gamma_R = [-R, R] + S_R$ donde $[-R, R]$ es el intervalo en el eje real $-R \leq x \leq R$, y S_R es la semicircunferencia $z = z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{(z - 2i)^2 (z + 2i)^2} = \frac{g(z)}{(z - 2i)^2} \quad (1)$$

donde

$$g(z) = \frac{1}{(z + 2i)^2}$$

es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$.

La curva γ_R es homotópica a un punto en Ω. En la región encerrada por γ_R se encuentra el punto $2i$ donde se anula el denominador de (1). Por la fórmula de Cauchy para las derivadas, se obtiene:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{(z-2i)^2} = 2\pi i\, g'(2i) = 2\pi i \left.\frac{-2}{(z+2i)^3}\right|_{z=2i} = 2\pi i \frac{-2}{(4i)^3} = \frac{\pi}{16} \quad (2)$$

Por otra parte

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \int_{S_R} f(z)\,dz$$

de donde, usando (2), se obtiene:

$$\frac{\pi}{16} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz \qquad (3)$$

Apliquemos ahora el lema de deformación de curvas a la última integral de la derecha en (3):

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{(z^2+4)^2} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

Sustituyendo en (3) se obtiene

$$\frac{\pi}{16} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx \quad \square$$

9.2. *Lema de Jordan y sus aplicaciones.*

Lema 9.2.1. Lema de Jordan (primera versión).

$$0 \leq \int_0^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}\,dt \leq \frac{\pi}{R} \quad \forall\, R > 0$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}\,dt = 0$$

Demostración:

$$\int_0^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}\,dt = \int_0^{\pi/2} e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}\,dt \quad (1)$$

Observemos que $\mathrm{sen}(\pi - t) = \mathrm{sen}\,t \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Luego, haciendo el cambio de variables reales $u = \pi - t$ en la segunda integral de (1) resulta:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}\,dt = -\int_{\pi/2}^{0} e^{-R\,\mathrm{sen}\,u}\,du = \int_0^{\pi/2} e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}\,dt$$

Sustituyendo en (1) resulta:

$$\int_0^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\,\mathrm{sen}\,t}\,dt \quad (2)$$

En lo que sigue hágase un dibujo. Para $t \in [0, \pi/2]$ la gráfica de la función $f(t) = \operatorname{sen} t$ está por arriba de la cuerda (es decir el segmento de recta que une los vértices $(0,0)$ y $(\pi/2, 1)$). Esta cuerda tiene como ecuación $g(t) = (2/\pi)t$. Entonces tenemos $0 \leq g(t) \leq f(t)\ \forall\, t \in [0, \pi/2]$, es decir:

$$0 \leq (2/\pi)t \leq \operatorname{sen} t \quad \forall t \in [0, \pi/2]$$

Luego, para $R > 0$, se tiene

$$e^{-R(2/\pi)t} \geq e^{-R \operatorname{sen} t} \geq 0 \quad \forall t \in [0, \pi/2]$$

Luego, sustituyendo en (2) se obtiene:

$$0 \leq \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R(2/\pi)t}\, dt = -\frac{\pi}{R}\, e^{-R(2/\pi)t}\Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{R}\,(1 - e^{-R}) \leq \frac{\pi}{R}$$

Haciendo $R \to +\infty$ se obtiene:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\, dt = 0 \quad \Box$$

Lema 9.2.2. Lema de Jordan (versión general).

Si $f(z)$ es una función compleja continua para todo z tal que $|z| \geq R_0$, que cumple

$$|f(z)| \leq K \quad \forall\, |z| \geq R_0$$

Entonces:

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z)\, dz \right| \leq \frac{\pi K}{s} \quad \forall\, R \geq R_0$$

donde $s > 0$ es constante y Γ_R es un arco contenido en la semicircunferencia: $z = R\, e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Además si $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ entonces:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z)\, dz = 0$$

Demostración: Sea, para todo $R \geq R_0$ la curva $\Gamma_R : z = R\, e^{it}$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$, con θ_1 y θ_2 que pueden depender de R. Calculando la integral de la tesis:

$$I_R = \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z)\, dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-sR \operatorname{sen} t + isR \cos t} f(Re^{it}) Rie^{it}\, dt$$

Acotando la segunda integral de la igualdad anterior, se deduce:

$$|I_R| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} |e^{-sR \operatorname{sen} t + isR \cos t}|\, |R\, f(Re^{it})|\, dt$$

$$|I_R| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-sR \operatorname{sen} t} |R\, f(Re^{it})|\, dt \leq K_R R \int_0^{\pi} e^{-sR \operatorname{sen} t}\, dt \qquad (1)$$

donde K_R es una cota superior de $|f(z)|$ en el conjunto $|z| = R$.

Luego, aplicando la primera versión del lema de Jordan a la última integral de (1), se deduce que

$$|I_R| \leq K_R R \frac{\pi}{sR} = \frac{\pi K_R}{s} \leq \frac{\pi K}{s} \quad (2)$$

Si además $\text{lím}_{z\to\infty} |f(z)| = 0$, entonces $K_R \to 0$ cuando $R \to +\infty$. Como s es una constante positiva fija, tomando límite en (2) cuando $R \to +\infty$ se deduce:

$$\lim_{R\to+\infty} |I_R| = 0 \quad \square$$

Ejemplo 9.2.3. Calcular

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \lim_{r\to 0} \lim_{R\to+\infty} \int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

Sea $0 < r < R$ fijos.

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por el teorema de Cauchy, su integral a lo largo de todo camino cerrado γ homotópico a un punto en Ω es cero.

En lo que sigue hágase un dibujo. Tomemos como camino γ la suma de las siguientes curvas:

$$\gamma = [r, R] + S_R + [-R, -r] - S_r$$

donde

$[r, R]$ es el segmento que va de r hasta R, en el semieje real positivo.

S_R es la semicircunferencia de centro en el origen y radio R parametrizable como $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, orientada para t creciente.

$[-R, -r]$ es el segmento que va de $-R$ hasta $-r$, en el semieje real negativo.

S_r es la semicircunferencia de centro en el origen y radio r parametrizable como $z(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, orientada para t creciente. Luego $-S_r$ está orientada para t decreciente.

Por el teorema de Cauchy:

$$\int_{[r,R]} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{S_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{[-R,-r]} \frac{e^{iz}}{z}\, dz - \int_{S_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0$$

Luego:

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = i \int_0^\pi e^{ir\cos t - r \operatorname{sen} t}\, dt - i \int_0^\pi e^{iR\cos t - R\operatorname{sen} t}\, dt \qquad (3)$$

En la segunda integral de (3) hacemos el cambio de variable $u = -x$ y resulta:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \int_R^r \frac{e^{-iu}}{u}\, du = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x}\, dx$$

Sustituyendo en (3) resulta:

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\, dx = i \int_0^\pi e^{ir\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t}\, dt - i \int_0^\pi e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}\, dt \qquad (4)$$

Observando que $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\,\mathrm{sen}\, x$, de (4) se deduce:

$$\lim_{r\to 0} \lim_{R\to +\infty} 2i \int_r^R \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\, dx = \lim_{r\to 0} i \int_0^\pi e^{ir\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t}\, dt - \lim_{R\to +\infty} i \int_0^\pi e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}\, dt \qquad (5)$$

Por un lado, la función $e^{ir\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t}$ es continua en el compacto $r \in [0, \epsilon],\ t \in [0, 2\pi]$. Entonces es uniformemente continua. Por lo tanto:

$$\lim_{r\to 0} i \int_0^\pi e^{ir\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t}\, dt = i \int_0^\pi \lim_{r\to 0} e^{ir\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t}\, dt = \pi i \qquad (6)$$

Por otro lado, acotando la última integral de (5) se obtiene:

$$\left| \int_0^\pi e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}\, dt \right| \le \int_0^\pi \left| e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t} \right| dt = \int_0^\pi e^{-R\,\mathrm{sen}\, t}\, dt$$

Usando el Lema de Jordan, la última integral de la igualdad de arriba tiende a cero cuando $R \to +\infty$. Entonces se obtiene:

$$\lim_{R\to +\infty} i \int_0^\pi e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}\, dt = 0 \qquad (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5) se concluye:

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\, dx = \pi i$$

de donde

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

9.3. *Transformada de Fourier.*

Definición 9.3.1. Transformada de Fourier.

Dada una función $f(x)$ de variable real x, se define para aquellos valores de s para los cuales existe el límite siguiente, la transformada de Fourier $F(s)$ de f, como

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r\to +\infty} \int_{-r}^{r} f(x) e^{-isx}\, dx$$

A la transformada F de f se la denota como $\mathcal{F}(f)$. El objetivo de este ejemplo es demostrar el siguiente Teorema:

Teorema 9.3.2. Vector propio de la Transformada de Fourier.

La función $f(x) = e^{-x^2/2},\ x \in \mathbb{R}$ *es un vector propio de la transformada de Fourier con valor propio* 1*, es decir*

$$\mathcal{F}(f) = f, \quad F(s) = e^{-s^2/2} \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$$

Demostración: Dividiremos la demostración en varios pasos:

1. Demostrar que para todo real fijo $r > 0$, y para todo real fijo s, se cumple:

$$\int_{-r}^{r} e^{-x^2/2}\, dx = \int_{\gamma_1} e^{-z^2/2}\, dz + \int_{\gamma_0} e^{-z^2/2}\, dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2/2}\, dz$$

   donde

   γ_1 es el segmento de recta en el plano complejo que une el punto $-r$ con $-r+si$;

   γ_0 es el segmento de recta en el plano complejo que une el punto $-r+si$ con $r+si$;

   γ_2 es el segmento de recta en el plano complejo que une el punto $r+si$ con r.

   En efecto, $\gamma_1+\gamma_0+\gamma_2 = [-r,r]$ donde $[-r,r]$ es el segmento en el eje real que va del punto $-r$ al punto r. Aplicando el teorema de Cauchy, como la función $e^{-z^2/2}$ es analítica en todo el plano complejo, su integral en el segmento $[-r,r]$ es igual a la suma de las integrales en las curvas γ_i, con $i = 0,1,2$.

2. Demostrar que para $i = 1,2$

$$|\int_{\gamma_i} e^{-z^2/2}\, dz| \leq e^{-r^2/2} e^{s^2/2} s$$

   En efecto, en la curva γ_1 parametrizada como $z(t) = -r+it, \ \ t \in [0,s]$, se cumple

$$(-z^2/2) = -(r^2/2) + (t^2/2) + rti \ \ \Rightarrow$$

$$Re(-z^2/2) = -(r^2/2) + (t^2/2) \leq -(r^2/2) + (s^2/2) \quad \forall\, t \in [0,s]$$

   para todo $z \in \gamma_1$. Luego

$$|e^{-z^2/2}| = e^{Re(-z^2/2)} \leq e^{-r^2/2} e^{-s^2/2} \quad \forall\, z \in \gamma_1$$

   Se obtiene

$$|\int_{\gamma_1} e^{-z^2/2}\, dz| \leq \int_{\gamma_1} |e^{-z^2/2}|\, |dz| \leq e^{-r^2/2} e^{s^2/2} \int_0^s dt = e^{-r^2/2} e^{s^2/2} s$$

   Análogamente para la curva $-\gamma_2$ parametrizada como $z(t) = r+it, \ \ \ t \in [0,s]$ se obtiene la misma desigualdad.

3. Usando las partes 1) y 2) y tomando límite con s fijo, cuando $r \to +\infty$, se deduce que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_0} e^{-z^2/2}\, dz$$

4. Probar que

$$\int_{\gamma_0} e^{-z^2/2}\, dz = e^{s^2/2} \int_{-r}^{r} e^{-x^2/2} e^{-ixs}\, dx$$

En efecto, parametrizando γ_0 como $z = x + is, \ \ x \in [-r, r]$ se obtiene:

$$-\frac{-z^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{s^2}{2} - ixs \quad \Rightarrow \quad e^{-z^2/2} = e^{s^2/2} e^{-x^2/2} e^{-ixs}$$

Sustituyendo la última igualdad en la integral, e integrando con el parámetro x variando en el intervalo $[-r, r]$ se obtiene la afirmación 4.

5. De la definición de transformada de Fourier y de las igualdades 3 y 4, se deduce que la transformada de Fourier $F(s)$ de la función

$$f(x) = e^{-x^2/2}$$

cumple

$$(1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = e^{s^2/2} F(s) \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$$

Luego, multiplicando por $e^{-s^2/2}$ se deduce que :

$$F(s) = K e^{-s^2/2}, \text{ donde } K = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx$$

Hemos probado que la función $f(x) = e^{-x^2/2}$ es un vector propio de la transformada de Fourier con valor propio K.

6. Demostrar que el valor propio K de la transformada de Fourier es igual a 1.

Consideremos en el plano, el cuadrado Q_r de centro en el origen y lados paralelos a los ejes con longitud $2r$.

Sea el disco D_r de centro en el origen y radio r y el disco $D_{\sqrt{2}r}$.

Se tiene $D_r \subset Q_r \subset D_{\sqrt{2}r}$. Entonces la integral doble de cualquier función de dos variables no negativa en D_r será menor o igual que en Q_r que a su vez será menor o igual que en $D_{2\sqrt{2}r}$.

Calculamos las integrales dobles siguientes (las de los discos las calculamos pasando a coordenadas polares):

$$\iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy \leq \iint_{Q_r} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy$$

Se obtiene

$$2\pi(1 - e^{-r^2/2}) \leq \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2/2}\, dx \right)^2 \leq 2\pi(1 - e^{-r^2})$$

Haciendo $r \to +\infty$ se deduce que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

Luego el valor propio K definido al final del paso 5 es $K = 1$. $\square$