INTRODUCCION A LA TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras

Notas para el curso de Ecuaciones Diferenciales II de a Licenciatura en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias.
Universidad de la República.
Montevideo, marzo de 1990

INTRODUCCION A LA TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras

INDICE

TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras

Diciembre, 1997.

CAPITULO I
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Sea

$$\dot{x} = X(x,t)$$

una ecuación diferencial ordinaria, con $x \in \mathbb{R}^n$. Es de *primer orden,* porque concierne solo a la función desconocida $x(t)$ y a su primera derivada. La varible x es *espacial* tomando valores en un espacio n-dimensional, llamado *espacio de fases.* Es la variable dependiente. Depende de la variable real t, usualmente el *tiempo.* La dependencia de x en función de t es *desconocida.* La ecuación diferencial es una ley dada X que determina, en función del tiempo t y de la posición espacial x, cuál es la velocidad $\dot{x}$ en el espacio de fases.

Observamos que una ecuación diferencial de orden $k \geq 1$, esto es

$$x^{(k)} = F(x, \dot{x}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k-1)}, t)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, puede reducirse a una de primer orden en el espacio de fases $\mathbb{R}^{kn}$, mediante el cambio de variables: $y = (x, \dot{x}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k-1)})$, obteniendo:

$$\dot{y} = \Big(\dot{x}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k-1)}, F(x, \dot{x}, \ldots, x^{(k-1)}, t)\Big) = X(y,t)$$

Resolver la ecuación diferencial es encontrar la función desconocida $x = x(t)$, que da el punto del espacio de fases en función del tiempo. Debe verificar la ley dada por la ecuación diferencial, es decir: $\dot{x}(t) = X(x(t),t)$, para todo t en algún intervalo.

Bajo ciertas condiciones de regularidad, puede demostrarse que existen soluciones. A pesar de la existencia de soluciones, probada teóricamente, no siempre es posible encontrar explícitamente estas soluciones $x = x(t)$. En este curso veremos cómo estudiar la evolución del sistema sin necesidad de tener explícita la variable espacial x en función del tiempo t. Ese es el propósito de la teoría cualitativa.

En las primeras dos secciones enunciaremos los teoremas de Picard, y de la dependencia continua de las soluciones de las condiciones iniciales y de los parámetros. Suponemos conocidos estos teoremas de los cursos anteriores.

1 Existencia y unicidad de soluciones

Definición 1.1 Sea $\dot{x} = X(x,t)$ una ecuación diferencial ordinaria, donde $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$, Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y $(x,t) \in \Omega$.

Una solución es una función $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$, definida en *un intervalo abierto* $I \subset \mathbb{R}$, tal que:

$$(\varphi(t), t) \in \Omega \text{ para todo } t \in I$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) = X(\varphi(t), t) \text{ para todo } t \in I$$

Nota: Un intervalo es, o bien toda la recta real, o bien una semirrecta, o bien un segmento en la recta real.

Obsérvese que, por definición, la solución está definida en un intervalo abierto. No es solución una función de t que verifica la ecuación diferencial, pero está definida, por ejemplo, en la unión de dos intervalos abiertos disjuntos. Por ejemplo, para la ecuación diferencial $\dot{x} = -x^2$, la función $x(t) = 1/t$, definida para $t \neq 0$, no es solución. Sí son dos soluciones distintas $x(t) = 1/t$, para $t < 0$, y para $t > 0$.

Definición 1.2 Una solución φ *(pasa) por* (x_0, t_0) si $\varphi(t_0) = x_0$. Es decir, la *gráfica* de la solución pasa por el punto (x_0, t_0).

Una solución $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$ que pasa por (x_0, t_0) es *única* cuando cualquier otra solución $\psi : J \mapsto \mathbb{R}^n$ que pasa por (x_0, t_0) verifica $\varphi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in I \cap J$.

Una solución $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$ que pasa por (x_0, t_0) es *maximal* (e I se llama *intervalo maximal*), si toda solución ψ por (x_0, t_0) definida en un intervalo $J \supset I$, y tal que $\varphi = \psi|_I$, verifica $I = J$.

El teorema de Picard da condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones por cualquier punto de Ω.

Definición 1.3 La función $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ es *globalmente lipschitziana en* Ω*, respecto a la variable* x*,* si existe una constante $K > 0$ tal que

$$\|X(x_0,t) - X(x_1,t)\| \leq K\|x_0 - x_1\| \text{ para todo } (x_0,t) \text{ y } (x_1,t) \in \Omega$$

La función $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ es *lipschitziana en* Ω*, respecto a la variable* x*,* si cada punto $(x,t) \in \Omega$ está en algún entorno $V \subset \Omega$ tal que $X|_V$ es globalmente lipschitziana en V.

Si X es diferenciable respecto a x con derivada continua, entonces es lipschitziana respecto a x.

Teorema 1.4 (Picard) *Sea $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ continua y lipschitziana respecto a la primera variable x. Entonces la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x,t)$ tiene, por cualquier $(x_0,t_0) \in \Omega$, una única solución.*

Corolario 1.5 *Si X es continua y lipschitziana respecto a la variable x, entonces la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x,t)$ tiene, por cualquier (x_0,t_0), una única solución maximal.*

Nota: El intervalo maximal de la solución maximal por (x_0, t_0) se denotará como

$$(a_{x_0,t_0}, b_{x_0,t_0})$$

donde a y b son $-\infty, +\infty$, o números reales.

La solución maximal por (x_0, t_0) se denotará como

$$\varphi_{x_0,t_0}$$

Sus valores para cada $t \in (a_{x_0,t_0}, b_{x_0,t_0})$, serán $\varphi_{x_0,t_0}(t)$ o también $\phi(x_0, t_0, t)$.

Teorema 1.6 (Salida de compactos) *Si X es continua en Ω, y si la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x,t)$ tiene para cada $(x_0, t_0) \in \Omega$ una única solución, entonces, dado cualquier compacto $K \subset \Omega$, existen números a y b tales que $t_0 < b < b_{x_0,t_0}$, $a_{x_0,t_0} < a < t_0$, y, para todo $t > b$ o $t < a$, en el intervalo maximal, se cumple*

$$(\varphi_{x_0,t_0}(t), t) \notin K$$

El teorema anterior asegura que las soluciones se prolongan hacia la izquierda y la derecha de t_0, de tal forma que la gráfica se sale de cualquier compacto contenido en Ω.

Consecuencias:

1. Si $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y si $\phi_{x_0,t_0}(t)$ está acotada para $t \geq t_0$, entonces $b_{x_0,t_0} = \infty$. En forma similar, si está acotada para $t \leq t_0$, entonces $a_{x_0,t_0} = -\infty$.

2. Si Ω es cualquier abierto, y si $b_{x_0,t_0} = b$ finito, entonces:

   - o bien, para toda sucesión $t_n \to b^-$, se cumple $\lim(\varphi_{x_0,t_0}(t_n), t_n)$ existe y está en el borde de Ω,
   - o bien $\lim_{t \to b^-} \|\varphi_{x_0,t_0}(t)\| = \infty$.

   El resultado análogo vale cuando a_{x_0,t_0} es finito.

2 Dependencia de las condiciones iniciales y de los parámetros

Sea $\dot{x} = X(x, t, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^p$, una ecuación diferencial ordinaria que depende del parámetro μ. Para cada valor fijo del parámetro $\mu \in \mathbb{R}^p$, se tendrá una ecuación diferencial, que supongamos tiene una única solución maximal por (x_0, t_0). Esta solución maximal, ahora, además de depender de (x_0, t_0), depende del parámetro μ, y es función, como siempre, de la variable t, respecto a la cual verifica la ecuación diferencial. Denotaremos como

$$\phi(x_0, t_0, \mu, t)$$

el valor de la solución maximal en t, por (x_0, t_0), de la ecuación diferencial que se obtiene al fijar el parámetro μ.

Teorema 2.1 *Sea X continua en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, y tal que para cada $(x_0, t_0, \mu) \in \Omega$ existe una única solución maximal $\phi(x_0, t_0, \mu, t)$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x, t, \mu)$.*

Entonces ϕ depende continuamente de x_0, t_0, μ, t en su dominio de definición. Además dicho dominio es abierto.

Ejemplo: Para $x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ sea $\dot{x} = \lambda x^2$. Se tiene

$$\phi(x_0, t_0, \lambda, t) = \frac{x_0}{1 - \lambda(t - t_0)x_0}$$

El intervalo maximal es:

Cuando $\lambda x_0 < 0 : I_{x_0,t_0,\lambda} = (t_0 + 1/\lambda x_0, +\infty)$
Cuando $\lambda x_0 > 0 : I_{x_0,t_0,\lambda} = (-\infty, t_0 + 1/\lambda x_0)$
Cuando $\lambda x_0 = 0 : I_{x_0,t_0,\lambda} = (-\infty, +\infty)$
El dominio de definición de ϕ es $\{(x_0, t_0, \lambda, t) \in \mathbb{R}^4 : t \in I_{x_0,t_0,\lambda}\}$.

3 Lema de Gronwall

El lema de Gronwall, que enunciaremos y demostraremos a continuación, además de ser útil para demostrar el teorema 2.1, permite acotar las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales, y por ese medio, estudiar, en muchos casos, los intervalos maximales.

Lema 3.1 (Gronwall) *Si una función continua real u definida en un intervalo $[t_0, t_1]$ verifica*

$$0 \leq u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ ds$$

con $\alpha \geq 0$ y $k(s) \geq 0$ continua para todo $s \in [t_0, t_1]$, entonces

$$u(t) \leq \alpha \exp \int_{t_0}^{t} k(s)\ ds \ \textit{para todo}\ t \in [t_0, t_1]$$

En particular, si $\alpha = 0$ entonces $u \equiv 0$, y si $k(s)$ es constante $u(t) \leq \alpha e^{k(t-t_0)}$.

Prueba: Supongamos primero que $\alpha \neq 0$. Entonces se tiene $0 < \alpha \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s$, y por hipótesis:

$$0 \leq \frac{u(t)k(t)}{\alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s} \leq k(t)$$

Integrando ambos miembros entre t_0 y t resulta:

$$\log\left(\alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s\right) - \log\alpha \leq \int_{t_0}^{t} k(s)\ \mathrm{d}s$$

de donde

$$\alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s \leq \alpha \exp \int_{t_0}^{t} k(s)\ \mathrm{d}s$$

Como $u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s$, resulta la tesis.

Veamos ahora el caso $\alpha = 0$. Sea $\epsilon_n \to 0$, $\epsilon_n > 0$. Por hipótesis se tiene:

$$0 \leq u(t) \leq \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s < \epsilon_n + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_1]$$

Por lo demostrado antes:

$$u(t) \leq \epsilon_n \exp \int_{t_0}^{t} k(s)\ \mathrm{d}s$$

Fijando t y haciendo $n \to \infty$ resulta $u(t) \leq 0$ ■

4 Ejemplo de estudio cualitativo

Veremos cómo, sin resolver la ecuación diferencial, pueden croquizarse las gráficas de las soluciones:

Sea la ecuación diferencial

$$\dot{x} = t - x^2$$

para $x \in I\!R, t \in I\!R$.

Dibujaremos esquemáticamente en $I\!R^2$ las gráficas de las soluciones maximales $\varphi_{x,0}(t)$ para $x \in I\!R$, y t en el intervalo maximal $I_{x,0}$.

Primero, analicemos el signo de $\dot{x}$. Si $t < x(t)^2$ entonces la gráfica de la solución $x(t)$ es decreciente, porque $\dot{x}(t) < 0$. Si $t > x(t)^2$, la gráfica es creciente. En el punto donde la gráfica corta a la parábola $t = x^2$, hay un mínimo relativo. No toda solución tiene que cortar a esa parábola, pero si lo hace, en el punto de intersección presenta un mínimo relativo, y solo en la intersección con la parábola puede anularse la derivada. Luego, si la corta, no lo puede hacer mas de una vez. Entonces, las soluciones que cortan a la parábola, tienen intervalo maximal infinito hacia la derecha (ya que tiene que salir de cualquier compacto, son crecientes, y no pueden tener asíntota vertical porque están por abajo de la parábola).

Puede demostrarse, a partir de la ecuación diferencial, que todas las soluciones tienen intervalo de definición acotado por la izquierda. También puede probarse que existe una única solución que queda entre el lugar de los mínimos y el lugar de los puntos de inflexión. Y finalmente que todas las soluciones que no cortan la parábola lugar de mínimos, pero que cortan el lugar de los puntos de inflexión tienen intervalo de definición acotado. Para hacer esas demostraciones se compara el segundo miembro de la ecuación diferencial con una función mayor (o menor) que ella, que tenga soluciones fácilmente calculables. Se observa que eso implica que la solución de la ecuación dada, para $t > t_0$ está por abajo (por arriba) de las solución de la otra ecuación diferencial, con mismo dato inicial. Si la de esta otra ecuación tiene asíntota vertical hacia abajo, y la de la ecuación dada está por abajo de ella, entonces la solución buscada también tiene asíntota vertical.

5 Sistemas lineales

Sea en $I\!R^n$ la ecuación

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad t \in I\!R, \ \ x \in I\!R^n$$

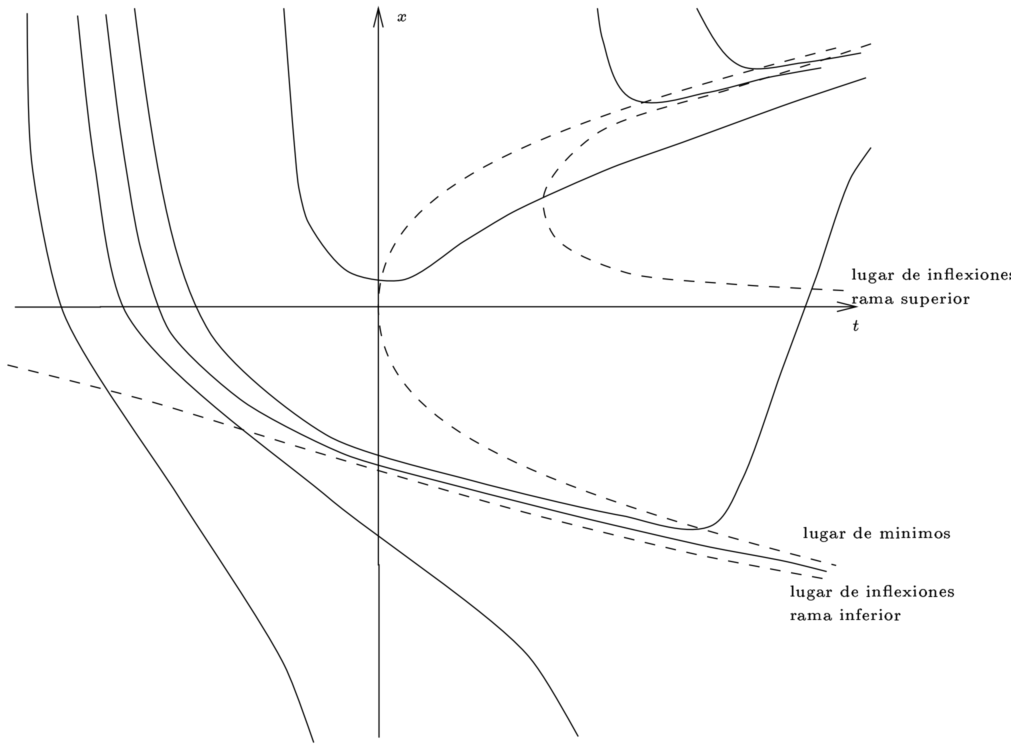


Figura 1: Soluciones de $\dot{x} = t - x^2$

donde $A(t)$ es, para cada $t \in I\!R$, una matriz real $n \times n$, que depende continuamente de t, y $b(t)$ es para cada $t \in I\!R$ un vector de $I\!R^n$ que también depende continuamente de t.

La ecuación anterior se llama *lineal.* Si $A(t)$ es independiente de t, entonces es *a coeficientes constantes.* Si $b(t)$ es nulo para todo t, la ecuación se llama *homogénea.*

Se observa que $A(t)x + b(t)$ es lipschitziana en x, pues

$$\|A(t)x_1 - A(t)x_2\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq \|A(t)\|\|x_1 - x_2\|$$

donde la norma de una matriz A se define como

$$\|A\| = \max\{\|Au\| : u \in I\!R^n, \quad \|u\| = 1\}$$

Entonces, si $v \neq 0$ en $I\!R^n$, se cumple

$$\|Av\| = \|v\| \left\| A\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \leq \|v\|\|A\|$$

Luego, para todo $v \in I\!R^n$ se cumple $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$.

Proposición 5.1 *Las soluciones maximales de la ecuación lineal homogénea (que existen y son únicas para cada condición inicial), están definidas para todo $t \in I\!R$.*

Prueba: La existencia y unicidad de la solución maximal$\varphi_{x_0,t_0}(t)$ por cada punto $(x_0, t_0) \in I\!R^{n+1}$, definida en el intervalo maximal I_{x_0,t_0}. es una consecuencia del teorema de Picard.

Supongamos, por absurdo, que el extremo derecho del intervalo I_{x_0,t_0} sea el número real h. Sea

$$M = \max\{\|A(t)\| : t_0 \leq t \leq h\}, \quad B = \max\{\|b(t)\| : t_0 \leq t \leq h\}$$

Los números reales M y B existen porque $A(t)$ y $b(t)$ dependen continuamente de t, y los máximos se calculan en un intervalo compacto.

Para abreviar llamaremos $x(t) = \varphi_{x_0,t_0}(t)$.

Como $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$, integrando respecto a t, entre t_0 y $t \in [t_0, h)$, se obtiene

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t)x(t) + b(t) \ \mathrm{d}t$$

Luego, para todo $t \in [t_0, b)$:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} M\|x(t)\| \ \mathrm{d}t$$

Por el lema de Gronwall se tiene

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\|e^{M(t-t_0)}, \quad \text{para todo } t \in [t_0, b)$$

Luego, $\|x(t)\| \leq \|x_0\|e^{M(b-t_0)}$

tomando en $I\!R^{n+1}$ el compacto

$$K = \{(x, t) \in I\!R^{n+1} : \|x\| \leq \|x_1\|e^{M(b-t_0)}, \ t_0 \leq t \leq b\}$$

la gráfica de la solución maximal, a la derecha de t_0 no se saldría del compacto K, contradiciendo el teorema de salida de compactos.

Para probar que el extremo izquierdo es $-\infty$ nótese que $x(t)$ definida en (a, h) es solución de $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, solo si $x(-t)$ definida en $(-h, -a)$ es solución de $\dot{y} = -A(-t)y - b(-t)$, que también es una ecuación lineal. Por lo demostrado antes $-a = \infty$. ∎

Definición 5.2 Se llama *matriz fundamental* de la ecuación lineal $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ a una matriz $\Phi(t)$, invertible para todo $t \in I\!R$ y tal que

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \quad \text{para todo } t \in I\!R$$

La igualdad anterior es entre matrices cuadradas $n \times n$, y la matriz $\dot{\Phi}(t)$ es la que se obtiene derivando respecto a t todos los términos de la matriz $\Phi(t)$.

Proposición 5.3 *Si $\Phi(t)$ verifica $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, entonces es fundamental si y solo si*

$$\det \Phi(t_0) \neq 0$$

para algún $t_0 \in I\!R$.

Prueba: Basta demostrar que si $\det \Phi(t_0) \neq 0$ entonces $\det \Phi(t) \neq 0$ para todo t. Esto es una consecuencia inmediata del siguiente teorema. ∎

Teorema 5.4 (Liouville) *Si $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ para todo $t \in I\!R$, entonces*

$$\det \Phi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \textit{traza } A(s)\ ds\right) \det \Phi(t_0)$$

Prueba:
Indicaremos con A_i a la i-ésima fila de la matriz A, con Φ_i a la i-ésima fila de la matriz $\Phi(t)$, y a dichas matrices como

$$A = (A_1, \ldots, A_n), \quad \Phi(t) = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$$

El determinante de una matriz se calcula sumando con signo apropiado, todos los productos que se obtienen de elegir un y solo un término de cada columna y cada fila de la matriz. Si estos términos dependen de t, la derivada del determinante respecto de t se obtiene, por la regla de derivación de un producto, como

$$(\det \Phi(t))^{\cdot} = \det(\dot{\Phi}_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) + \det(\Phi_1, \dot{\Phi}_2, \ldots, \Phi_n) + \ldots + \det(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \dot{\Phi}_n)$$

$$(\det \Phi(t))^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \det(\Phi_1, \ldots, \dot{\Phi}_i, \ldots, \Phi_n)$$

Como, por hipótesis, $\dot{\Phi}_i = A_i\Phi(t)$, resulta que $\dot{\Phi}_i$ es combinación lineal de las filas de $\Phi(t)$. Más precisamente

$$\dot{\Phi}_i = a_{i1}\Phi_1 + \ldots + a_{ii}\Phi_i + \ldots a_{in}\Phi_n$$

donde la fila A_i es $a_{i1}, \ldots, a_{in}$.

Como el determinante de una matriz no cambia al restar de una fila cualquier combinación lineal de las demás, resulta:

$$(\det \Phi(t))^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \det(\Phi_1, \ldots, a_{ii}\Phi_i, \ldots, \Phi_n) = \text{ traza } A(t) \det \Phi(t)$$

Sea

$$f(t) = (\det \Phi(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \text{ traza } A(s)\ \mathrm{d}s\right)$$

Derivando respecto a t se tiene

$$\dot{f}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \text{ traza } A(s)\ \mathrm{d}s\right)((\det \Phi(t)^{\cdot} - (\text{traza} A(t))(\det \Phi(t))) = 0$$

Luego $f(t) = f(t_0)$, es decir

$$\det \Phi(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \text{ traza } A(s)\ \mathrm{d}s\right) = \det \Phi(t_0)$$

como se quería demostrar. ■

Teorema 5.5 *Las soluciones maximales de una ecuación diferencial lineal homogénea $\dot{x} = A(t)x$ forman un espacio vectorial de dimensión n.*

Una matriz $\Phi(t)$ es fundamental si y solo si sus columnas son una base del espacio de soluciones.

La solución que pasa por (x_0, t_0) es $\phi(x_0, t_0, t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$.

Prueba: Si $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación, entonces $\alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ también verifica la ecuación, y es maximal porque está definida para todo t. Luego, las soluciones maximales forman un espacio vectorial. Veamos que tiene dimensión n. Para ello probaremos que las columnas de cualquier matriz fundamental $\Phi(t)$ forman una base del espacio de soluciones.

Sea $\varphi_i(t)$ la columna i-ésima de la matriz $\Phi(t)$. Como $\det \Phi(t) \neq 0$, sus columnas son linealmente independientes para todo t.

Además $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, si y solo si cada columna $\varphi_i(t)$ verifica la ecuación diferencial $\dot{x} = A(t)x$.

Lo anterior prueba que $\varphi_i(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. Falta ver que $\varphi_i(t)$ generan el espacio de soluciones.

Llamemos $x_i = \varphi_i(t_0)$. Como $\det \Phi(t_0) \neq 0$, los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son una base de $\mathbb{R}^n$.

Sea $\phi(x_0, t_0, t)$ una solución. El vector x_0 es combinación lineal de la base de $\mathbb{R}^n$: $x_1, \ldots, x_n$. Es decir: $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Consideremos la función $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t)$ definida para todo t. Es solución de la ecuación diferencial porque las φ_i lo son. En $t = t_0$ toma el valor x_0 porque $\varphi_i(t_0) = x_i$. Por la unicidad, es entonces la solución maximal por (x_0, t_0), es decir

$$\phi(x_0, t_0, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t)$$

Con lo anterior probamos que las columnas de $\Phi(t)$ son una base del espacio de soluciones. Entonces este espacio tiene dimensión n.

Recíprocamente, si una matriz $\Phi(t)$ tiene sus n columnas que son una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea, entonces la matriz verifica $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ (pues sus columnas lo verifican), y su determinante es no nulo (pues sus columnas son linealmente independientes). Es decir, la matriz es fundamental.

Finalmente falta probar que la solución $\phi(x_0, t_0, t)$ es $\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$ En efecto, como $\Phi(t)$ es matriz fundamental, derivando respecto de t a la función $x(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$ se obtiene $\dot{x}(t) = A(t)\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 = A(t)x(t)$. Luego $x(t)$ es solución. Además $x(t_0) = x_0$. Por la unicidad $x(t) = \phi(x_0, t_0, t)$ como queríamos probar. ■

Definición 5.6 Una matriz fundamental $\Phi(t)$ se llama *principal,* si $\Phi(0)$ es la identidad.

Es fácil ver que la matriz principal existe y es única.

En la última parte del teorema anterior se enuncia como resolver totalmente la ecuación lineal homogénea, teniendo una matriz fundamental. En particular, si la metriz fundamental es la principal, entonces cualquier solución $x(t)$ se obtiene como $\Phi(t)x(0)$.

Resolvamos ahora la ecuación lineal no homogénea.

Teorema 5.7 (Variación de constantes) *Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental.*

La solución de la ecuación

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

que en $t = t_0$ toma el valor x_0 es

$$\phi(x_0, t_0, t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)\ ds$$

Prueba: La solución de la homogénea, por el teorema anterior es $\Phi(t)C$ donde C es un vector de $\mathbb{R}^n$ independiente de t.

Busquemos ahora soluciones de la ecuación no homogénea, sustituyendo el vector constante C por un vector $u(t)$ a determinar. Es decir probemos con

$$x(t) = \Phi(t)u(t)$$

Derivando respecto a t y sustituyendo en la ecuación diferencial no homogénea, se tiene:

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t)u(t) + \Phi(t)\dot{u}(t) = A(t)\Phi(t)u(t) + \Phi(t)\dot{u}(t) = A(t)x(t) + \Phi(t)\dot{u}(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

Luego

$$\dot{u}(t) = \Phi(t)^{-1}b(t)$$

Integrando respecto de t entre t_0 y t, se obtiene:

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)\ \mathrm{d}s$$

Como $u(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}x_0$, se tiene:

$$x(t) = \Phi(t)\left(\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)\ \mathrm{d}s\right)$$

■

6 Sistemas lineales a coeficientes constantes.

Matriz exponencial.

En los cursos de ecuaciones diferenciales básicos se demuestra que la matriz principal de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = Ax$$

donde A es una matriz $k \times k$ de términos constantes (independientes de t), es la matriz exponencial e^{At}, donde

$$e^{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

(En esta serie A^0 es por definición la matriz identidad).

Esta serie converge absolutamente (es decir converge la serie de la normas, porque está mayorada por la serie de términos positivos $\|A\|^n/n!$), y por lo tanto converge en el espacio normado de matrices $k \times k$, cualquiera sea la matriz A.

Consideremos

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

Por lo anterior, converge (y lo hace absolutamente) cualquiera sea la matriz A y cualquiera sea el número real t. Además, usando el criterio de la mayorante de Weierstrass, no es complicado demostrar que la serie de las derivadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = Ae^{At}$$

converge uniformemente en cualquier intervalo $[-K, K]$, cualquiera sea $K > 0$. Entonces, su suma es igual a la derivada de la matriz $e^A t$, y esto vale para cualquier t real (ya que dado t puede elegirse K de modo que $t \in [-K, K]$).

Entonces $(e^{At})^{\cdot} = Ae^{At}$, para todo t real. Teniendo en cuenta que e^{A0} es la identidad, se deduce que:

Teorema 6.1 *e^{At} es la matriz principal de la ecuación $\dot{x} = Ax$.*

Cálculo de la matriz exponencial.

Es fácil verficar, a partir de la definición de matriz exponencial, que si Λ es una matriz diagonal con valores propios λ_i, entonces $e^{\Lambda t}$ es también una matriz diagonal, formada por las funciones $e^{\lambda_i t}$ en la diagonal principal.

También es fácil verificar que si N es una matriz nilpotente de orden p (esto es, N^p es la matriz nula, siendo p el mínimo natural para el cual esto ocurre), esntonces e^{Nt} es una matriz polinómica en t de grado $p-1$ (todos los términos son polinomios en t de grado máximo $p-1$).

Dada una matriz cuadrada A, existe un cambio de base, tal que A es semejante a la forma canónica de Jordan J, es decir $A = PJP^{-1}$. Esto implica que $(At)^n = P(Jt)^n P^{-1}$, y aplicando la definición de matriz exponencial

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

La forma canónica de Jordan J está compuesta por bloques cuadrados $B_1, B_2, \dots, B_m$, ubicados a lo largo de la diagonal, siendo los demás términos nulos. Se observa que entonces J^n también está formada por bloques cuadrados, del mismo tamaño que los de J, que son $B_1^n, B_2^n, \dots, B_m^n$, y aplicando la definición de matriz exponencial, resulta que:

La matriz e^{Jt} está formada por los bloques cuadrados $e^{B_1 t}, e^{B_2 t}, \dots, e^{B_m t}$.

Cada bloque B_i de la forma canónica de Jordan es igual a $\lambda_i I + N_i$, siendo λ_i un valor propio de A (real o complejo), I la matriz identidad y N_i una matriz nilpotente de orden p_i (igual al tamaño del bloque).

Se observa que tanto la matriz $e^{(\lambda I + N)t}$ como la matriz $e^{\lambda t}e^{Nt}$ son matrices principales de la ecuación $\dot{x} = (\lambda I + N)x$. Por la unicidad de la matriz principal, se obtiene entonces que:

Descomponiendo cada bloque B en $\lambda I + N$, se cumple $e^{Bt} = e^{\lambda t}e^{Nt}$ siendo e^{Nt} una matriz polinómica en t de grado igual al tamaño del bloque menos uno.

Sistemas lineales no homogéneos, a coeficientes constantes

Sea el sistema

$$\dot{x} = At + b(t)$$

donde A es una matriz de términos constantes (independientes de t).

Por lo visto en la sección anterior, se tiene la solución general

$$\phi(x_0, t_0, t) = e^{At}(e^{At_0})^{-1}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t}(e^{As})^{-1}b(s)\,ds$$

Por un lado se tiene que la identidad I es la matriz principal de la ecuación $\dot{x} = 0$. Por otro, se verifica que también las matrices $e^{At}e{-}At$ y $e^{-At}e^{At}$ son la matriz principal. Entonces la inversa de e^{At} es $e^{-At} = e^{A(-t)}$. Es decir para invertir la matriz exponencial e^{At} basta sustituir t por $-t$.

Repitiendo el razonamiento, las matrices $e^{A(t-t_0)}$ y $e^{At}e^{-At_0}$ verifican la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ y en $t = t_0$ coinciden. Por la unicidad de la solución deben coincidir.

Reuniendo lo anterior se tiene:

La solución de $\dot{x} = Ax + b(t)$, con dato inicial (t_0, x_0) es

$$\phi(x_0, t_0, t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{A(-s)}b(s)\,ds$$

Estabilidad de los sistemas lineales

Dada una ecuación diferencial $\dot{x} = X(x,t)$ tal que existe solución única por (t_0, x_0), llamemos $x(t)$ a esa solución, y supongamos que está definida por lo menos para todo $t \geq t_0$.

Definición 6.2 Se dice que la solución $x(t)$ es *estable* (en el futuro, en el sentido de Liapunov), si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta$ implica que existe solución única $y(t)$ por t_0, y_0, definida por lo menos para $t \geq t_0$, y se cumple $\|y(t) - x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Se dice que la solución $x(t)$ es *inestable* si no es estable.

Se dice que la solución $x(t)$ es *asintóticamente estable* (en el futuro, en el sentido de Liapunov), si es estable y además existe $\rho > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \rho$ implica que $\|y(t) - x(t)\| \to_{t\to\infty} 0$.

Estas definiciones se pueden aplicar en particular a los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial (es decir, a las soluciones constantes $x(t) = x_0$ para todo t real).

Teorema 6.3 *Todas las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax + b(t)$ tienen la misma estabilidad. (Es decir, o bien son todas estables, o bien son todas inestables, y si son estables, entonces o bien son todas asintóticamente estables, o bien no lo es ninguna).*

Prueba:

Basta demostrar que la estabilidad de una solución $x(t)$ cualquiera es la misma que la del punto de equilibrio 0 del sistema homogéneo $\dot{x} = Ax$. Para ello basta observar que dada la solución $x(t)$ de la ecuación $\dot{x} = Ax + b(t)$, una segunda función $y(t)$ es también solución si y solo si $z(t) = y(t) - x(t)$ es solución de $\dot{x} = Ax$. Como la norma de $y(t) - x(t)$ es igual a la norma de $z(t) - 0$, basta aplicar las definiciones para obtener que $x(t)$ es solución estable (asintóticamente estable, inestable) de la ecuación $\dot{x} = At + b(t)$, si y solo si 0 lo es de la ecuación $\dot{x} = Ax$. ■

Ahora veamos cómo la estabilidad del sistema lineal se puede deducir de los valores propios de A:

Teorema 6.4 *Sea la ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes: $\dot{x} = Ax + b(t)$.*

Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, entonces las soluciones son asintóticamente estables (hacia el futuro, según Liapunov).

Si alguno de los valores propios de A tiene parte real positiva, entonces las soluciones son inestables (hacia el futuro según Liapunov).

En el caso que resta, es decir, si todos los valores propios de A tienen parte real menor o igual que cero, y alguno tiene parte real 0, entonces las soluciones son estables pero no asintóticamente (en el futuro, según Liapunov), si la multiplicidad geométrica de todos los valores propios con parte real nula, es igual a la multiplicidad algebraica respectiva. En caso contrario, es decir, si para algún valor propio con parte real nula, las multiplicidades geométrica y algebraica son diferentes, entonces la soluciones son inestables.

Prueba:

Basta estudiar la estabilidad de 0 en el sistema homogéneo $\dot{x} = Ax$, siendo $A = PJP^{-1}$, con J (quizás matriz compleja) la forma canónica de Jordan de A. Haciendo el cambio de variables $x = Py$, se obtiene el sistema equivalente $\dot{y} = Jy$. Como un sistema se obtiene del otro mediante un cambio de variables que deja fijo al punto de equilibrio 0, la estabilidad de ambos sistemas es la misma. Como las matrices A y J son semejantes, sus valores propios, y sus multiplicidades geométricas y algebraicas son la misma. Entonces basta demostrar el teorema para la matriz J en lugar de A.

La solución de $\dot{x} = Jx$ es $x(t) = e^{Jt}x_0$. Si la norma de la matriz e^{Jt} está acotada para todo $t \geq 0$, entonces $\|x(t)\| \leq K\|x_0\|$ para todo $t \geq 0$, donde K es una constante positiva. Dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta = \epsilon/K$ para verificar que se cumple la definición de estabilidad del 0.

Sabiendo que 0 es estable, como $x(t) = e^{Jt}x_0$, entonces 0 es asintóticamente estable si y solo si la matriz e^{Jt} tiende a la matriz nula, cuando t tiende a $+\infty$.

Por otro lado, si existe algún término (en la fila i y columna j) de la matriz e^{Jt}, que en módulo tiende a $+\infty$, podemos elegir un vector x_0 con su componente j-ésima no nula (que puede elegirse con norma tan pequeña como se desee). Se obtiene que el producto $x(t) = e^{Jt}x_0$ tiene su término i-ésimo que tiende, en módulo, a infinito. Entonces no se cumple que $\|x(t)\|$ es menor que ϵ para todo $t > 0$, a pesar que x_0 pudo elegirse con norma menor que cualquier δ. Esto implica que 0 es inestable (hacia el futuro).

Resumiendo, si todos los términos de la matriz e^{Jt} están acotados para $t \geq 0$, entonces 0 es estable (en el futuro). Siendo 0 estable, entonces es asintóticamente estable si y solo si todos los términos de e^{Jt} tienden a cero cuando t tiende a infinito. Por otro lado si algún término de e^{Jt} tiende en módulo a infinito, cuando t tiende a infinito, entonces 0 es inestable.

Ahora analicemos la matriz e^{Jt} calculada más arriba. Todos los términos de ella son de la forma $e^{\lambda_i t}p_{i,j}(t)$ donde λ_i es un valor propio de J, y $p_{i,j}(t)$ es un polinomio de grado máximo igual al tamaño del bloque de Jordan al que pertence, menos uno.

Entonces, si todos los valores propios de J tienen parte real negativa, todos los términos de la matriz e^{Jt} tienden a cero cuando t tiende a infinito, y por lo tanto están acotados para $t \geq 0$. Por lo visto antes esto implica la estabilidad asintótica del 0.

Si algún valor propio de J tiene parte real positiva, existe un término de e^{Jt} que tiende, en módulo, a infinito, cuando t tiende a infinito. Por lo visto antes, esto implica la inestabilidad del punto de equilibrio.

Finalmente, en los casos que quedan, observemos que los términos de la matriz e^{Jt} que corresponden a valores propios con parte real negativa (si los hubiera), están acotados para $t \geq 0$, y que los términos que corresponden a valores propios con parte real nula, no tienden nunca a cero, y están acotados si y solo si los polinomios $p_{i,j}$ tienen todos grado cero. En caso contrario tienden a infinito. Como el grado máximo de esos polinomios es igual al tamaño del bloque menos uno, obtenemos que 0 es estable, pero no asintóticamente, si todos los bloques de Jordan de los valores propios con parte real nula tienen tamaño uno. Si alguno tiene tamaño mayor que uno, entonces el 0 es inestable.

Pero, la cantidad de bloques de Jordan para cada valor propio es igual a la multiplicidad geométrica del valor propio (porque para cada bloque hay una sola dirección de vectores propios). Además la multiplicidad algebraica es igual a la cantidad de veces que aparece el valor propio en la diagonal de J. Entonces los bloques asociados a un valor propio, tienen todos tamaño uno si y solo si la multiplicidad geométrica es igual a la algebraica, para ese valor propio. ■

Bibliografía:
J.SOTOMAYOR Licoes de equacoes diferenciais ordinarias. IMPA Río de Janeiro.
CODDINGTON-LEVINSON Theory of ordinary differential equations.

EJERCICIOS

1. Encontrar ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias con soluciones maximales en intervalos del tipo $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, b)$ y $(a, +\infty)$.

2. Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x,t)$ con X de clase C^1 (es decir, continua, diferenciable y con derivada primera continua), definida en $\Omega \subset I\!R^n \times I\!R$, con valores en $I\!R^n$. La única solución maximal por (x_0, t_0) se denota como $\varphi(x_0, t_0, t)$. La derivada respecto a x_0 se denota como $\varphi'(x_0, t_0, t)$. Es una matriz $n \times n$, cuyo término general $a_{i,j}$ depende de x_0, t_0, t, y es la derivada parcial de la i-ésima componente de φ respecto a la $j$ésima componente de x_0.

   Demostrar que la matriz $\varphi'(x_0, t_0, t)$ verifica:

   a La ecuación diferencial $\dot{Y} = J(t)Y$, donde $J(t)$ es la matriz jacobiana de X, es decir $J(t) = X'(x,t)|_{x=\varphi(x_0,t_0,t)}$, $X'(x,t)$ indica la matriz $n \times n$ derivada de X respecto a x, con t fijo.

   b La condición inicial $\varphi'(x_0, t_0, t_0) = Id$.

3. Con la notación del ejercicio anterior:

   Probar que la función real $f(x_0, t_0, t) = \det(\varphi'(x_0, t_0, t))$, verifica

   a La ecuación diferencial $\dot{f} = a(t)f$, donde $a(t) =$ traza $J(t)$.

   b La condición inicial $f(x_0, t_0, t_0) = 1$

   Sugerencia: Si $A(t)$ es una matriz cuadrada cuyos términos son funciones derivables de t, entonces $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det A(t))$ es la suma de los determinanates de las matrices que se obtienen sustituyendo cada columna de A por su derivada. Si $A(t)$ verifica la ecuación diferencial $\dot{Y} = JY$, entonces cada columna de $A(t)$ verifica $\dot{y} = Jy$.

4. En $I\!R$ sean las ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x,t), \quad \dot{y} = g(y,t)$$

   con f y g continuas y lipchitzianas definidas en un mismo abierto $\Omega \subset I\!R \times I\!R$.

   Sean $\varphi(x_0, t_0, t)$ y $\psi(x_0, t_0, t)$ sus respectivas soluciones maximales.

a) Probar que si $f(x,t) > g(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega$, entonces

$$\varphi(x_0,t_0,t) > \psi(x_0,t_0,t) \quad \text{para todo } t > t_0$$

$$\varphi(x_0,t_0,t) < \psi(x_0,t_0,t) \quad \text{para todo } t < t_0$$

t tal que ambas soluciones estén definidas.

b) Probar que si $f(x,t) \geq g(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega$, entonces

$$\varphi(x_0,t_0,t) \geq \psi(x_0,t_0,t) \quad \text{para todo } t > t_0$$

$$\varphi(x_0,t_0,t) \leq \psi(x_0,t_0,t) \quad \text{para todo } t < t_0$$

t tal que ambas soluciones estén definidas.
(Sugerencia: Elegir $f_\lambda \to f$ tal que $f_\lambda > f$).

5. Investigar si es cierta la proposición siguiente:
Sea $u(t)$ una función real continua definida para $t \in [t_0, t_1]$ tal que:

$$u(t) \geq \alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s \geq 0$$

donde $k(s) \geq 0$ es continua para todo $s \in [t_0, t_1]$.
Entonces

$$u(t) \geq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} k(s)\ \mathrm{d}s\right), \qquad \text{para todo } t \in [t_0, t_1]$$

6. Sea $A(t)$ una matriz $n \times n$ que está definida para todo t real y depende continuamente de t. Sabiendo que $A(t)$ y $A(s)$ conmutan para todos t y s reales, probar que

$$e^{\int_0^t A(s)\,ds}$$

es la matriz principal del sistema $\dot{x} = A(t)x$. Sugerencia: Si $\dot{B}(t)B(t) = B(t)\dot{B}(t)$ para todo t, entonces la derivada de $e^{B(t)}$ es $\dot{B}e^{B(t)}$.

7. Sea $A(t)$ una matriz $n \times n$ que está definida para todo t real y depende continuamente de t.

a) Se define $\|A(t)\| = \sup\{\|Ax\| : x \in R^n, \|x\| = 1\}$. Demostrar que $\|A(.)\| : r \mapsto R$ es continua.
Sea $\dot{x} = A(t)x$.

b) Verificar que $\|x(t)\| \leq \|x(0)\| + \int_0^t \|A(s)\|\|x(s)\|\,ds$ para todo $t > 0$.

c) Probar que

$$\|x(t\| \leq \|x(0)\|e^{\int_0^t \|A(s)\|\,ds}$$

8. Se da $\dot{x} = A(t)x$, con $A : (a,b) \subset R \mapsto M^{n\times n}$. ¿Cuál es el intervalo maximal de las soluciones?

9. Demostrar que la matriz principal en t_0 de un sistema lineal $\dot{x} = A(t)x$ es única. (Se define por las condiciones $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ y $\Phi(t_0)$ igual a la identidad.

TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras.

Diciembre de 1997.

CAPITULO II
ECUACIONES DIFERENCIALES AUTONOMAS

Una ecuación diferencial ordinaria es *autónoma* si el segundo miembro es independiente de t, es decir, la ecuación es de la forma:

$$\dot{x} = X(x)$$

Dicho de otra forma, la velocidad $\dot{x}$ depende de la posición x, (y esta posición, aunque en forma desconocida, va variando en cada instante), pero la ley conocida X que da la velocidad en función de la posición, es la misma en todo instante t. La ley que gobierna el sistema es invariante en el tiempo.

Cualquier ecuación no autónoma $\dot{x} = X(x,t)$ puede llevarse a una ecuación autónoma en otro espacio. En efecto, haciendo el cambio de variables $y = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, se obtiene $\dot{y} = (X(y), 1) = Y(y)$.

1 Trayectorias u órbitas

Sea la ecuación autónoma

$$\dot{x} = X(x) \qquad X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

Ahora Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Si X es continua y lipschitziana, indicamos con I_{x_0,t_0} al intervalo maximal de la solución por (x_0, t_0), y, como antes, $\varphi_{x_0,t_0}(t)$ al valor en t de la solución maximal por (x_0, t_0), para cualquier $t \in I_{x_0,t_0}$. Se tiene $\varphi_{x_0,t_0}(t_0) = x_0$.

Proposición 1.1 *Cuando la ecuación es autónoma, se cumple*

$$I_{x_0,t_0} = t_0 + I_{x_0,0}$$

y para todo t en ese intervalo

$$\varphi_{x_0,t_0}(t) = \varphi_{x_0,0}(t - t_0)$$

Prueba: Sea $t \in t_0 + I_{x_0,0}$. Se cumple

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{x_0,0}(t-t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\varphi_{x_0,0}(t')\right|_{t'=t-t_0} = X\left(\varphi_{x_0,0}(t-t_0)\right)$$

porque $\varphi_{x_0,0}$ es solución de la ecuación diferencial.

Luego $\varphi_{x_0,0}(t-t_0)$, definida para $t \in t_0 + I_{x_0,0}$, verifica la ecuación diferencial. Además, en $t = t_0$ toma el valor $\varphi_{x_0,0}(0) = x_0$. Por la unicidad de la solución por (x_0, t_0) se tiene

$$\varphi_{x_0,0}(t-t_0) = \varphi_{x_0,t_0}(t)$$

y por definición de intervalo maximal $t_0 + I_{x_0,0} \subset I_{x_0,t_0}$.

Por otra parte $I_{x_0,0}$ es el intervalo maximal de $\varphi_{x_0,0}$. Para todo $t' \in -t_0 + I_{x_0,t_0}$, la función $\varphi_{x_0,t_0}(t'+t_0)$ verifica la ecuación diferencial y para $t' = 0$ toma el valor x_0. Por la definición de intervalo maximal $-t_0 + I_{x_0,t_0} \subset I_{x_0,0}$

■

Consecuencia:

La gráfica de la solución maximal por (x_0, t_0) se obtiene trasladando horizontalmente según t_0, la gráfica de la solución maximal por $(x_0, 0)$. Ver figura 1.

Denotamos con $\phi(x_0, t)$ a la solución maximal $\varphi_{x_0,0}(t)$ por $(x_0, 0)$, para todo $x \in \Omega, t \in I_{x_0,0}$, y a este intervalo maximal lo escribimos como $I_{x_0} = I_{x_0,0}$. Obsérvese que $\phi(x_0, 0) = x_0$.

En virtud de la proposición anterior, conociendo $\phi(x_0, t)$, es decir la solución maximal por $(x_0, 0)$ para cualquier $x_0 \in \Omega$, se conocen todas las soluciones maximales, ya que la que pasa por (x_0, t_0) es $\phi(x_0, t - t_0)$.

Proposición 1.2

$$\phi(x_0, t + t_0) = \phi\left(\phi(x_0, t_0), t\right)$$

para todo $x_0 \in \Omega$, para todo $t_0 \in I_{x_0}$ y para todo t tal que $t + t_0 \in I_{x_0}$.

Prueba: $\phi(x_0, t + t_0)$ es solución de la ecuación diferencial y para $t = 0$ toma el valor $\phi(x_0, t_0)$. Por la unicidad de la solución maximal es $\phi(\phi(x_0, t_0), t)$. ■

La solución maximal por $(x_0, 0)$ es $\phi(x_0, t)$. Hasta ahora nos referimos a la gráfica de la solución, es decir, a los puntos $(\phi(x_0, t), t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ para $t \in I_{x_0}$. Cuando el sistema es autónomo, suele representarse gráficamente la solución omitiendo la variable t, en lo que se llama trayectoria, u órbita.

Definición 1.3 Dado $x_0 \in \Omega$, se llama *trayectoria u órbita por x_0* a la curva paramétrica en $\mathbb{R}^n$: $\phi(x_0, t)$, $t \in I_{x_0}$, con x_0 fijo, y t parámetro.

Mientras en la gráfica una coordenada indica el valor de la variable t, en la órbita esta variable no aparece. La órbita es una curva que se orienta según valores crecientes de t, pero del punto de la curva no puede deducirse en qué tiempo t se obtuvo.

También se llama trayectoria u órbita, por simplicidad, al conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ recorrido de la función $\phi(x_0, t)$ al variar t, con x_0 fijo.

La órbita es la proyección sobre $\mathbb{R}^n$ de la gráfica que está en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, proyectándola según el eje de los t.

La órbita por x_0 se denota como $o(x_0)$.

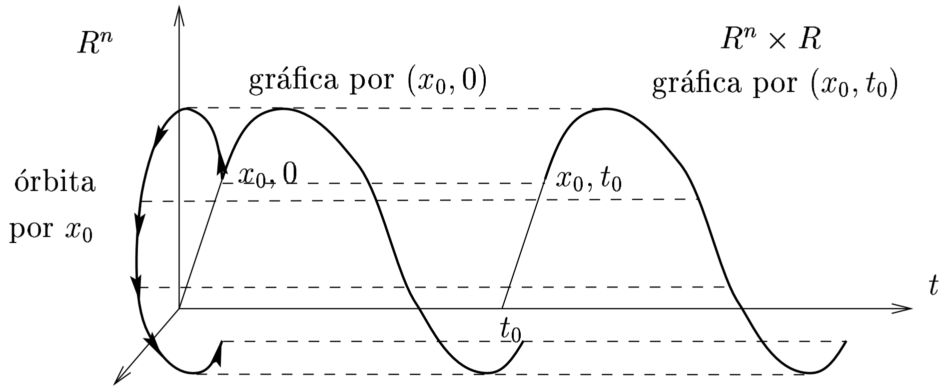


Figura 1: Gráficas de dos soluciones que se proyectan sobre la misma órbita

Teorema 1.4 *Si el sistema es autónomo, dos órbitas cualesquiera o bien son disjuntas o bien coinciden.*

Prueba: Si no son disjuntas, existen x_0, t_0, x_1, t_1 tales que $\phi(x_0, t_0) = \phi(x_1, t_1)$.
Debido a la proposición 1.2, se tiene

$$\phi(x_0, t) = \phi(\phi(x_0, t_0), t - t_0) = \phi(\phi(x_1, t_1), t - t_0) = \phi(x_1, t_1 - t_0 + t)$$

Luego, todo punto de la órbita por x_0 es punto de la órbita por x_1. Simétricamente, todo punto de la órbita por x_1 es punto de la órbita por x_0. ∎

Definición 1.5 Se llama *flujo, o sistema dinámico* asociado a la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$, $\quad X : \Omega$ abierto de $I\!R^n \mapsto I\!R^n$, a la familia de órbitas por los puntos $x_0 \in \Omega$.

Nota: Dada la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$, la velocidad $\dot{x}$, es el vector tangente a la órbita $x = x(t)$. Es decir, sin resolver la ecuación, conocemos, por cada punto del espacio x, el vector tangente $X(x)$ a las órbita. Resolver la ecuación equivale a encontrar las órbitas, o sea, a encontrar las curvas en el espacio que son tangentes al vector dado $X(x)$ por cada punto x por donde pasan.

Muchas veces esta observación permite, sin resolver la ecuación diferencial, tener los datos cualitativos sobre el comportamiento de sus soluciones. Por ejemplo, sin resolver la ecuación, dibújense las órbitas de la ecuación diferencial $\dot{x} = -x$ en $I\!R^2$. (Ver figura 2).

Por otro lado, dada una familia de curvas paramétricas diferenciables, tales que por cada punto x_0 de Ω pasa una y solo una curva de esta familia, existe una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$ que tiene a esa familia como sistema dinámico asociado. Basta elegir en cada $x \in \Omega$ un vector $X(x)$, tangente en x a la curva que pasa por x, orientado según el parámetro t creciente. (No resulta necesariamente $X(x)$ continua y menos lipschitziana). Algunas veces, para suministrar ejemplos, en vez de dar explicitamente la ecuación diferencial, daremos el “dibujo”de su flujo asociado.

Nota: Debido al teorema de Picard, por todo punto de Ω pasa alguna órbita. Debido al teorema 1.4, pasa una sola órbita por cada punto. El flujo es tal que dos órbitas distintas no se cortan.

Nótese que si $\phi(x_0, t) =$ constante, para todo t, entonces la órbita por x_0 se reduce al punto x_0. Por ejemplo la ecuación diferencial $\dot{x} = -x$, en $\mathbb{R}^2$, tiene como flujo asociado, el sistema de órbitas formado por el punto $(0,0)$, y las semirrectas *abiertas* , con extremo en $(0,0)$, que se recorren, para t creciente, acercándose a $(0,0)$ sin alcanzarlo nunca.

2 Ecuaciones diferenciales en superficies

Vimos que dar la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es dar en cada punto $x \in \Omega$ el vector $X(x) \in \mathbb{R}^n$. Esta función X se llama *campo* en Ω. El flujo asociado es el sistema de curvas (órbitas) tangentes al campo dado X en cada punto x por donde pasan.

Veamos cómo este concepto se puede extender a superficies S contenidas en $\mathbb{R}^n$, en lugar de abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. En muchos ejemplos de aplicación práctica, el espacio de fases no es todo R^n, ni un abierto Ω de R^n, sino ciertos subconjuntos de R^n, no abiertos, con una estructura geométrica. Por ejemplo: una superficie esférica, o cilíndrica, o un toro, u otros objetos geométricos de dimensión $k \leq n$ contenidos en $\mathbb{R}^n$, llamados *variedades* .

Primero veamos la definición de superficie encajada en $\mathbb{R}^n$. Nos basaremos en la existencia de ciertas transformaciones (parametrizaciones de dos parámetros) diferenciables. Recordemos que para definir diferenciabilidad de una transformación de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, en un punto $x \in \mathbb{R}^n$, se requiere poder calcular incrementos de la transformación al variar x según cualquier dirección en $\mathbb{R}^n$. Para ello se necesita que la transformación *esté definida en un entorno abierto alrededor de x en $\mathbb{R}^n$.*

En la definición de superficie que daremos a continuación se pedirá que una transformación h^{-1} definida en un subconjunto $S \cap H$ de $\mathbb{R}^n$ sea diferenciable. Pero $S \cap H$ no es abierto en $\mathbb{R}^n$. ¿Cómo se entiende entonces la diferenciabilidad de h^{-1}? Convenimos en que es diferenciable si existe un abierto V de $\mathbb{R}^n$ que contiene a $S \cap H$, y una función g definida en V, diferenciable, que coincide con h^{-1} cuando se la restringe a $S \cap H$.

Definición 2.1 Un *superficie* S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, tal que cada punto $x_0 \in S$ está contenido en un *abierto* $H \subset \mathbb{R}^n$, que intersectado con S es *difeomorfo* a un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$. ($H \cap S$ es difeomorfo a Ω si existe una función $h : \Omega \mapsto H \cap S$ diferenciable, invertible y con inversa diferenciable).

Nótese que h está definido en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$. Es entonces una función de dos variables reales, que asigna, a cada valor de estas variables, un punto de la superficie. Al mover las dos variables reales en Ω se recorren todos los puntos de la superficie S que están en un entorno H de x_0.

La función h se llama *parametrización para el punto x_0*. Puede suceder que alcance una sola parametrización para cubrir toda la superficie S, pero lo común es que se necesiten varios entornos H, y por lo tanto varias parametrizaciones.

Por ejemplo, la esfera y el toro son superficies en $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.2 Una superficie S es de clase C^r si existe, para cada punto de la superficie, alguna parametrización h tal que h y su inversa h^{-1} tienen derivadas continuas hasta orden r.

Subespacio tangente: Sea una curva paramétrica $x = x(t), \quad t \in I$, intervalo abierto de $\mathbb{R}$, contenida en la superficie, es decir $x(t) \in S$ para todo $t \in I$. Sea $t_0 \in I$. El vector $\dot{x}(t_0)$ de $\mathbb{R}^n$ es tangente a la curva en el punto $x_0 = x(t_0)$. Decimos que un vector de $\mathbb{R}^n$ es *tangente* a la superficie S en el punto x_0 si es tangente en x_0 a alguna curva contenida en la superficie. Se puede demostrar que *el conjunto de todos los vectores tangentes a la superficie S en el punto $x_0 \in S$ forman un subespacio vectorial de dimensión dos en $\mathbb{R}^n$.* Este espacio vectorial se denota como $T_{x_0}S$ y se llama *espacio tangente a S en el punto x_0.*

Por definición, para cada curva $x = x(t)$ contenida en S, se cumple $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}S$.

Definición 2.3 Se llama *campo en S* a una función X que a cada punto $x \in S$ le asigna un vector $X(x)$ del subespacio tangente a S en x. Es decir:

$$X(x) \in T_xS, \quad \text{para todo } x \in S$$

Definición 2.4 Una ecuación diferencial ordinaria autónoma en la superficie S es $\dot{x} = X(x)$, donde X es un campo en S.

Resolver la ecuación es hallar las funciones $x = x(t)$, definidas en intervalos abiertos $I \subset \mathbb{R}$, y que toma valores $x(t) \in S$, tales que $\dot{x}(t) = X(x(t))$ para todo $t \in I$. Esto es equivalente a hallar las curvas contenidas en S que son tangentes al campo dado X. Estas curvas son las *trayectorias u órbitas.* Ahora las trayectorias están contenidas en la superficie S. La familia de todas las trayectorias forman el *flujo* , o *sistema dinámico* , asociado a la ecuación diferencial en la superficie.

La unicidad y maximalidad de soluciones de la ecuación diferencial en la superficie S se definen como en el capítulo I.

Para poder enunciar el teorema de Picard en superficies, recordemos que el campo X en S, es, en particular, una función definida en $S \subset \mathbb{R}^n$ que toma valores en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.5 Se dice que X es lipchitziano globalmente en S si existe una constante $K > 0$ tal que

$$\|X(x_0) - X(x_1)\| \leq K\|x_0 - x_1\|, \quad \text{para todos } x_0, x_1 \in S$$

Se dice que X es lipschitziano en S, si para cada punto $x \in S$ existe un entorno $H \subset \mathbb{R}^n$ tal que X es lipschitziano globalmente en $S \cap H$.

Teorema 2.6 (Picard en superficies) *Si X es un campo continuo y lipschitziano en la superficie S de clase C^2, entonces existe, para cada $x_0 \in S$, y cada $t_0 \in \mathbb{R}$, una única solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x)$ que pasa por x_0 en $t = t_0$.*

Nota: El teorema es válido también si la superficie es sólo C^1.

Prueba: Consideremos una parametrización $h : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto S \cap H \subset \mathbb{R}^n$ de la superficie, en un entorno del punto $x_0 \in S$. A partir de una curva paramétrica $\beta(t)$ en Ω, puede definirse la curva contenida en la superficie $x(t) = h \circ \beta(t)$. Se cumple $\dot{x}(t) = \; \mathrm{d}h(\beta(t)) \cdot \beta'(t)$.

Entonces, $x(t)$ verifica la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x)$ en S, si y solo si $\beta(t)$ verifica la ecuación diferencial en $\Omega \subset I\!\!R^2$:

$$\beta'(t) = \mathrm{d}h(\beta(t))^{-1} \cdot X(h \circ \beta(t))$$

Esta es una ecuación de la forma $y' = Y(y)$ con $y \in \Omega$, $Y(y) = \mathrm{d}h(y)^{-1} \cdot X(h(y))$. Como h y $\mathrm{d}h^{-1}$ tienen derivadas continuas, porque S es de clase C^2, son lipschitzianas. La composición y el producto de funciones continuas y lipschitzianas son también continuas y lipschitzianas. Luego, la función Y es continua y lipschitziana.

Por el teorema de Picard en el abierto $\Omega \subset I\!\!R^2$, existe única solución de $\dot{y} = Y(y)$ por cada punto $y \in \Omega$. Aplicando h^{-1} se concluye que existe única solución de la ecuación diferencial dada en S, por cada punto $x_0 \in S$. ■

3 Ejemplos

Flujo polo norte-polo sur en la esfera

Sea S^2 la esfera de centro (0,0,0) y radio 1 en R^3. Para cada $p \in S^2$ sea $X(p)$ el vector tangente a la esfera en el punto p dado por

$$X(x, y, z) = (xz, yz, -(x^2 + y^2))$$

Obsérvese que $X(p)$ es ortogonal a $p - (0, 0, 0) = (x, y, z)$, y por eso es vector tangente a la esfera. Además la proyección de $X(p)$ sobre el plano $z = 0$ es $(xz, yz, 0) = z(x, y, 0)$. Esa proyección es radial, es decir, colineal con la proyección $(x, y, 0)$ de $p - (0, 0, 0) = (x, y, z)$ sobre el plano $z = 0$.

Entonces $X(p)$ es un vector tangente al meridiano de la esfera que pasa por el punto p (si $x^2 + y^2 \neq 0$). Las órbitas de la ecuación $\dot{p} = X(p)$ son el polo norte $(x = 0, y = 0, z = 1)$, el polo sur $(x = 0, y = 0, z = -1)$, y los meridianos de la esfera, orientados desde el polo norte hacia el polo sur.

Péndulo sin rozamiento

Sea la ecuación del péndulo sin rozamiento:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \sin\theta$$

con $\theta \in (-\pi, \pi]$ ángulo de desplazamiento del péndulo respecto a la vertical, y ω^2 constante positiva, que depende de la aceleración gravitatoria y de la longitud del péndulo.

Pasando a una ecuación de primer orden, queda:

$$\dot{\theta} = z, \quad \dot{z} = -\omega^2 \sin\theta$$

que es de la forma $\dot{p} = X(p)$ donde $p = (\theta, z)$, $X(p) = (z, -\omega^2 \sin\theta)$.

Tomemos en el espacio $(x, y, z) \in I\!\!R^3$ el cilindro $\mathcal{C}$, con sección la circunferencia del plano $z = 0$, de radio 1, y centro $(0, 0, 0)$, y generatrices verticales (paralelas al eje de las z). Cada punto del cilindro está identificado por dos coordenadas: z, y θ (el ángulo que forma el eje de las x con

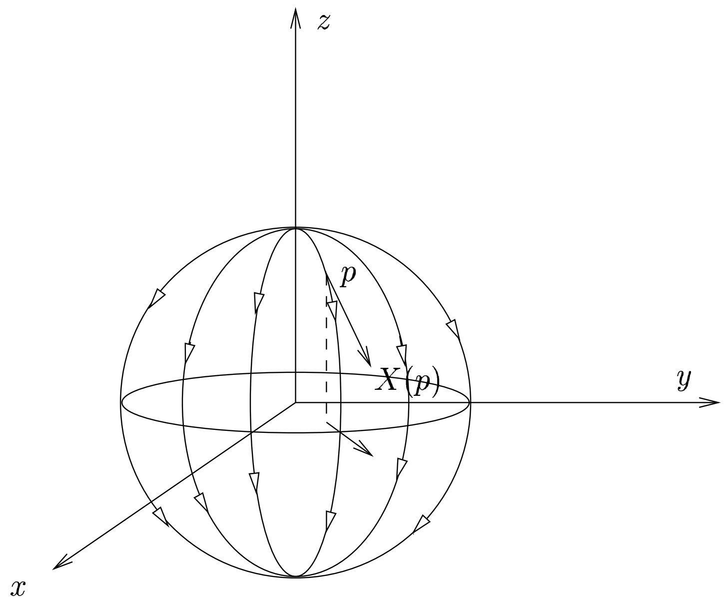


Figura 2: Flujo polo norte-polo sur en la esfera

el plano vertical que contiene a p), y recíprocamente, cada pareja (θ, z) da un punto de $\mathcal{C}$. Dicho de otra forma, el espacio de fases del péndulo es el cilindro $\mathcal{C}$.

Las órbitas de la ecuación diferencial $\dot{p} = X(p)$, son curvas contenidas en el cilindro $\mathcal{C}$. La componente $\dot{\theta}$ es la componente del campo X tangente a la sección circular del cilindro, y la componente $\dot{z}$ es según la generatriz vertical del cilindro.

Los puntos fijos en el cilindro, son las órbitas $p = p(t)$ constantes para todo t. Esto es $\dot{p} = 0$, o sea, $z = 0, \sin\theta = 0$. Esto da dos puntos fijos: $z = 0, \theta = 0$ y $z = 0, \theta = \pi$.

Estudiando el signo de $\dot{z}$ y de $\dot{\theta}$, y usando las simetrías de las ecuaciones respecto a z y a θ, pueden croquizarse las trayectorias sobre la superficie del cilindro, obteniendose el flujo según la figura.

Para ver que las órbitas cercanas al punto de equilibrio $\theta = 0, z = 0$ son curvas cerradas, basta observar que la cantidad $V(\theta, z) = z^2 - 2\omega^2 \cos\theta$ se conserva sobre las órbitas, y cuando el valor conservado es cercano a $-2\omega^2$, corresponde a la ecuación de una curva cerrada.

4 Ecuaciones diferenciales en variedades

Así como se han estudiado las ecuaciones diferenciales en superficies contenidas en $\mathbb{R}^n$, pueden definirse y estudiarse en otros objetos geométricos de dimensión $k \leq n$ contenidos en $\mathbb{R}^n$. Esto es útil cuando el espacio de fases tiene dimensión k y es un subconjunto del espacio euclideo n-dimensional.

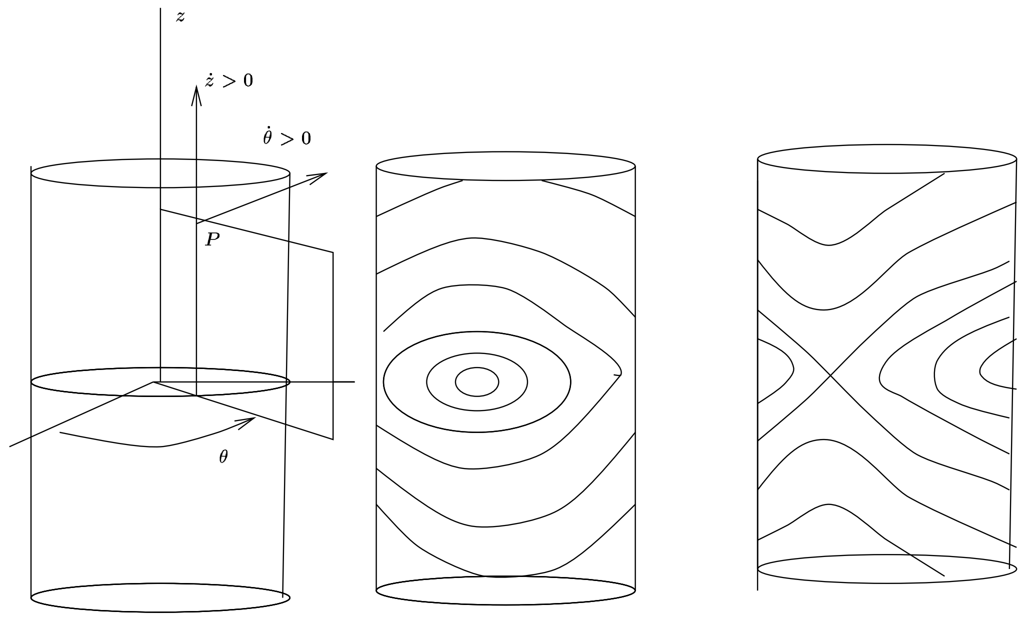


Figura 3: Espacio de fases para el péndulo sin rozamiento.

Definición 4.1 Una *variedad* encajada en $\mathbb{R}^n$, *de dimensión* $k \leq n$, es un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ tal que cada punto $x_0 \in S$ está contenido en un abierto H de $\mathbb{R}^n$, tal que $H \cap S$ es *difeomorfo* a un abierto $\Omega \in \mathbb{R}^k$. Es decir, existe $h : \Omega \subset \mathbb{R}^k \mapsto S \cap H \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable, invertible y con inversa diferenciable.

Las superficies son las variedades de dimensión dos.

Subespacio tangente:

Sea $x = x(t)$ una curva paramétrica contenida en la variedad S. El vector $\dot{x}(t)$ es tangente a la curva en el punto $x(t)$. Puede demostrarse que todos los vectores tangentes en x_0 a las curvas paramétricas contenidas en S que pasan por x_0, forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k. Este espacio vectorial se llama *espacio tangente a S en* x_0, y se denota como $T_{x_0}S$. Por construcción, si $x(t)$ está contenida en la variedad S, entonces $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}S$.

Definición 4.2 Un *campo* en la variedad S es una función que a cada punto x de S le hace corresponder un vector $X(x)$ del espacio tangente en x a S.

Dado un campo X en la variedad S, resolver la ecuación diferencial ordinaria $\dot{x} = X(x)$, es hallar todas las funciones $x = x(t)$, con $t \in I$, I intervalo abierto de $\mathbb{R}$, tales que $x(t) \in S$ y $\dot{x}(t) = X(x(t))$, para todo $t \in I$. Esto equivale a hallar todas las curvas contenidas en S que son tangentes, en cada punto x por donde pasan, al campo dado $X(x)$. Estas curvas son las *trayectorias u órbitas.* La familia de todas las órbitas es el *flujo, o sistema dinámico,* asociado a la ecuación diferencial.

El teorema de Picard vale para variedades S, con los mismos enunciado y prueba que en 2.6, sustituyendo la palabra superficie, por variedad.

EJERCICIOS

1. Sea en $\Omega = \{(x,y) \in I\!R^2 : 0 < x < C_1, 0 < y < C_2\}$, el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1(C_1 - x)y - b_1 x \\ \dot{y} &= a_2(C_2 - y)x - b_2 y \end{aligned}$$

   donde $a_1, a_2, b_1, b_2, C_1, C_2$ son constantes reales positivas.

   a) Graficar las órbitas en Ω, discutiendo según las constantes dadas.

   b) Estas ecuaciones corresponden a un modelo de evolución de la gonorrea en una población de C_1 hombres y C_2 mujeres, con una tasa a_1 de contagio de hombres, una tasa a_2 de contagio de mujeres, una tasa b_1 de cura de hombres, y una tasa de cura b_2 de mujeres.
   Según las gráficas de la parte a), ¿es posible erradicar la enfermedad?

2. Graficar las órbitas (orientándolas para t creciente) de la ecuación diferencial en $I\!R^2$:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (ax, by)$$

   discutiendo según el signo de a y b.

3. Graficar las órbitas de la ecuación diferencial en $I\!R^2$:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (ax + y, ay)$$

   discutiendo según el signo de a.

4. Graficar las órbitas en $I\!R^2$ de la ecuación diferencial:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (ax - by, bx + ay)$$

   con $b \neq 0$, discutiendo según el signo de a.

5. Sea $\dot{x} = Ax$, donde $x \in I\!R^2$, y A es una matriz 2×2, de términos constantes reales.
   Ver que existe un cambio de variables en $I\!R^2$, que lleva la ecuación dada a otra $\dot{z} = Bz$, comprendido en alguno de los casos de los tres ejercicios anteriores.

TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras.

Octubre de 1998.

CAPITULO INTERMEDIO ENTRE II Y III
SISTEMAS DINAMICOS

En este capítulo consideraremos propiedades topológicas generales de los sistemas dinámicos continuos. Estas propiedades serán, en particular, aplicables a la solución general $\phi(x,t)$ de una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$, con X lipschitziana y continua, definida para cada x en una variedad M (que puede ser un abierto de R^n), después de una adecuada reparametrización. (Ver ejercicio 3)

1 Sistemas dinámicos en espacios topológicos

De ahora en adelante M será un espacio topológico de Haussdorf con bases locales numerables.

Para quien no conozca qué es eso, digamos que es una generalización (mucho más general) abstracta de cualquier subconjunto M del espacio euclídeo R^n, munido de la "topología"heredada de R^n. (Una topología en un conjunto M es la familia de todos los subconjuntos abiertos en M.

Un subconjunto de M es abierto en M si es la intersección de un abierto de R^n con M. Un entorno en M de un punto x de M es un abierto en M que contiene al punto x.

Que el espacio M es topológico, quiere decir que está definida la familia de abiertos en M. Que es de Haussdorf quiere decir que dados dos puntos distintos de M existen entornos de ellos disjuntos.

Que el espacio M tiene bases locales numerables, quiere decir que dado un punto p de M existe una colección numerable de entornos de p en M, $V_1(x) \supset V_2(x) \supset \ldots \supset V_i(x) \supset \ldots$ tales que cualquier otro entorno de p en M contiene a algún $V_i(p)$ de la colección. Si M es un subconjunto de R^n, una base local numerable de entornos del punto p, en M es la colección de bolas abiertas de centro p y radio $1/n$, intersectadas con M, para todo p natural mayor que cero.

Como caso particular M puede ser una variedad de dimensión k encajada en R^n, aunque su estructura diferenciable no será necesaria para desarrollar la teoría topológica de este capítulo.

Definición 1.1 Una función $\phi : M \times R \mapsto M$ continua, es un *sistema dinámico de variable real,* o también *flujo* en M, si $\phi(p,0) = p$ para todo $p \in M$ y $\phi(p, t_1 + t_2) = \phi(\phi(p, t_1), t_2)$ para todos t_1 y t_2 reales, para todo $x \in M$.

Observaciones

1. Sea $t_1 \in M$ cualquiera.La función $\phi_{t_1} : M \mapsto M$ que se obtiene fijando $t = t_1$ en $\phi(p, t)$, *es un homeomorfismo* (esto es, es continua, invertible, y con inversa continua). En efecto $\phi_{t_1} \circ \phi_{-t_1} = \phi_{t_1 - t_1} = \phi_0 = Id$ y análogamente $\phi_{-t_1} \circ \phi_{t_1} = id$. La inversa de ϕ_{t_1} es ϕ_{-t_1}.

2. Sea p_0 cualquiera. La función $\phi(p_0, \cdot) : R \mapsto M$ que se obtiene fijando $p = p_0$ en $\phi(p, t)$, es la parametrización de una curva continua orientada (según t creciente), que se llama *órbita o trayectoria* de p_0. A veces también se llama *órbita* o *trayectoria* a la traza de esa curva, o sea al conjunto imagen de la función $\phi(p_0, \cdot)$, que denotaremos como $o(p_0)$.

$$o(p_0) = \{\phi(p_0, t) : t \in R\}$$

3. *Dos órbitas distintas no se intersectan,* pues si lo hicieran existiría $p_2 \in o(p_0 \cap o(p_1)$. Luego $p_2 = \phi(p_0, t_0) = \phi(p_1, t_1)$. Para todo t real se cumple $\phi(p_0, t) = \phi(p_0, t_0 + t - t_0) = \phi(\phi(p_0, t_0), t - t_0) = \phi(p_2, t - t_0) = \phi((\phi(p_1, t_1), t - t_0) = \phi(p_1, t + t_1 - t_0)$. Entonces $o(p_0) \subset o(p_1)$. Simétricamente se cumple la inclusión opuesta, y entonces las órbitas coinciden.

4. *Si un punto p_0 es tal que existen $t_0 \neq t_1$ tales que $\phi(p_0, t_0) = \phi(p_0, t_1)$ entonces, o bien p_0 es un punto fijo del flujo* (es decir $\phi(p_0, t) = p_0$ para todo t, y $o(p_0) = \{p_0\}$), *o bien p_0 es periódico de período $T > 0$* (es decir $\phi(p_0, t + T) = \phi(p_0, t)$ para todo t real, y $\phi(p_0, t) \neq p_0$ para todo t que no sea múltiplo entero de T). En el caso que p_0 sea periódico la órbita por p_0 es una curva cerrada y recíprocamente.

   Prueba:

   Para demostrar la afirmación, (tomando $t_0 - t_1 \neq 0$ en lugar de t_0 y 0 en lugar de t_1), basta probar que si $\phi(p_0, t_0) = p_0$, con $t_0 \neq 0$ y p_0 no es un punto fijo, entonces es peródico con período $T > 0$. Sea

   $$G(t) = \{t \in R : \phi(p_0, t) = p_0\}$$

   (a) $0 \in G$

   (b) Si t_1 y t_2 pertenecen a G entonces $t_1 + t_2$ también.
   Esto es porque $\phi(p_0, t_1 + t_2) = \phi(\phi(p_0, t_1), t_2) = \phi(p_0, t_2) = p_0$.

   (c) Si $t_1 \in G$ entonces $-t_1 \in G$.
   Esto es porque $p_0 = \phi(p_0, t_1 - t_1) = \phi(\phi(p_0, t_1), -t_1) = \phi(p_0, -t_1)$.
   Un subconjunto G de reales que cumpla las propiedades a),b) y c), se llama *subgrupo* de reales.

   (d) Además G es un conjunto *cerrado* de reales, pues si $t_n \in G$ es una sucesión de reales tal que $t_n \to \bar{t} \in R$, entonces $\bar{t} \in G$. En efecto, $\phi(p_0, t_n) = p_0$ para todo n. Haciendo $n \to \infty$, como la función ϕ es continua, se obtiene $\phi(p_0, \bar{t}) = p_0$.

   (e) El subgrupo G es *no trivial,* (esto es: G no es todo R y no se reduce a $\{0\}$). En efecto, G no es todo R porque p_0 no es punto fijo. Además, por hipótesis $t_0 \neq 0$ y $\phi(p_0, t_0) = p_0$, lo que significa que $t_0 \in G$.

Todo lo anterior se resume en que G es un subgrupo cerrado y no trivial de reales. Para terminar la prueba basta demostrar la siguiente afirmación:

Todo subgrupo G cerrado y no trivial de reales es el conjunto de múltiplos enteros de un cierto real $T > 0$.

En efecto, sea $G^+ = \{T \in G : t > 0\}$. Como G es no trivial, existe algún $g \in G$, con $g \neq 0$. Entonces $|g| \in G^+$ y G^+ es no vacío.

Sea $T = \inf G^+$.

$T > 0$ pues si fuera $T = 0$, existiría, para todo natural $n \geq 1$ un real $t_n \in G^+$ tal que $0 < t_n < 1/n$ (por definición de ínfimo). Sea para cada $x \in R$ y para cada $n \geq 1$ el número entero $\text{ent}(x/t_n)$ (parte entera de x/t_n). Se cumple que $0 \leq x/x_n - \text{ent}(x/t_n) < 1$. Multiplicando por t_n se tiene $0 \leq x - t_n\text{ent}(x/t_n) < T_n < 1/n$. Entonces $t_n\text{ent}(x/t_n) \to_{n\to\infty} x$. Pero $t_n \in G$ siendo G un subgrupo de reales, y $\text{ent}(x/t_n)$ es un número entero. Multiplicar por un número entero es sumar una cantidad natural de veces y eventualemtne tomar el opuesto del resultado. Entonces $\text{ent}(x/t_n) \in G$, y como tiende a x y G es cerrado, entonces $x \in G$. Luego, suponiendo que T fuera igual a cero hemos llegado a que G contiene a todo x real, y G sería trivial. Hemos probado que $T > 0$.

Por definición de ínfimo, existe $t_n \to T$ con $t_n \in G^+$. Pero G es cerrado. entonces $T \in G$. Como $T > 0$, se tiene $T \in G^+$. Es decir T es el m9́nimo de G^+.

Es inmediato que todos los múltiplos enteros de T están en G, porque T está en G y G es un subgrupo de reales. Veamos que G no contiene otros reales. Sea $t \in G$. Tomando la parte entera de t/T, se obtiene $0 \leq T((t/T) - \text{ent}(t/T) < T$. Pero entonces tenemos el real $t - T\text{ent}(t/T)$ que es mayor o igual que cero, está en G y es menor que el m9́nimo T de G^+. Esto significa que ese real debe ser cero, o sea, t es múltiplo de T. ■

En lo que sigue Z es el conjunto de los números enteros.

Definición 1.2 Un *sistema dinámico de variable entera,* en M es una sucesión bi-infinita de funciones $f_n : M \mapsto M$ continuas, una para cada $n \in Z$, tales que $f_0 = Id$ y $f_n \circ f_m = f_{n+m}$ para todos n y m enteros.

Dado un flujo, o sistema dinámico $\phi(p,t)$ en M de variable real, se tiene un sistema dinámico de variable entera tomando $f_n(p) = \phi(p,n)$ para todo $n \in Z$. Sin embargo, no todo sistema dinámico de variable entera proviene de un flujo en el mismo espacio M tomando los tiempos t enteros.

Observaciones:

1. *f_n es un homeomorfismo con inversa f_{-n}.*

2. Fijado p_0, la sucesión de puntos de M definida como $p_n = f_n(p_0)$, para $n \in Z$ se llama *trayectoria* , u *órbita* de p_0. A veces también se llama trayectoria u órbita al conjunto de todos los puntos p_n.

$$o(p_0) = \{p \in M : p = f_n(p_0) \text{ para algún entero } n\}$$

3. *Dos trayectorias distintas no se intersectan.*

4. *Si para cierto punto p_0 existen enteros n_0 y n_1 diferentes tales que $f_{n_0}(p_0) = f_{n_1}(p_0)$, entonces, o bien p_0 es un punto fijo del sistema* (es decir, $f_n(p_0) = p_0$ para todo n entero, y$o(p_0) = \{p_0\}$), *o bien p_0 es un punto peródico de período natural $N > 1$* (es decir, $f_{n+N}(p_0) = p_0$ para todo n entero, y $f_n(p_0) \neq p_0$ si n no es múltiplo entero de N).

   Prueba:

   $f_{n_0}(p_0) = f_{n_1}(p_0)$ implica que $f_{n_0-n_1}(p_0) = f{n_1}^{-1} \circ f_{n_0}(p_0) = p_0$. Como $n_1 \neq n_0$, y p_0 no es punto fijo, el conjunto $G = \{n \in Z : f_n(p_0) = p_0\}$ es no vacío, y diferente de todo Z. Tiene un mínimo natural positivo N que no es uno.

   Se cumple $f_N(p_0) = p_0$, y para todo n entero $f_{n+N}(p_0) = f_n \circ f_N(p_0) = f_n(p_0)$.

   Es inmediato que G contiene a todos los múltiplos enteros de N. Ahora veamos que coincide con el conjunto de los múltiplos enteros de N. Dado $n\ inG$, haciendo la división entera entre N, se tiene $n = mN + r$ con $0 \leq r < N$. Siendo $p_0 = f_n(p_0) = f_r \circ f_{mN}(p_0) = f_r(p_0)$ se tiene que $r \in G$ y es no negativo, menor que el mínimo natural positivo N de G. Esto implica que $r = 0$. ∎

Definición 1.3 Dado un homeomorfismo $f : M \in M$, se llama *sistema dinámico por iterados de f* al definido mediante

$$\begin{array}{rcll} f_n &=& f \circ f \circ \ldots \circ f & n \text{ veces}, \quad \text{si } n > 0 \\ f_n &=& f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1} & |n| \text{ veces}, \quad \text{si } n < 0 \\ f_0 &=& Id & \end{array}$$

Se usa la notación f^n para indicar la composición de f consigo misma n veces, si n es natural, y la inversa de la compuesta de f consigo misma $|n|$ veces, si n es entero negativo.

Observaciones

Todo sistema dinámico con parámetro entero es obtenido por iterados de un homeomorfismo f (ver ejercicio 4). Por eso se identifica el sistema dando simplemente la transformación $f : M \mapsto M$ continua, invertible y con inversa continua.

Si $\phi(p, t)$ es un flujo, entonces tiene asociado un sistema dinámico de variable entera, por iterados de $\phi(\cdot, 1)$ (la transformación de tiempo uno). El recíproco no es cierto: no todo sistema dinámico de variable entera, es obtendio por iterados de la transformación de tiempo uno de un flujo, *en el mismo espacio* M (ver ejercicio 5). Pero sí puede darse una versión que requiere agrandar el espacio (ver ejercicio 6): todo sistema dinámico de variable entera es el sistema dinámico por iterados de la transformación de tiempo uno de un flujo, en un espacio M' que contiene a M, llamado *suspensión*.

Dada una ecuación diferencial autónoma $\dot{p} = X(p)$ en, por ejemplo una variedad M de dimensión tres, (que puede ser un abierto de R^3), considérese su flujo asociado $\phi(p, t)$. Supóngase que existe, contenida en M, una superficie compacta S tal que para todo $p \in S$ hay un tiempo $T_p > 0$ en que la órbita por p vuelve a estar en S, es decir $\phi(p, T_p) \in S$. Considérese la función $f : S \mapsto S$ definida por $f(p) = \phi(p, T_p)$. Bajo ciertas condiciones hipotéticas, f resulta continua. (Por ejemplo si el campo X de la ecuación diferencial autónoma es transversal a la superficie S

en todos los puntos de S). La superficie S se llama, en ese caso *sección de Poincaré del flujo,* y la transformación f es el *mapa de Poncaré.* El mapa de Poncaré no tiene en general, nada que ver con la tranformación de tiempo uno del flujo, pero mejor que ella refleja propiedades topológicas del flujo. El sistema dinámico por iteradas del mapa de Poincaré f tiene órbitas que son subconjuntos de puntos de las órbitas del flujo dado. Los puntos periódicos de f (incluyendo los puntos fijos de f), corresponden a las órbitas periódicas del flujo que intersectan a la superficie S, y recíprocamente. En general, toda la teoría cualitativa topológica que desarrollaremos, es aplicable al flujo, pero pueden sacarse conclusiones estudiándolas solo referidas la mapa de Poncaré f. La estabilidad de las órbitas del flujo que intersectan a S puede estudiarse trabajando con las trayectorias del mapa de Poincaré. Este tiene la ventaja frente a la transformación de tiempo uno, y frente al flujo mismo, que es una transformación en un espacio S de dimensión menor que la del espacio M donde está definido el flujo.

2 Omega y Alfa límites

Sea $\Phi(p,t)$ un sistema dinámico de variable real en el espacio M. (Sea f un sistema dinámico de variable entera en el espacio M).

Definición 2.1 Un subconjunto $A \subset M$ es *invariante* si $\phi(A,t) \subset A$ para todo $t \in R$ (respectivamente $f^n(A) \subset A$ para todo n entero).

Se observa que $A \subset M$ es invariante si y solo si $\phi(A,t) = A$ para todo t real (respectivamente $f(A) = A$). En efecto: $\phi(A,-t) \subset A$ para todo t real, implica que $\phi(\phi(A,-t),t) \subset \phi(A,t)$ para todo t real. Entonces $A = \phi(A,0) = \phi(\phi(A,-t),t) \subset \phi(A,t) \subset A$. Entonces $A = \phi(A,t)$ para todo t real.

Los subconjuntos invariantes son aquellos que se mantienen incambiados en el tiempo. Se caracterizan porque, por definición, si contienen a un punto p_0 entonces contienen a toda la órbita de p_0

Definición 2.2 Se llama *semiórbita positiva de p_0, o semitrayectoria positiva de p_0,* a la curva paramétrica orientada, dada por la función $\phi(p_0,\cdot) : [0,+\infty) \mapsto M$. A veces también se llama semiórbita positiva a la traza de esa curva, es decir al conjunto de puntos en M dado por

$$o^+(p_0) = \{\phi(p_0,t) \text{ para algún } t \geq 0\}$$

En forma similar, para los sistemas dinámicos de variable entera, asociado a los iterados de $f : M \mapsto M$, se llama semitrayectoria positiva de p_0 a la sucesión de puntos $f^n(p_0)$ para $n \geq 0$ natural. A veces se llama semitrayectoria positiva al conjunto de puntos en M dado por

$$o^+(p_0) = \{f^n(p_0) \text{ para algún natural } n \geq 0\}$$

Se define *semiórbita o semitrayectoria negativa* de p_0 de manera análoga, sustituyendo $t \geq 0$ por $t \leq 0$ (respectivamente $n \geq 0$ natural, por $n \leq 0$ entero). La semiórbita negativa de p_0 se denota como $o^-(p_0)$.

Sea ahora $\phi(p,t)$ un flujo en M, y p_0 un punto de M.

Definición 2.3 Se llama *$\omega-$límite (omega-límite) de p_0* al conjunto de puntos dado por:

$$\omega(p_0) = \{q \in M : \text{ Existe alguna sucesión de reales } t_n \to +\infty \text{ que cumple } \phi(p_0, t_n) \to_{n\to\infty} q\}$$

Se llama *$\alpha-$límite (alfa-límite) de p_0* al conjunto de puntos dado por:

$$\alpha(p_0) = \{q \in M : \text{ Existe alguna sucesión de reales } t_n \to -\infty \text{ que cumple } \phi(p_0, t_n) \to_{n\to\infty} q\}$$

El conjunto omega-límite de un punto tiene interés porque en sistemas provenientes de distintas ramas de la ciencia, puede interesar tanto el comportamiento transitorio (la órbita), como el comportamiento asintótico cuando el tiempo tiende a infinito. El conjunto omega-límite es el conjunto a donde se acerca, (lo alcance o no), la semiórbita positiva del punto. Digamos que es donde muere la órbita, si tiene algún sentido decir esto aún cuando la órbita dé infinitas vueltas, y no exista un punto límite de $\phi(p_0,t)$ cuando $t \to \infty$.

Puede suceder que alguna semiórbita positiva (y también alguna negativa) sea *densa* en el espacio (es decir se acerque tanto como se quiera, a cualquier punto del espacio). Esto significaría que el conjunto omega-límite correspondiente es todo el espacio.

Por ejemplo esto sucede en el llamado *flujo irracional del toro* . El toro es una superficie que se obtiene, por ejemplo girando una circunferencia generatriz alrededor de un eje que no la corta y que está en el mismo plano de la circunferencia generatriz (el toro es la superficie de una rueda de sección circular). Todo el toro menos la circunferencia generatriz y menos la circunferencia ortogonal con la generatriz de radio máximo, es homeomorfo a un cuadrado plano. (Dos conjuntos son homeomorfos cuando existe un homeomorfismo h que lleva uno en el otro, es decir una tranformación h continua, invertible con inversa continua).

Considérese en el cuadrado la función $\psi(x,t) = x + vt$, donde v es un vector fijo cualquiera de pendiente irracional (tomando como ejes los lados del cuadrado), x es un punto cualquiera del cuadrado y t es un número real (tal que $\psi(x,t)$ pertenezca al cuadrado). Llévese por el homeomorfismo h esta función ψ a la superficie del toro. (Es decir dado p en el toro, considérese $\phi(p,t) = h^{-1}(\psi(h(p),t))$. La función así definida puede extenderse continuamente para todo t real y para todo p del toro, y constituye un flujo, llamado flujo irracional (porque la pendiente del vector v es irracional).

Las órbitas del flujo irracional son curvas que dan infinitas vueltas enrollándose por la superficie del toro, sin cerrarse nunca. Puede demostrarse que las semiórbitas positivas (y también las negativas) son densas en la superficie del toro. Por lo tanto, los conjuntos omega y alfa límites son toda la superficie del toro (ver ejercicio 12). Sin embargo cada órbita no es todo el toro.

Observaciones

1. Si la órbita por p_0 es peródica, o si p_0 es un punto fijo, entonces $\omega(p_0) = \alpha(p_0) = o(p_0) = o^+(p_0) = o^-(p_0)$.

2. $\omega(p_0) \subset \overline{o^+(p_0)} \subset \overline{\o(p_0)}$.

   $\alpha(p_0) \subset \overline{o^-(p_0)} \subset \overline{\o(p_0)}$.

   ($\overline{A}$ indica el conjunto clausura o adherencia de A, esto es la unión de A con el conjunto de sus puntos de acumulación).

3. $\omega(\phi(p_0), t)) = \omega(p_0)$ para todo t real.

   $\alpha(\phi(p_0), t)) = \alpha(p_0)$ para todo t real.

   Prueba Si $q \in \omega(p_0)$ existe $t_n \to +\infty$ tal que $q = \lim_{n\to\infty} \phi(p_0, t_n)$. Fijado t real, la sucesión $t_n - t$ también tiende a $+\infty$. Luego, $q = \lim_{n\to\infty} \phi(\phi(p_0, t), t_n - t) \in \omega(\phi(p_0, t))$.

   Lo anterior prueba que $\omega(p_0) \subset \omega(\phi(p_0, t))$ para todo resl t, y para todo punto p_0. En particular vale para $-t$ en lugar de t y y para $\phi(p_0, t)$ en lugar de p_0. Se obtiene así la inclusión opuesta.

   En forma similar se demuestra la afirmación referente al conjunto α- límite. ■

   Lo anterior dice que los conjuntos $\omega-$ límite y $\alpha-$ límite son inherentes a las órbitas, más que a los puntos. Es decir todos los puntos de una misma órbita tienen los mismos ω-límite y $\alpha-$límite.

Teorema 2.4 *Los conjuntos $\omega(p_0)$ y $\alpha(p_0)$ son invariantes y cerrados.*

Prueba: La invariancia de $\omega(p_0)$ se demuestra verificando que si $q \in \omega(p_0)$ entonces $\phi(q, t) \in \omega(p_0)$ para todo t real. En efecto si $q = \lim_{n\to\infty} \phi(p_0, t_n)$ con $t_n \to +\infty$, entonces fijado t real cualquiera $\phi(q, t) = \lim_{n\to\infty} \phi(\phi(p_0, t_n), t) = \lim \phi(p_0, t_n + t)$ con $t + t_n \to +\infty$. Luego $\phi(q, t) \in \omega(p_0)$ como se quería demostrar.

Para demostrar que $\omega(p_0)$ es cerrado, tomemos un punto de acumulación r de $\omega(p_0)$ y probemos que $r \in \omega(p_0)$. En todo entorno V de r existe algún punto $q \in \omega(p_0)$, siendo entonces $q = \lim \phi(p_0, t_n)$ con $t_n \to +\infty$.

Como $q \in V$, y por la definición de límite, existe algún $T = t_n$ (para cierto n), que puede elegirse tan grande como se desee porque $t_n \to +\infty$, tal que $\phi(p_0, T) \in V$.

Sea $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_j \supset \ldots$ una base local numerable de entornos del punto r. Para cada uno de ellos elijamos T_j de modo que $T_{j+1} > T_j$ y $\phi(p_0, T_j) \in V_j$. Entonces $\phi(p_0, T_j) \to_{j\to\infty} r$ con $T_j \to +\infty$. Es decir $r \in \omega(p_0)$.

Las afirmaciones para el conjunto alfa-límite se demuestran en forma similar. ■

Definición 2.5 Sea un sistema dinámico con variable entera, definido por iterados de un homeomorfismo $f : M \mapsto M$. Sea p_0 un punto de M. Se llama *ω-límite de p_0 (omega-límite de p_0)* al conjunto

$$\omega(p_0) = \{q \in M : \text{ Existe alguna sucesión de naturales } n_j \to \infty \text{ tal que } f^{n_j}(p_0) \to q\}$$

Se llama *α-límite de p_0 (alfa-límite de p_0)* al conjunto

$$\alpha(p_0) = \{q \in M : \text{ Existe alguna sucesión de naturales } n_j \to \infty \text{ tal que } f^{-n_j}(p_0) \to q\}$$

Las observaciones y el teorema anteriores valen también para los conjuntos ω y α- límite en sistemas dinámicos con variable entera (ver ejercicio 8).

En cambio, en el siguiente teorema, la afirmación sobre conexión vale exclusivamente para flujos, y no para la dinámica de iterados de f.

Teorema 2.6 *Sea $\phi : M \times R \mapsto M$ un flujo en M. Sea p_0 un punto de M. Si la semiórbita positiva de p_0 tiene adherencia compacta, entonces el conjunto ω-límite de p_0 es no vacío, compacto y conexo.*

Análogamente si la semiórbita negativa de p_0 tiene adherencia compacta, entonces el conjunto α-límite de p_0 es no vacío, compacto y conexo.

Prueba: Recordemos las siguientes propiedades de los conjuntos compactos:

1. Una sucesión de puntos contenida en un conjunto compacto tiene siempre alguna subsucesión convergente a un punto del compacto.

2. Todo subconjunto cerrado contenido en uno compacto, es también compacto.

Se tiene $\phi(p_0, n) \in o^+(p_0) \subset \overline{o^+(p_0)}$ para todo n natural. Tiene una subsucesión convergente: $\phi(p_0, n_j) \to_{j\to\infty} q$, con $n_j \to +\infty$. Por definición $q \in \omega(p_0)$, es decir, $\omega(p_0)$ es no vacío.

Como $\omega(p_0)$ es un conjunto cerrado contenido en $\overline{o^+(p_0)}$ que por hipótesis es compacto, es también compacto.

Recordemos la definición de conjunto conexo: un conjunto es *conexo* si no puede cubrirse con dos abiertos disjuntos que lo intersecten. Supongamos por absurdo que A y B son dos abiertos en M disjuntos que intersectan a $\omega(p_0)$: $A \cup B \supset \omega(p_0)$, y existen puntos $q_1 \in A \cap \omega(p_0)$ y $q_2 \in B \cap \omega(p_0)$. Por lo tanto existen sucesiones de reales $t_n \to +\infty$ y $s_n \to +\infty$, tales que $q_1 = \lim \phi(p_0, t_n)$ y $q_2 = \lim \phi(p_0, s_n)$.

Tomando subsucesiones adecuadas de t_n y s_n, puede suponerse que $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \ldots < t_n < s_n < t_{n+1} < s_{n+1} < \ldots$. Para todo $n \geq N$ se cumple que $\phi(p_0, t_n) \in A$ porque A es un entorno del punto límite q. Análogamente $\phi(p_0, s_n) \in B$.

El arco de curva $\phi(p_0, t)$ con $t_n \leq t \leq s_n$ es conexo, entonces los abiertos disjuntos A y B que cortan a ese arco respectivamente en $\phi(p_0, t_n)$ y $\phi(p_0, s_n)$ no pueden cubrir al arco. Esto dice que existe algún punto $\phi(p_0, u_n)$ en el arco, que no está ni en A ni en B.

Como $t_n < u_n < s_n$, tenemos que $u_n \to +\infty$.

Siendo $\phi(p_0, u_n)$ una sucesión de puntos contenida en el conjunto compacto $\overline{o^+(p_0)}$, existe una subsucesión convergente $\phi(p_0, u_{n_j}) \to_{j\to\infty} q$. Entonces $q \in \omega(p_0)$.

Por otro lado $\phi(p_0, u_{n_j})$ no pertenece a $A \cup B$, es decir pertenece al complemento de $A \cup B$. Como $A \cup B$ es abierto, su complemento es cerrado. El límite de una sucesión de puntos de un cerrado pertenece al mismo cerrado. Entonces q está en el complemento de $A \cup B$. Es decir encontramos un punto de $\omega(p_0)$ que no está en $A \cup B$, y por lo tanto $A \cup B$ no cubre a $\omega(p_0)$ contra lo supuesto. ■

Notas:

1. El teorema, excepto la afirmación de que $\omega(p_0)$ es conexo, es cierto también para sistemas dinámicos de variable entera, con prácticamente la misma demostración.

2. La tesis de conexión del conjunto omega-límite no es cierta para sistemas dinámicos de variable entera (ver ejercicio 9).

3. Si $o^+(p_0)$ no es compacto, entonces $\omega(p_0)$ puede ser vacío, o ser no vacío pero no conexo (ver ejercicio 10).

4. En algunos espacios topológicos particulares (por ejemplo en subconjuntos de R^n), vale una especie de recíproco de este teorema: si $\omega(p_0)$ es compacto y no vacío, entonces $\overline{o^+(p_0)}$ es compacto, y además resulta ser $\omega(p_0)$ conexo (ver ejercicio 11).

Bibliografía para este capítulo:

J. SOTOMAYOR: Licoes de equacoes diferenciais ordinarias. Projeto Euclides. IMPA Rio de Janeiro.

NEMITSKII-STEPANOV: Qualitative theory of differential equations.

EJERCICIOS

1. Sea la ecuación diferencial no autónoma en $\Omega \subset R^n \times R$, abierto,

$$\dot{x} = X(x,t) \tag{1}$$

con X continua y lipschitziana respecto a la variable x. Sea $\phi(x_0, t_0, t)$ la solución general. Considérese la función $Y : \Omega \mapsto R^{n+1}$ dada por $Y(x,\lambda) = (X(x,\lambda), 1)$ para todo $(x,\lambda) \in \Omega$. Sea la ecuación diferencial autónoma $\dot{y} = Y(y)$ definida para $y \in \Omega$.

   (a) Probar que Y es continua y lipschitziana. Sea $\psi(y_0, t)$ la solución de $\dot{y} = Y(y)$ tal que en $t = 0$ vale y_0. Siendo $y_0 = (x_0, \lambda_0) \in Omega \in R^n \times R$, probar que $\psi(y_0, t) = (\phi(x_0, \lambda_0, t + \lambda_0), t + \lambda_0)$

   (b) Probar que las gráficas en Ω de las soluciones $\phi(x_0, t_0, \lambda)$ de la ecuación diferencial no autónoma dada, son las órbitas de la ecuación diferencial autónoma en y.

2. (a) Sea $\dot{x} = X(x)$ con $X : \Omega \subset R^n \mapsto R^n$ continua y lipschitziana, Ω abierto de R^n, una ecuación diferencial autónoma. Sea $\varphi(x_0, t_0, t)$ la solución por (t_0, x_0) para t en su intervalo maximal. Probar que $\varphi(x_0, t_0, t) = \varphi(x_0, 0, t - t_0)$ (para t donde estén definidas). Se denotará como $\phi(p, t)$ a $\varphi(p, 0, t)$.

   (b) Probar que si $\Omega = R^n$ y si X es continua, lipschitziana, y acotada, entonces el intervalo maximal de las soluciones es $(-\infty, \infty)$ y que $\phi(p, t)$ es un sistema dinámico en R^n.

3. (a) Sea $a : \Omega \subset R^n \mapsto R$ una función siempre positiva, continua y lipschitziana, definida en el abierto Ω de R^n, y sea $X : \Omega \mapsto R^n$ un campo también continuo y lipschitziano, definido en el mismo Ω. Se consideran las ecuaciones diferenciales autónomas $\dot{x} = X(x)$ y $\dot{y} = a(y)X(y)$. Probar que las órbitas de ambas, como conjuntos, coinciden. Sugerencia: Si $\phi(p,t)$ es la solución de la primera, y $\psi(p,s)$ la de la segunda, entonces tomar $t(p,u) = \int_0^u a(\psi(p,s))\, ds$ y verificar que es una reparametrización que hace $\psi(p,u) = \phi(p,t(p,u))$.

   (b) Demostrar que las órbitas de cualquier ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$ con X continua y lipschitziana en todo $I\!R^n$, coinciden como conjuntos, (y como curvas orientadas) con las órbitas de un sistema dinámico de variable real en R^n. (Sugerencia: considerar la ecuación $\dot{x} = X(x)/(1 + \|X(x)\|)$ y el ejercicio 2 parte b).

   (c) Demostrar lo mismo que en la parte anterior pero cuando X está definida solo en un abierto $\Omega \subset R^n$ diferente de todo R^n. Sugerencia: Considerar $a(x) =$ distancia de x al complemento de Ω, y la ecuación diferencial $\dot{x} = a(x)X(x)/(1 + a(x)\|X(x)\|)$ que tiene soluciones definidas en el intervalo maximal $(-\infty, +\infty)$.

4. Probar que todo sistema dinámico de variable entera es un sistema dinámico por iterados de un homeomorfismo f.

5. (a) Probar que si $\phi(p,t)$ es un sistema dinámico de parámetro real, entonces $f_n = \phi(p,n)$ es un sistema dinámico por iterados de la transformación f de tiempo uno, definida por $f(p) = \phi(p,1)$.

   (b) Mostrar que existe algún sistema dinámico de variable entera, en algún espacio M, que no se obtiene por iteración de la transformación de tiempo uno de ningún flujo en M.(Sugerencia: simetría axial en R^2).

6. Sea f un homeomorfismo en un espacio M. Se considera el espacio producto $M \times R$, y en él la siguiente relación de equivalencia: Dados (p,s) y (p',s') en $M \times R$: diremos que (p,s) es equivalente a (p',s') si $s' - s$ es un número entero, y si $f^{s'-s}(p) = p'$.

   (a) Probar que es una relación de equivalencia

   (b) Sea $\tilde{M}$ el espacio cociente de M por la relación de equivalencia dada. (Los elementos de $\tilde{M}$ son las clases de euivalencia en $M \times R$, que se indican como $[p,s]$, siendo (p,s) un representante de la clase. Es entorno de $[p_0, s_0]$ entre otros, por definición, el conjunto de todos los $[p,s]$ obtenidos de tomar p en un entorno de p_0 en M, y s en un entorno de s_0 en R.

   $\tilde{M}$ se llama *espacio suspensión* de M en realción al homeomorfismo f. Sea en $\tilde{M}$ el siguiente flujo: $\phi([p,s],t) = [p, t+s]$.

   Demostrar que está bien definido, y que es un flujo en $\tilde{M}$.

   (c) Sea $[p,s] \in \tilde{M}$. Probar que si s es entero, entonces existe un único $p' \in M$ tal que $[p',0] = [p,s]$ en $\tilde{M}$. Probar que para todo $[p,s]$ en $\tilde{M}$, existe una única pareja $(p',s') \in M \times R$ con $0 \leq s' < 1$ y tal que $[p,s] = [p'.s']$ en $\tilde{M}$.

(d) Sea $M_{s_0} = \{[p,s] \in \tilde{M} : s - s_0 \text{ es entero } \}$ definido para cada s_0 fijo de $[0, 10 \subset R$. Sea $\Pi : M_0 \mapsto M$ definida por $\Pi([p,0]) = p$. Probar que Π es un homeomorfismo. Probar que $f : M \mapsto M$ se obtiene como $f(p) = \pi \circ \phi([p,0],1)$ para todo $p \in M$.

(e) Concluir que todo sistema dinámico de variable entera en M se obtiene, a menos de homeomorfismo, como la transformación de tiempo uno de un flujo, definido en otro espacio $tildeM$ que contiene a M (mejor dicho, a una copia homeomorfa M_0 de M).

(f) Sea M un intervalo de R, $f : M \mapsto M$ la simetría central respecto al punto medio del intervalo. Describir la suspensión $\tilde{M}$ de M respecto a f. Describir M_0, y el flujo ϕ en $\tilde{M}$. Sugerencia: es un flujo en una banda de Moebius).

(g) Idem parte anterior para M una circunferencia, con f la simetría axial respecto a un diámetro. (Sugerencia: $tildeM$ es la botella de Klein).

7. Sea M un espacio métrico (dotado de una distancia d entre dos puntos cualesquiera).

   (a) Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo. Probar que dados $p_0 \in M$, $\epsilon > 0$, y dados $k \leq N$, números enteros, existe $\delta > 0$ tal que si $d(p_0, p) < \delta$ y si $k \leq n \leq N$, entonces $d(f^n(p_0), f^n(p)) < \epsilon$.

   (b) Sea $\phi(p,t)$ un flujo en M. Probar que dados $p_0 \in M$, $\epsilon > 0$, y dados $T \leq S$ reales, existe δ tal que, si $d(p_0, p) < \delta$ y si $T \leq t \leq S$ entonces $d(\phi(p,t), \phi(p_0,t)) < \epsilon$.

   (c) Probar que si M es compacto, se puede elegir δ en las partes anteriores, independiente de p_0.

8. Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo y $p_0 \in M$.

   (a) Probar que $\alpha(p_0)$ y $\omega(p_0)$ son invariantes por f.

   (b) Probar que $\alpha(p_0) = \alpha(f^n(p_0))$ y que $\omega(p_o) = \omega(f^n(p_0))$ para todo n entero.

   (c) Probar que los conjuntos omega y alfa-límites son cerrados en M.

9. Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo y $p_0 \in M$.

   (a) Probar que si la adherencia de la semiórbita positiva por p_0 es compacta entonces el conjunto omega-límite de p_0 es no vacío y compacto.

   (b) Probar que en las hipótesis de la parte anterior, el conjunto omega-límite no puede descomponerse en dos partes disjuntas, compactas, no vacías e invariantes.

   (c) encontrar algún ejemplo en que $\overline{o^+(p_0)}$ sea compacto y $\omega(p_0)$ sea no conexo.

10. (a) Dibujar esquemáticamente las órbitas y los conjuntos omega y alfa límites del sistema dinámico asociado a la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

      i. $\dot{p} = X(p)$ donde $X : R^2 \mapsto R^2$ está dada por

$$X(x,y) = (-y + (1-\rho)x, x + (1-\rho)y) \quad \text{donde } \rho(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$$

      Sugerencia: en coordenadas polares queda $\dot{\rho} = (1-\rho)\rho, \;\; \dot{\varphi} = 1$.

ii. En $M = \{(x,y) \in R^2 : |y| < 1\}$ sea la ecuación diferencial $(\dot{x}, \dot{y}) = (1-y^2)X(x,y)$, donde X es la función definida en la parte anterior.

(b) Sea $h : M \mapsto R^2$, donde M es el cuadrado de la última parte anterior, y $h(x,y) = (x, y/(1-y^2))$. Probar que es un homeomorfismo. Sea $\psi(x_0, y_0, t) = h(\phi(h^{-1}(x_0, y_0), t)$, donde $phi(p_0, t)$ es la solución general de la última ecuación de la parte a). Verificar que ψ es un sistema dinámico en R^2. Dibujar esquemáticamente las órbitas, ylos conjuntos alfa y omega-límites.

11. (a) En R^m sea $\phi(p,t)$ un sistema dinámico de variable real t y sea $p_0 \in R^m$. Probar que $\omega(p_0)$ es compacto y no vacío si y solo si la semiórbita positiva de p_0 tiene adherencia compacta. (sugerencia: $\omega(p_0)$ compacto y no vacío, está contenido en algún abierto U acotado, con adherencia compacta. Si la semiórbita no tuviera adherencia compacta, existiría $t_n \to +\infty$ tal que $\phi(p_0, t_n)$ tiende a un punto del borde de U.

    (b) Probar lo mismo que en la parte anterior para un sistema dinámcio por iterados de un hoemomorfismo f en R^m.

12. Probar que las órbitas del flujo irracional del toro no son curvas cerradas, y que las semiórbitas positivas y negativas son densas en el toro. Deducir que los conjuntos omega y alfa-límite son todo el toro. (Sugerencia: tomar como sección de Poincaré una circunferencia generatriz del toro, ver que la tranformación de Poincaré es una rotación de ángulo irracional. Identificar cada punto de la circunferencia con un número complejo $e^{2\pi i x}$ de módulo 1 y observar que el mapa de Poincaré se puede traducir como $f(x) = x + a$ con a real fijo irracional. Ver que si se demuestra lo que se pide para la órbita por el punto que corresponde a $x = 0$, entonces vale para cualquier otra órbita. No existen n y m enteros tales que $f^n(0) = m$, entonces la órbita por 0 no es cerrada. Además, el conjunto de complejos $\{e^{2n\pi i a} : n$ natural $\}$ es denso en la circunferencia y entonces la semiórbita positiva es densa en el toro.)

13. Sean M y N dos espacios topológicos homeomorfos entre sí. Y sean $f : M \mapsto M$ y $g : N \mapsto N$ dos homeomorfismos. Se dice que f y g son *conjugados* si existe un homeomorfismo $h : N \mapsto M$, llamada *conjugación* , tal que $h \circ g = f \circ h$.

    (a) Verificar que $h(o_g(p_0)) = o_f(h(p_0))$, $h(\omega(p_0)) = \omega(h(p_0))$, y que p_0 es periódico sefún g si y solo si $h(p_0)$ lo es según f.

    (b) Verificar que la conjugación es una relación de equivalencia en el conjunto de los homeomorfismos de M en M.

14. Sean M y N espacios topológicos y sean $f : M \mapsto M$ y $G : N \mapsto N$ homeomorfismos. Se dice que f es *semiconjugado* con g si existe una función $h : N \mapsto M$ llamada *semiconjugación* , tal que es continua, sobreyectiva, y cumple $f \circ h = h \circ g$

    (a) Verificar que $h(o_g(p_0)) = o_f(h(p_0))$, que $h(\omega(p_0)) \subset \omega(h(p_0))$ (¿vale la igualdad?), y que p_0 es periódico según g implica que $h(p_0)$ es periódico según f.

(b) Se considera en N la relación de equivalencia p es equivalente a q si $h(p) = h(q)$. Sea $\tilde{N}$ el espacio cociente (cuyos elementos son las clases de equivalencia $[p]$ cada una representada por algún p de N). Sea $\tilde{g} : \tilde{N} \mapsto \tilde{N}$, definida por $\tilde{g}([p]) = [g(p)]$. Verificar que $\tilde{g}$ está bien definida (es decir no depende de la elección del representante p en la clase de equivalencia $[p]$). ¿ Es $\tilde{h}$ un homeomorfismo en $\tilde{N}$. ¿Es $\tilde{h}$ conjugado a f? (Sugerencia: ver si $\tilde{h} : \tilde{N} \mapsto M$ dada por $\tilde{h}([p]) = h(p)$ es una conjugación).

15. Sean M y N espacios topológicos homeomorfos, y sean $\phi : M \times R \mapsto M$ y $\psi : N \times R \mapsto N$ sistemas dinámicos. Se dice que son conjugados si existe un homeomorfismo $h : N \mapsto M$ llamado conjugación, tal que

$$h \circ \psi(p_0, t) = \phi(h(p_0), t) \qquad \text{para todos } p_0 \in N,\ t \in R$$

Se dice que son equivalentes topológicamente si existe un homeomorfismo : $N \mapsto M$ y una función continua $s : N \times R \mapsto R$, llamada reparametrización, tales que:

$$s(p_0, \cdot) : R \mapsto R \quad \text{es biyectiva y monótona creciente}$$

$$\phi(h(p_0), t) = h(\psi(p_0), s(p_0, t)) \quad \text{para todos } p_0 \in N, t \in R$$

(a) Probar que si son conjugados, entonces son equivalentes topológicamente, y que si son equivalentes entonces $o_\phi(h(p_0)) = h(o_\psi(p_0))$, y $\omega(h(p_0)) = h(\omega(p_0))$, para todo $p_0 \in N$.

(b) Probar que dado un sistema dinámico ϕ en M, siempre existe uno ψ que sea conjugado con ϕ, en un espacio homeomorfo a M.

(c) Probar que dado un sistema dinámico ϕ en M, dado un esapcio N homeomorfo a M, y dada una función $t : M \times R \mapsto R$, continua, biyectiva y creciente en t, y tal que

$$t(q_0, s_1 + s_2) = t(q_0, s_1) + t(\phi(q_0, t(q_0, s_1), s_2)$$

para todos s_1 y s_2 en R, y para todo $q_0 \in M$, entonces existe un sistema dinámico ψ en N que es equivalente topológicamente con ϕ con reparametrización t.

(d) Probar que las reparametrizaciones uniformes, (esto es, que no dependen de p_0) de sistemas dinámicos que tienen algún punto no fijo ni periódico, son las lineales $s(p_0, t) = kt$.

TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras.

Octubre de 1998.

CAPITULO III
ESTABILIDAD SEGUN LIAPUNOV

1 Definiciones

Sea $\dot{x} = X(x,t)$, con $X : \Omega \subset I\!R^n \times I\!R \mapsto I\!R$ una ecuación diferencial en las hipótesis del teorema de Picard. Denotaremos con $\phi(x_0, t_0, t)$ a la solución definida en su intervalo maximal, que en $t = t_0$ toma el valor x_0.

Definición 1.1 La solución $x = x(t)$ definida para todo $t \geq t_0$ se llama *estable en el futuro según Liapunov,* si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x(t_0)\| < \delta$ implica que $\phi(y_0, t_0, t)$ está definida para todo $t \geq t_0$ y además $\|\phi(y_0, t_0, t) - x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Definición 1.2 La solución $x = x(t)$ definida para todo $t \geq t_0$ se dice *asintóticamente estable en el futuro según Liapunov,* si es estable (en el futuro) y además existe $\rho > 0$ tal que $\|y_0 - x(t_0)\| < \rho$ implica que $\|\phi(y_0, t_0, t) - x(t)\| \to_{t \to +\infty} 0$.

En forma similar pero sustituyendo $t \geq t_0$ por $t \leq t_0$ y $t \to +\infty$ por $t \to -\infty$, se define solución *estable y asintóticamente estable hacia el pasado, según Liapunov.*

Definición 1.3 Un *punto de equilibrio* de la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x,t)$ es un punto x_0 tal que la función constante $x(t) = x_0$ para todo $t \in I\!R$ es solución de la ecuación. A veces se llama punto de equilibrio a esa solución constante. Obsérvese que los puntos de equilibrio, si existen, son los puntos x_0 tales que $X(x_0, t) = 0$ para todo $t \in I\!R$. La órbita por un punto de equilibrio x_0 es el conjunto formado solo por el punto x_0.

Las definiciones de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad se aplican en particular a los puntos de equilibrio, resultando:

El punto de equilibrio x_0 es estable en el futuro si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta$ implica que $\|\phi(y_0, t_0, t) - x_0\| < \epsilon, \ \ \forall\, t \geq t_0$.

El punto de equilibrio es asintóticamente estable en el futuro si es estable en el futuro y además existe $\rho > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \rho$ implica que $\phi(y_0, t_0, t) \to_{t \to +\infty} x_0$.

Nota 1.4 Trabajaremos también con ecuaciones diferenciales en superficies de $\mathbb{R}^3$ o en variedades de $\mathbb{R}^n$. En estos casos también valen las definiciones de estabilidad anteriores.

EJEMPLOS

En el sistema $\dot{x} = y, \;\; \dot{y} = -x$, el punto de equilibrio $x = 0, \; y = 0$, es estable según Liapunov en el futuro y en el pasado, pero no lo es asintóticmante. En efecto, las órbitas verifican $\dot{x}x + \dot{y}y = 0$, es decir la derivada respecto a t de $x(t)^2 + y(t)^2$ es cero para todo t. Esto implica que para cualquier solución, la distancia al origen es constante. Entonces las órbitas están contenidas en circunferencias alrededor del origen.

Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 < x^2 + y^2 < 2\}$. Para $(x, y) \in \Omega$ sea la ecuación diferencial:
$\dot{x} = (1 - \rho^2)x + (\rho - y)y$
$\dot{y} = (1 - \rho^2)y - (\rho - y)x$, con $\rho^2 = x^2 + y^2$.
La ecuación es de la forma $\dot{p} = X(p)$ para $p \in \Omega$ y verifica las hipótesis del teorema de Picard.
El vector $X(p)$ puede descomponerse en

$$X(p) = (1 - \rho^2)\,(x, y) + (\rho - y)\,(y, -x)$$

El primer sumando es un vector radial (según la dirección $p - 0 = (x, y)$), y el segundo sumando es un vector ortogonal a la dirección $p - 0$.

La componente radial tiene el mismo sentido que el radio $p - 0$ si $\rho < 1$, y tiene sentido opuesto si $\rho > 1$, anulándose si $\rho = 1$.

La componente tangencial al radio es cero si $p = (0, 1)$ que es el único punto de equilibrio del sistema.

La órbita que pasa por p es una curva tangente en p al campo $X(p)$. Si inicialmente la distancia de p a 0 es uno, y p no es el punto de equilibrio $(0, 1)$, el vector tangente tiene exclusivamnte la componente tangencial no nula, y del mismo sentido que $(y, -x)$. La órbita es casi toda la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 (a la que le falta el punto $0, 1)$). Se recorre en sentido horario (el sentido del vector $(y, -x)$). Tiende al punto de equilibrio cuando $t \to +\infty$.

Si inicialmente la distancia de p a 0 es mayor que uno, entonces el vector tangente tiene una componente radial que apunta hacia el $(0, 0)$. Eso quiere decir que ρ va decreciendo. Pero no puede ser menor que 1, porque esta órbita no puede cortar a la otra contenida en la circunferencia de radio 1. Entonces $x(t)$ se mantiene dentro de la corona Ω, y por el teorema de salida de compactos está definida para todo $t \geq 0$. Análogamente la órbita que inicialmente está a distancia menor que uno del origen, está definida para todo $t \geq 0$ y su distancia al origen va creciendo pero siempre por abajo de uno.

Un croquis del plano de fases puede verse en la figura.

Todas las soluciones tienden al punto de equilibrio cuando $t \to +\infty$. sin embargo el punto de equilibrio no es asintóticmante estable, porque no es estable. No es estable porque en cualquier entorno de $(0, 1)$ existen puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ con $x_1 > 0$, que son tales que $\phi(p_1, t)$ se aleja más que $1/2$ del punto de equilibrio, para ciertos valores de $t \geq 0$, antes de volver a acercarse a él. Esto significa que algunas órbitas no se mantienen a distancia menor que cualquier $\epsilon > 0$ arbitrario que se dé del punto de equilibrio, aunque inicialmente estén tan cerca del mismo como se desee.

Como comentario final cabe recordar que el hecho de que todas las órbitas tiendan a una dada, no implica que ésta sea asintóticamente estable, porque puede no ser estable.

2 Estabilidad de puntos de equilibrio en sistemas autónomos.

FUNCIONES DE LIAPUNOV

Sea $\dot{x} = X(x)$ en las hi[ótesis del teorema de Picard.

Llamaremos $\varphi(x_1, t_1, t)$ a la solución, como función de t, cuyo gráfico pasa por el punto (x_1, t_1) dado como condición inicial. Como el sistema es autónomo, se verifica que $\varphi(x_1, t_1, t) = \varphi(x_1, 0, t - t_1)$. Usaremos la notación $\phi(x_1, t)$ para la solución $\varphi(x_1, 0, t_1)$.

Sea x_0 un punto de equilibrio, es decir, un punto tal que $X(x_0) = 0$. Se tiene $\phi(x_0, t) = x_0$ y su intervalo maximal es todo $\mathbb{R}$.

De acuerdo con las definiciones en la sección anterior, el punto de equilibrio x_0 es estable en el futuro si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta$ implica que $\phi(y_0, t)$ está definida para todo $t \geq 0$ y $\|\phi(y_0, t) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. El punto es asintóticamente estable en el futuro si, además de ser estable, existe $\rho > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \rho$ implica que $\phi(y_0, t) \to_{t \to +\infty} x_0$.

Definición 2.1 Sea $\dot{x} = X(x)$ en las hipótesis del teorema de Picard, y sea x_0 tal que $X(x_0) = 0$.

Una función real $V : U \mapsto \mathbb{R}$ definida en un entorno U de x_0 se llama *función de Liapunov* si es continua y además existe la derivada respecto a t en $t = 0$ de la función compuesta $V(\phi(x, t))$ para todo $x \in U$, y resulta ser una función continua de x. Esta derivada se denota como $\dot{V}(x)$.

Se observa que $\dot{V}(x)$ puede existir aunque $V(x)$ no sea diferenciable. Solo se está pidiendo que exista, cuando $h \to 0$ el límite del cociente incremental

$$\dot{V}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(\phi(x, h)) - V(x)}{h} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V(\phi(x, t))$$

Observaciones:

1. Sea V una función de Liapunov. Entonces, para todo T en el intervalo maximal de la solución $\phi(x, t)$ se cumple que $\dot{V}(\phi(x, T))$ es la derivada respecto a t en $t = T$ de la función compuesta $V(\phi(x, t))$.

   En efecto, por definición

   $$\dot{V}(\phi(x, T)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V(\phi(\phi(x, T), t))$$

   Como el sistema es autónomo se cumple que $\phi(\phi(x, T), t) = \phi(x, T + t)$, de donde

   $$\dot{V}(\phi(x, T)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V(\phi(x, T + t)) = \left.\frac{d}{du}\right|_{u=T} V(\phi(x, u))$$

   siendo $u = T + t$, como se quería probar.

2. Sea la ecuación $\dot{x} = X(x)$. Si $V(x)$ es una función diferenciable, se puede calcular $\dot{V}$ sin necesidad de conocer las soluciones $\phi(x, t)$. Resulta $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot X(x)$ donde $\cdot$ indica el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$. (Ver ejercicio 2).

Definición 2.2 Una función $H : U \mapsto I\!R$ definida en un entorno U del punto x_0 es *definida positiva (para x_0)* si se cumple $H(x_0) = 0$ y $H(x) > 0$ para todo $x \in U$ tal que $x \neq x_0$.

Es *semidefinida positiva* si $H(x_0) = 0$ y $H(x) \geq 0$ para todo $x \in U$.

Análogamente se define H *definida negativa,* y H *semidefinida negativa,* sustituyendo las desigualdades $H(x) > 0$ y $H(x) \geq 0$ respectivamente por $H(x) < 0$ y $H(x) \leq 0$.

TEOREMAS DE LIAPUNOV

Teorema 2.3 (Teorema 1 de Liapunov) *Si existe una función de Liapunov V definida positiva en un entorno del punto de equilibrio x_0 y si $\dot{V}$ es semidefinida negativa, entonces x_0 es estable en el futuro.*

Prueba:

Dado $\epsilon > 0$ (tomémoslo de modo que la bola $B_\epsilon(x_0)$, de centro x_0 y radio ϵ, esté contenida en U) hay que hallar $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta$ implique que $\phi(y_0, t)$ esté definida para todo $t \geq 0$ y cumpla $\phi(y_0, t) \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $t \geq 0$.

Sea $m = \min\{V(x) : \|x - x_0\| = \epsilon\} > 0$.

Como V es continua en x y como $V(x_0) = 0$ existe $\delta > 0$ (que puede tomarse menor que ϵ) tal que $\|y - x_0\| < \delta$ implica que $V(y) < m$.

Fijemos y_0 tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta$. Tenemos que $y_0 \in B_\epsilon(x_0)$.

Consideremos la función $V(\phi(y_0, t))$ definida para todo t en el intervalo maximal de $\phi(y_0, t)$ tal que $\phi(y_0, t) \in U$. Para esos valores de t se cumple:

$$\frac{d}{dt} V(\phi(y_0, t)) = \dot{V}(\phi(y_0, t)) \leq 0$$

Por eso, como función de t, $V(\phi(y_0, t))$ es continua y decreciente (no estrictamente), siempre que $\phi(y_0, t) \in U$.

Consideremos la ecuación diferencial restringida al abierto U. Sea b el extremo derecho del intervalo maximal de $\phi(y_0, t)$. Como, para todo $t \in [0, b)$ se cumple $V(\phi(y_0, t)) \leq V(y_0) < m$, y además $y_0 \in B_\epsilon(x_0)$, tenemos que $\phi(y_0, t) \in B_\epsilon(x_0)$. La solución está acotada dentro de la bola de centro x_0 y radio ϵ, dentro de U. Por el teorema de salida de compactos está definida para todo $t \geq 0$. (Es decir $b = +\infty$). ■

Teorema 2.4 (Teorema 2 de Liapunov) *Si existe una función de Liapunov $V : U \mapsto I\!R$ para el punto de equilibrio x_0, definida positiva, con $\dot{V}$ definida negativa, entonces x_0 es asintóticmante estable en el futuro.*

Nota: Lo mismo vale si se encuentra una función de Liapunov U definida negativa con $\dot{U}$ definida positiva. Basta tomar $V = -U$.

Prueba: Por el teorema anterior x_0 es estable en el futuro. Dado $\epsilon > 0$ (que puede considerarse tal que $B_\epsilon(x_0) \in U$), sea $\delta > 0$ de la definición de estabilidad en el futuro. demostraremos primero que $V(\phi(x, t)) \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$, para todo $x \in B_\delta(x_0)$, y después que $\phi(x, t) \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} x_0$.

Sea $y \neq x_0$, $y \in B_\delta(x_0)$. La función real $F(t) = V(\phi(y,t))$ positiva y diferenciable para todo $t \geq 0$, es decreciente estrictamente porque $\dot{F}(t) = \dot{V}(\phi(y,t)) < 0$. Entonces existe $\alpha = \lim_{t\to+\infty} F(t)$ y es mayor o igual que cero. Por absurdo supongamos que $\alpha > 0$. entonces $F(t) > \alpha > 0$ para todo $t \geq 0$.

Por la continuidad de V, existe $\gamma < \epsilon$ tal que $\|x - x_0\| < \gamma$ implica que $V(x) < \alpha$. Como $F(t) = V(\phi(y,t)) > \alpha$ tenemos que $\|\phi(y,t) - x_0\| \geq gamma$ para todo $t \geq 0$.

Entonces $\phi(y,t)$ está en la corona compacta $C = \{x \in I\!R^n : \gamma \leq \|x - x_0\| \leq epsilon\}$. Sea $-r = \max\{\dot{V}(x) talque x \in C\} < 0$. Tenemos que $\dot{F}(t) = \dot{V}(\phi(y,t)) \leq -r < 0$ para todo $t \geq 0$. integrando entre 0 y t se tiene $F(t) = F(0) + \int_0^t \dot{F}(t)\, dt \leq F(0) - rt \to_{t\to+\infty} -\infty$. Pero esto contradice que $F(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Hemos probado, por absurdo, que $\alpha = 0$.

Tenemos entonces que $V(\phi(y,t) \to_{t\to+\infty} 0$. Ahora, para finalizar la prueba, veamos que $\phi(y,t) \to_{t\to+\infty} x_0$.

Dado $\epsilon' > 0$ (que podemos suponer menor que ϵ), sea $m = \min\{V(x) : \epsilon' \leq \|x - x_0\| \leq \epsilon\} > 0$. Como $V(\phi(y,t))$ tiende a cero cuando $t \to +\infty$, existe T tal que para todo $t \geq T$ se cumple $V(\phi(y,t)) < m$. O sea, $\|\phi(y,t) - x_0\|$ no puede ser mayor o igual que ϵ' para ningún $t \geq T$.

Hemos probado que dedo $\epsilon' > 0$ arbitrariamente pequeño, existe T tal que para todo $t \geq T$ se cumple $\|\phi(y,t) - x_0\| < \epsilon'$. Esto es, $\phi(y,t) \to_{t\to+\infty} x_0$ como se quería demostrar. ■

Ejemplos:

1. Sea $\dot{x} = -x^3$ en $I\!R$. El origen es asintóticmante estable en el futuro pues $V(x) = x^2$ es definida positiva con $\dot{V}(x) = -2x^4$ definida negativa.

2. Sea $\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y + x$. tomando $V(x,y) = x^2 + y^2$ se pureba que el origen es asintóticamente estable en el futuro.

3. El péndulo con rozamiento $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta - a\dot{\theta}$ con a y ω constantes positivas, se escribe como sistema de primer de orden: $\dot{\theta} = z, \ \ \dot{z} = -\omega^2 \sin\theta - az$. tomando $V(\theta, z) = (z^2/2) + \omega^2(1 - \cos\theta)$ se demuestra que el origen $(\theta = 0, \ \dot{\theta} = 0)$ es asintóticmante estable en el futuro.

4. $\dot{x} = y - x^3, \ \ \dot{y} = -x - y^3$ tiene a $(0,0)$ como punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro. Basta tomar $V(x,y) = x^2 + y^2$. Sin embargo para la parte lineal del sistema, que es $\dot{x} = y, \ \ \dot{y} = -x$ el $(0,0)$ es estable pero no asintóticamente estable en el futuro.

Observaciones:

1. El recíproco del teorema 2 de Liapunov es cierto (teorema de Massera, que se demuestra más adelante). Sin embargo el recíproco del teorema 1 de Liapunov es falso (ver ejercicio 5).

2. Dada la ecuación $\dot{x} = X(x)$, considérese la nueva ecuación $\dot{x} = -X(x)$. Si $\phi(x_0, t)$ es la solución general de la primera, entonces $\phi(x_0, -t)$ es la de la segunda. Los puntos de equilibrio de una y otra ecuación son los mismos. El punto x_0 es un punto de equilibrio estable hacia el pasado de la primera ecuación si y solo si es un punto de equilibrio estable hacia el futuro de la segunda, y viceversa. También es cierto para la estabilidad asintótica.

Si V es una función de Liapunov definida positiva cerca de x_0, lo es también para la otra ecuación. Sin embargo la función $\dot{V}$ relativa a la segunda ecuación es opuesta a la que se obtiene usando la segunda ecuación.

Con esas consideraciones se obtienen los siguientes corolarios:

Corolario 2.5 *Si existe una función de Liapunov V para el punto de equilibrio x_0, definida positiva con $\dot{V}$ semidefinida positiva, entonces x_0 es estable hacia el pasado.*

Si existe una función de liapunov V definida positiva, con $\dot{V}$ definida positiva, entonces x_0 es asintóticamente estable hacia el pasado.

Definición 2.6 Se llama *fuente* a un punto de equilibrio asintóticamente estable hacia el pasado. Se llama *pozo* a un punto de equilibrio asintóticamente estable hacia el futuro.

Definición 2.7 Sea la ecuación $\dot{x} = X(x)$, X campo en M, (M variedad o subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$). Sea $E : M \mapsto \mathbb{R}$ una función continua no constante tal que $\dot{E}(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}E(\phi(x,t))$ existe y es cero para todo $x \in M$. Una tal función E se llama *preintegral* de la ecuación.

Se observa que, cuando existe una preintegral E, esta es una función de Liapunov con $\dot{E} = 0$. Entonces los puntos de equilibrio que sean mínimos relativos estrictos de la función E son estables en el futuro, y los máximos relativos estrictos son estables hacia el pasado. Como la preintegral E, por definición, no es constante, esos puntos de equilibrio estables no lo son asintóticamente (ver ejercicio 8).

Ejemplos:

1. La energía de los sistemas mecánicos conservativos es una preintegral.
2. Sea $\ddot{x} = f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Se puede escribir como $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x)$. Se obtiene que $\dot{y}y = \dot{x}f(x)$. Integrando respecto a t se tiene $(y^2/2) - \int_0^x f(x)\,dx =$ constante . La función $E(x,y) = (y^2/2) - \int_0^x f(x)\,dx$ es una preintegral de la ecuación.

TEOREMA DE CETAEV

Definición 2.8 El punto de equilibrio x_0 es *inestable* en el futuro según Liapunov, si no es estable en el futuro.

Así como el teorema 1 de Liapunov da una condición suficiente (pero no necesaria) para la estabilidad, mediante la existencia de alguna función de Liapunov adecuada, el siguiente teorema da una condición suficiente (tampoco es necesaria) para la inestabilidad, también mediante la existencia de funciones de Liapunov adecuadas.

Teorema 2.9 (Cetaev) *Sea $\dot{x} = X(x)$, $X(x_0) = 0$.*

Si existe una función de Liapunov V para el punto de equilibrio x_0, tal que $V(x_0) = 0$, $\dot{V}$ es definida negativa y para alguna sucesión $x_n \neq x_0$ que tiende a x_0 se cumple $V(x_n) \leq 0$, entonces x_0 es inestable en el futuro.

Prueba:

Sea $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B_\epsilon(x_0)} \subset U$, donde U es el entorno de x_0 dominio de la función de Liapunov V.

Por absurdo, si x_0 fuera estable, existiría $\delta > 0$ tal que $\|x_0 - y_0\| < \delta$ implica $\phi(y_0.t) \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $t \geq 0$.

Como $x_n \to x_0$, puede elegirse n tal que $\|x_n - x_0\| < \delta$. Entonces $\phi(x_n, t) \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $t \geq 0$.

siendo $\dot{V}$ definida negativa, y $x_n \neq x_0$, se tiene que $\dot{V}(\phi(x - n, t)) < 0$ para todo $t \geq 0$. Como para $t = 0$ $V(x_n) \leq 0$, se deduce que $V(\phi(x_n, t) \leq -k < 0$ para todo $t \geq T$, para cierto $T \geq 0$.

Como V es continua, existe $\rho > 0, \quad \rho < \epsilon$ tal que $\|x - x_0\| < \rho$ implica $|V(x)| < k$. Por lo anterior, tenemos que para todo $t \geq T$ el punto $\phi(x_n, t)$ está en la corona

$$C = \{y \in I\!R^n : \rho \leq \|y - x_0\| \leq \epsilon\}$$

Siendo $\dot{V}$ definida negativa, tiene un máximo negativo $-r$ en la corona C, y por lo tanto $\dot{V}(\phi(x_n, t)) \leq -r$ para todo $t \geq T$.

Integrando respecto a t se obtiene:

$$V(\phi(x_n, t)) = V(\phi(x_n, T)) + \int_T^t \dot{V}(\phi(x_n, t))\, dt \leq V(\phi(x_n, T)) - r(t - T) \to_{t \to +\infty} -\infty$$

Esto es absurdo, porque siendo V continua, está acotada en la bola de centro x_0 y radio ϵ, donde se mantiene la semitrayectoria $\phi(x_n, t)$. ■

TEOREMA DE MASSERA

El recírpoco del teorema 2 de Liapunov asegura que la existencia de funciones de Liapunov adecuadas es equivalente a la estabilidad asintótica del punto de equilibrio. Es el siguiente teorema, debido al profesor uruguayo José Luis Massera.

Teorema 2.10 (Massera) *Sea una ecuación $\dot{x} = X(x)$ en las hipótesis del teorema de Picard. Si x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces existe, en un entorno U del punto de equilibrio, una función de Liapunov V definida positiva con $\dot{V}$ definida negativa.*

Para la prueba necesitaremos algunas definiciones y un lema previo.

Definición 2.11 Un punto de equilibrio x_0 es *uniformemente asintóticamente estable (en el futuro)* si es asintóticamente estable y además existe $\rho > 0$ tal que $\phi(x, t)$ converge uniformemente en $x \in B_\rho(x_0)$ a x_0 cuando $t \to +\infty$.

Esto es, dado $\epsilon > 0$ existe T independiente de x, tal que $t > T$ implica $\|\phi(x, t) - x_0\| < \epsilon$ para todo $x \in B_\rho(x_0)$. O equivalentemente,

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in B_\rho(x_0)} \|\phi(x, t) - x_0\| = 0$$

Lema 2.12 *Si x_0 es un punto asintóticamente estable de un sistema autónomo $\dot{x} = X(x)$ entonces es uniformemente asintóticamente estable.*

Prueba: x_0 es asintóticamente estable. Entonces es estable y además existe $\rho > 0$ tal que $\|x - x_0\| \leq \rho$ implica que $\phi(x,t) \to_{t\to+\infty} x_0$.

Por absurdo, si x_0 no es uniformemente asintóticamente estable en $B_\rho(x_0)$, entonces existe una sucesión de tiempos t_n tendiendo a infinito (que puede elegirse tal que $t_n > n$) y existe un número real $\epsilon > 0$ que cumple: $\sup_{x\in B_\rho(x_0)} \|\phi(x,t_n) - x_0\| > \epsilon > 0$

Por definición de supremo, existe para cada n natural un punto $x_n \in B_\rho(x_0)$ tal que

$$\|\phi(x_n,t_n) - x_0\| > \epsilon/2 > 0 \text{ para todo } n \text{ natural}$$

Por la estabilidad de x_0, existe $\delta > 0$ (que puede elegirse menor que ρ), tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica $\|\phi(x,t) - x_0\| < \epsilon/2$ para todo $t \geq 0$.

De lo anterior, y observando que $\phi(x_n,t_n) = \phi(\phi(x_n,t), t_n - t)$ se deduce que

$$\|\phi(x_n,t) - x_0\| \geq \delta \text{ para todo } t \in [0,t_n] \text{ y para todo } n \text{ natural}$$

En particular se cumple la desigualdad anterior para todo $t \in [0,n]$ porque $t_n > n$.

Sea x_{n_j} una subsucesión convergente a $\overline{x} \in \overline{B_\rho(x_0)}$ de la sucesión de puntos x_n. Se tiene $\|\overline{x} - x_0\| \leq \rho$.

Tomemos $T \geq 0$ cualquiera real, y consideremos los naturales $n_j > T$. Se cumple $T \in [0, n_j]$, y por lo tanto $\|\phi(x_{n_j}, T) - x_0\| \geq \delta$. Haciendo j tender a infinito, se obtiene $\|\phi(\overline{x},T) - x_0\| \geq \delta$ para todo $T \geq 0$. Entonces $\phi(\overline{x},T)$ no tiende a x_0 cuando $T \to +\infty$. Pero $\|\overline{x} - x_0\| \leq \rho$, y lo anterior contradice la elección de ρ debida a la estabilidad asintótica de x_0. ■

Prueba del teorema de Massera:

No es restrictivo suponer que $x_0 = 0$ (pues de lo contrario se haría el cambio de variables $y = x - x_0$). Tomemos $\rho > 0$ tal que $\phi(x,t)$ converge uniformemente a x_0 cuando $t \to +\infty$ para $x \in B_\rho(0)$.

Construyamos una función de Liapunov del tipo:

$$V(x) = \int_0^{+\infty} g(\|\phi(x,s)\|)\, ds$$

definida en $B_\rho(0)$, eligiendo $g : [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ de modo que:

1. g sea creciente estrictamente, y $g(0) = 0$.
2. g sea continua
3. $\int_0^{+\infty} g(\sup_{x\in B_\rho(0)} \|\phi(x,s)\|)\, ds$ sea convergente.

Esas tres condiciones aseguran lo siguiente:

a) La existencia y continuidad de $V(x)$: en efecto $g(\|\phi(x,s)\|)$ es continua y está mayorada para todo $x \in B_\rho(0)$ por una función de integral convergente. Entonces $\int_0^{+\infty} g(\|\phi(x,s)\|)\, ds$ converge uniformemente para $x \in B_\rho(0)$. Luego $V(x)$ es continua.

b) $V(x)$ es definida positiva, pues $V(0) = \int_0^{+\infty} g(0)\, ds = 0$ y si $x \neq 0$ entonces $g(\|\phi(x,s)\|) > 0$ y $V(x) > 0$.

c)

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_0^{+\infty} g(\|\phi(x,t+s)\|)\,ds = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_t^{+\infty} g(\|\phi(x,u)\|\,du = -g(\|x\|)$$

es continua y definida negativa.

Basta entonces construir una función g que cumpla 1. 2. y 3.

Sea $h(s) = \sup\{\|\phi(x,s)\| : x \in B_\rho(0)\}$. Debido a que 0 es uniformemente asintóticamente estable, se cumple que $\lim_{s\to+\infty} h(s) = 0$. Entonces existe una sucesión $t_n \to +\infty$ tal que $h(t) < 1/n$ si $t \in [t_n, t_{n+1}]$.

Elijamos números a_i, con $0 < a_i < 1/(2^i(t_{i+1} - t_i))$

Sea $g : [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ una función creciente tal que $g(0) = 0$ y $0 < g(t) < a_i$ si $t \in (1/(i+1), 1/i]$.

Se tiene

$$\int_0^\infty g(h(s))\,ds \le \int_0^{t_1} g(h(t))\,dt + \int_{t_1}^{t_2} g(1)\,dt + \int_{t_2}^{t_3} g(1/2)\,dt + \ldots$$

$$= \int_0^{t_1} g(h(t))\,dt + \sum_{i=1}^{\infty} g(1/i)(t_{i+1} - t_i) \le \int_0^{t_1} g(h(t))\,dt + \sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i = K$$

Lo anterior prueba el teorema. Se observa que $g \circ h$ es integrable porque es continua. En efecto g es continua por construcción, y h es continua porque

$$|h(t) - h(t_0)| \le sup_{\|x\|<\rho} \|\phi(x,t) - \phi(x,t_0)\| < \epsilon$$

La última desigualdad es cierta para todo x en el compacto $B_\rho(0)$ por la continuidad de $\phi(x,t)$ respecto de (x,t). ∎

3 Estabilidad de la parte lineal de los sistemas autónomos

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ donde A es una matriz $n \times n$ y x es un vector de $\mathbb{R}^n$. 0 es un punto de equilibrio del sistema. Consideremos la función $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definida mediante:

$$V(x) = Mx \cdot x$$

donde $\cdot$ indica el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$ y M es una matriz *simétrica* real. La función $V(x)$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$, y es una función de Liapunov.

Estudiemos $\dot{V} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Llamamos $x(t)$ a la solución que en $t = 0$ toma el valor x. Se tiene:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Mx(t) \cdot x(t) = M\dot{x} \cdot x + Mx \cdot Ax = MAx \cdot x + A^tMx \cdot x = (MA + A^tM)x \cdot x$$

La matriz $MA + A^tM$ es simétrica, y la función $\dot{V}(x)$ es también una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$.

La manera de pasar de la matriz simétrica correspondiente a la forma cuadrática $V(x)$, a la matriz simétrica de la forma cuadrática $\dot{V}(x)$ es:

$$M \mapsto MA + A^t M$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema lineal dado.

Lema 3.1 *Si la matriz A tiene todos los valores propios con parte real negativa, entonces la transformación T que lleva una matriz simétrica M en otra simétrica N mediante:*

$$T(M) = N = MA + A^t M$$

es una transformación lineal biyectiva.

Prueba: T es una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita en sí mismo (el espacio de las matrices reales simétricas $n \times n$). Basta pues demostrar que el núcleo de T es 0.

Sea M en el núcleo de T. Eso es:

$$MA + A^t M = 0$$

Se sabe que la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ con el dato inicial $x(0) = 0$ es $x(t) = e^{At}x_0$. Ya se vio que como los valores propios de A tienen todos parte real negativa, entonces 0 es asintóticamente estable en el futuro. (Capítulo I). Entonces $x(t) \rightarrow_{t \to +\infty} 0$.

Consideremos $V(x) = Mx \cdot x$ donde M está en el núcleo de T. Entonces $\dot{V}(x) = (MA + A^t M)x \cdot x = 0$ para todo x. Es decir $V(x)$ es una preintegral de la ecuación, porque es constante sobre las trayectorias.

Entonces $V(x_0) = V(x(t))$ para todo t y es igual al límite de $V(x(t))$ cuando $t \to +\infty$, que es cero. Tenemos $V(x_0) = 0$ para todo x_0. Es decir, la forma cuadrática $V(x)$ es idénticamente nula. Esto es: la matriz simétrica M es nula. ∎

Teorema 3.2 *Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$. Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa entonces:*

a) Dada una forma cuadrática cualquiera $W(x) = Nx \cdot x$ existe una única forma cuadrática $V(x)$ tal que $\dot{V} = W$.

b) Si además $W(x)$ es dada definida negativa, entonces $V(x)$ resulta definida positiva.

Prueba:

a) Dada $W(x) = Nx \cdot x$, con N matriz simétrica, sea $M = T^{-1}(N)$ la matriz preimagen de N por la transformación T del lema anterior. La forma cuadrátrica $V(x) = Mx \cdot x$ verifica lo deseado. La unicidad se debe a la inyectividad de la transformación T.

b) Supongamos que $W(x)$ es definida negativa, y por absurdo existe algún $x_1 \neq 0$ tal que $V(x_1) \leq 0$. Tomemos $x_n = (1/n)x_1$. Entonces tenemos $V(x_n) = V((1/n)x_1) = (1/n^2)V(x_1)$, porque V es una forma cuadrática. Como $\dot{V}(x) = W(x)$ es definida negativa, aplicando el teorema de Cetaev se deduce que 0 es inestable. Esto es absurdo por lo demostrado en el capítulo 1: como todos los valores propios de A tienen parte real negativa, 0 es asintóticamente estable. ■

Nota: El teorema anterior da un método para construir funciones de Liapunov (cuadráticas) de sistemas lineales asintóticamente estables.

Consecuencias: Para el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ con todos los valores propios de A con parte real negativa, se cumple:

1. Existe una única forma cuadrática $V(x)$ tal que $\dot{V}(x) = -\|x\|^2$ y resulta ser definida positiva.
2. Dada un forma cuadrática V definida positiva, existe una única forma cuadrática U (que resulta ser definida negativa) tal que $\dot{U} = V$. (Basta aplicar el teorema anterior con $W = -V$)
3. Dada un forma cuadrática W definida positiva, existen únicas las formas cuadráticas U y V tales que $\dot{U} = V$ y $\dot{V} = W$, y resultan U definida positiva y V definida negativa.

APROXIMACION LINEAL

Los resultados anteriores que fueron probados sólo para sistemas lineales, pueden aplicarse a sistemas autónomos no lineales cuando la parte lineal tiene todos los valores propios con parte real negativa.

Teorema 3.3 *Sea $\dot{x} = X(x)$ con X de clase C^1. Sea x_0 un punto de equilibrio, es decir $X(x_0) = 0$.*

Si la matriz jacobiana $X'(x_0)$ tiene todos los valores propios con parte real negativa, entonces existe una función de Liapunov V para el punto de equilibrio x_0, que es una forma cuadrática en $(x - x_0)$ definida positiva y tal que $\dot{V}$ es definida negativa en un entorno de x_0 . Por lo tanto x_0 es asintóticamente estable en el futuro.

Prueba:

No es restrictivo considerar que $x_0 = 0$ ya que mediante el cambio de variables $y = x - x_0$ no se modifica la matriz jacobiana.

Llamando A a la matriz jacobiana de X en 0, se cumple: $X(x) = Ax + f(x)$ donde $f(x) = X(x) - Ax$.

Por la regla de Barrow

$$X(x) - X(0) = \int_0^1 \frac{d}{du}(X(ux))\, du = \int_0^1 X'(ux)x\, du$$

Luego:

$$f(x) = X(x) - Ax = \int_0^1 (X'(ux) - A)x\, du$$

$$\|f(x)\| \leq \int_0^1 \|X'(ux) - X'(0)\| \|x\|\, du$$

Como X' es continua, porque X es de clase C^1, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|X'(ux) - X'(0)\| < \epsilon \quad \text{si } \|x\| < \delta, \; 0 \leq u \leq 1$$

Entonces:
$$\|f(x)\| \leq \epsilon\|x\| \ \text{ si } \|x\| < \delta$$

Sea $V(x) = Mx{\cdot}x$ la única forma cuadrática definida positiva tal que $(MA{+}A^tM)x{\cdot}c = -\|x\|^2$
Se cumple
$$\dot{V}(x) = M\dot{x} \cdot x + Mx \cdot \dot{x} = MX(x) \cdot x + Mx \cdot X(x) =$$
$$= M(Ax + f(x)) \cdot x + Mx \cdot (Ax + f(x)) = (MA + A^tM)x \cdot x + 2Mx \cdot f(x) =$$
$$= -\|x\|^2 \left(1 - 2\frac{Mx \cdot f(x)}{\|x\|^2}\right)$$

Por otro lado sabemos que
$$\frac{|Mx \cdot f(x)|}{\|x\|^2} \leq \frac{\|M\|\|x\|\|f(x)\|}{\|x\|^2} \leq \|M\|\epsilon \ \text{ si } \|x\| < \delta$$

Como ϵ es arbitrario, podemos elegirlo de modo que $2\|M\|\epsilon < 1$, y resulta:
$$\dot{V}(x) \leq -\|x\|^2(1 - 2\|M\|\epsilon) < 0 \ \text{ si } 0 < \|x\| < \delta$$

Entonces $\dot{V}$ es definida negativa, y por el teorema 2 de Liapunov, el punto de equilibrio es asintóticamente estable. ■

Ejemplos:

1. Sea la ecuación $\dot{x} = -\sin x + x^3/2$, con $x \in I\!R$. El punto de equilibrio 0 es asintóticamente estable, ya que la parte lineal es $\dot{x} = -x$.

2. El péndulo con rozamiento $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\omega - a\dot{\omega}$, con $a < 0$, se lleva al sistema de primer orden: $\dot{\theta} = y, \ \ \dot{y} = -\omega^2 \sin\theta - ay$. El campo X es $X(\theta, y) = (y, -\omega^2 \sin\theta - ay)$. El $(0,0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro, pues la matriz Jacobiana en $(0,0)$ es
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{bmatrix}$$
con valores propios de parte real $-a/2$ negativa.

Nota: Un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ es asintóticamente estable si y solo si todos los valores propios de A tienen parte real negativa. Pero en un sistema no lineal $\dot{x} = X(x)$ las partes reales de los valores propios de $X'(x_0)$ negativas es condición suficiente pero no necesaria para la estabilidad asintótica en el futuro del punto de equilibrio x_0. (Ver ejercicio 13).

Ejemplos:

1. Sea el sistema $\dot{x} = -y + x^3, \ \ \dot{y} = x + y^3$. El punto de equilibrio $(0,0)$ no es estable por el teorema de Cetaev, usando $V(x,y) = x^2 + y^2$. Sin embargo la parte lineal del sistema es $\dot{x} = -y, \ \ \dot{y} = x$ que tiene al $(0,0)$ como punto de equilibrio estable.

2. Sea el sistema $\dot{x} = 2y^3, \;\; \dot{y} = -x^3$. El punto de equilibrio $(0,0)$ es estable, como se deduce del teorema de Liapunov, usando la función $V(x,y) = x^2 + y^4$ con $\dot{V} = 0$. Sin embargo el sistema lineal es $\dot{x} = 0, \;\; \dot{y} = -x$ que tiene a $(0,0)$ como punto de equilibrio inestable.

EJERCICIOS

1. Para la ecuación diferencial $\dot{x} = t - x^2$ (estudio cualitativo del capítulo I), ¿qué soluciones son estables en el futuro?, ¿qué soluciones son asintóticamente estables en el futuro?

2. Sea $V(x)$ una función de Liapunov para $\dot{x} = X(x)$ en R^n. Probar que si V es diferenciable entonces $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot X(x)$ donde $\cdot$ indica el producto interno usual en R^n, y $\nabla V(x)$ es el vector gradiente de V, esto es $\nabla V(x) = (\partial V/\partial x_1, \ldots, \partial V/\partial x_n)$, para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$.

3. Sea la ecuación del péndulo sin rozamiento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\theta$$

   donde θ es un ángulo y w^2 es una constante positiva.

   (a) Probar que admite una preintegral

   (b) demostrar que $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ es un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable en el futuro. (sug. probar que si las condiciones iniciales están cercanas a $(0,0)$, entonces las órbitas son periódicas, observando que la preintegral igual constante es la ecuación de una curva cerrada).

4. Sea $\dot{x} = X(x)$ con $X(x_0) = 0$. Se sabe que existe una función de Liapunov V definida positiva en un entorno de x_0 tal que $V(\phi(x,t))$ es estrictamente decreciente con t, para todo $x \neq x_0$ (y para todo t tal que $V(\phi(x,t))$ esté definida).

   (a) ¿Es x_0 asintóticamente estable en el futuro? (Sugerencia: reemplazar $\dot{V}$ por $V(\phi(x,1)) - V(x)$

   (b) Probar que $(0,0)$ es asintóticamente estable en el futuro en $\dot{x} = -y - y^2x^3, \;\; \dot{y} = x - y^5$

   (c) Probar que $(0,0)$ es estable en el futuro pero no asintóticamente estable, en el sistema: $\dot{x} = -y - yx^3, \;\; \dot{y} = x - y^4$. (Sugerencia: tomar una trayectoria y ver que mientras está en el semiplano $y > 0$ la distancia al origen decrece. Ver que todas las órbitas son cerradas, observando que son simétricas respecto al eje de las x: si se tiene una solución, invirtiendo los tiempos y el signo de las y, se obtiene otra solución).

5. Sea $X : (-1,1) \mapsto R$ definida por $X(x) = x^3 \sin^2(1/x)$ si $x \neq 0$, $X(0) = 0$.

   (a) Hallar los puntos de equilibrio y dibujar las órbitas. Verificar que 0 es estable pero no asintóticamente, en el futuro.

(b) Probar que no existen funciones de Liapunov definidas positivas en un entorno de 0 con $\dot{V}$ semidefinida o definida negativa. (El recíproco del teorema de Liapunov 1 es falso).

6. Sea x_0 un punto de equilibrio asintóticamente estable de $\dot{x} = X(x)$.

   (a) Probar que exsite un entorno V de x_0 tal que, si $x \in V$ entonces $\phi(x,t)$ es estable en el futuro.

   (b) Ver que la afirmación anterior no es cierta si se pide sólo que x_0 sea estable. (Buscar un ejemplo en R, de la forma $\dot{x} = \lambda(x)x$ donde $\lambda(x)$ se anula en una sucesión $x_n \to 0$.

7. Croquizar las órbitas de algún sistema dinámico en R^2 que tenga un único punto de equilibrio x_0 inestable en el futuro, pero que $\phi(x,t) \to x_0$ para todo $x \in R^2$.

8. Sea $E : R^n \mapsto R$ una preintegral de $\dot{x} = X(x)$, con $X(x_0) = 0, \quad E(x) > E(x_0)$ para todo $x \neq x_0$ en un entorno U de x_0.

   (a) Demostrar que x_0 es estable en el futuro y en el pasado.

   (b) Demostrar que x_0 no es asintóticamente estable.

   (c) Estudiar la estabilidad en el futuro y en el pasado de $(0,0)$ en $\dot{x} = \sin y, \quad \dot{y} = -x^3$ en R^2.

9. Probar que los pozos no son estables Liapunov en el pasado, y que las fuentes no son estables en el futuro. (sugerencia: teoremas de Massera y Cetaev).

10. Sabiendo que existe una función de Liapunov V con $\dot{V}$ definida negativa en un entorno del punto de equilibrio x_0, demostrar que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

    (a) $V(x) - V(x_0)$ es definida positiva en algún entorno de x_0.

    (b) x_0 es estable en el futuro

    (c) x_0 es asintóticamente estable en el futuro.

    (Sugerencia: b) implica a) por Cetaev).

    Deducir que cuando $\dot{V}$ es definida positiva o negativa, el estudio del signo de $V(x) - V(x_0)$ en un entorno de x_0 da la afirmación precisa sobre la estabilidad del punto de equilibrio, tanto en el futuro como en el pasado. (Es el caso de los sitemas mecánicos disipativos).

11. Demostrar que si existe una función de Liapunov V con $\dot{V}$ definida negativa en un entorno del punto de euilibrio x_0, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in B_\epsilon(x_0)$ con $x \neq x_0$, existe algún $t \in R$ en que $\phi(x,t)$ no pertenece a $B_\epsilon(x_0)$. (La única órbita que permanece en el entorno $B_\epsilon(x_0)$ para todo t es la de x_0).

12. Probar esta versión más general del teorema de Cetaev:

    Si existe una función de Liapunov V para el punto de equilibrio x_0 tal que

$$\{x : x \neq x_0;\ V(x) \leq V(x_0)\} \subset \{x : \dot{V}(x) < 0\}$$

y si existe $x_n \neq x_0$, con $x_n \to x_0$ tal que $V(x_n) \leq V(x_0)$, entonces x_0 es inestable en el futuro.

13. Probar que $(0,0)$ es asintóticamente estable en $\dot{x} = -y - x^3$, $\dot{y} = x - y^3$, aunque la parte real de los valores propios de $X'(0,0)$ no son negativos. $(X(x,y) = (-y - x^3, x - y^3))$.

14. Probar que el sistema $\dot{x} = -y - y^2x^3$, $\dot{y} = x - y^5$ tiene $(0,0)$ asintóticamente estable, pero no existe ninguna función V de Liapunov cuadrática, definida positiva con $\dot{V}$ definida negativa.

15. (a) Encontrar una matriz A en que la transformación T definida en el espacio de matrices simétricas por $T(M) = MA + A^tM$ no sea biyectiva.
    (b) Demostrar que para tales matrices A el sistema $\dot{x} = Ax$ admite una preintegral.

16. Sea A una matriz invertible real $n \times n$, cuyos valores propios tienen parte real negativa. Demostrar que existe un producto interno en R^n tal que con respecto a él, la norma de la matriz e^A es menor que 1. (Es decir, que existe $\lambda > 0$ menor que 1, tal que $\|e^Ax\| \leq \lambda\|x\|$ para todo $x \in R^n$).

    (Sugerencia: elegir el producto interno usando la forma cuadrática $Mx \cdot x$ definida positiva, que es función de Liapunov para el $(0,0)$ en la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$).

17. Demostrar que $(0,0)$ es asintóticamente estable en grande en $\dot{x} = f(x) - y$, $\dot{y} = f(y) + x$, siendo $f : R \mapsto R$ una función continua, lipschitziana, impar y tal que $f(x) < 0$ para todo $x > 0$.

18. Demostrar el siguiente teorema:

    Si existe una función de Liapunov $V : R^n \mapsto R$ definida positiva en 0, tal que $V(x) \to +\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$, y tal que para todo $x \neq 0$, $V(\phi(x,t))$ es estrictamente decreciente con t (donde esté definida), entonces 0 es asintóticamente estable en grande en el futuro.

19. Probar que si 0 es el único punto de equilibrio de $\dot{x} = X(x)$, y existe una función de Liapunov V definida positiva, tal que $V(x) \to +\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$, y tal que $\dot{V}$ es semidefinida negativa que se anula solo en un cerrado Q de puntos aislados, entonces x_0 es asintóticamente estable en grande en el futuro.

20. Demostrar que x_0 es asintóticamente estable en grande en el futuro si y solo si x_0 es un pozo y toda órbita es estable. (Sugerencia: los puntos del borde de la cuenca no pueden ser estables).

21. (a) Dar un ejemplo $\dot{x} = X(x)$ en R^2, en que $(0,0)$ sea punto de equilibrio asintóticamente estable en grande en el futuro, pero que la parte real de los valores propios de $X'(x) + X'(X)^t$ no sean todos negativos para algún x.
    (b) Idem pero que la parte real de los valores propios de $X'(x)$ no sean todos negativos para algún x.

22. Sea $\dot{x} = f(x)$ en R, con $f : R \mapsto R$ continua, $f(x_0) = 0$. Probar que x_0 es asintóticamente estable si y solo si $V(x) = (x - x_0)^2$ es definida positiva con $\dot{V}$ definida negativa en un entorno de x_0.

23. (a) Demostrar que si x_0 es punto de equilibrio asintóticamente estable y K es compacto, contenido en la cuenca de atracción de x_0, entonces x_0 es uniformemente asintóticmante estable en K (sugerencia: usar lema).
    (b) Demostrar que la función $V(x)$ que se construye en la prueba del teorema de Massera, puede extenderse a toda la cuenca de atracción C. (Sugerencia: $g(u)$ está definida para todo $u \geq 0$. Para todo $x_0 \in C$ la integral $\int_0^\infty g(\|\phi(x,s)\|)\, ds$ converge uniformemente en un compacto que contiene a x_0).

24. Demostrar que si x_0 es un punto asintóticamente estable en grande, entonces la función $V(x)$ construida en la prueba del teorema de Massera, se puede definir de modo que cumpla $V(x) \to= \infty$ cuando $\|x\| \to \infty$.

25. Si la cuenca C de atracción de un pozo x_0 no es todo R^n, entonces investigar qué comportamiento tiene la función $V(x)$ construida en la prueba del teorema de Massera, cuando $x_n \to \bar{x} \in \partial C$.

    (Sugerencia: Dado K compacto en C, y dado T, existe N tal que para todo $n > N$: x_n no pertenece a K y $\{\phi(x_n, t) : 0 \leq t \leq T\}$ no corta a K. entonces $V(x_n) = \int_0^\infty g(\|\phi(x_n, s)\|)\, ds > Tg(\text{diam } K)$ para todo $n > N$).

26. Demostrar los teoremas de Liapunov para homeomorfismos.

27. Demostrar el teorema de Massera para homeomorfismos.

28. Enunciar y demostrar una versión del teorema de Cetaev para homeomorfismos.

29. Si $f : R^n \mapsto R^n$ es un difeomorfismo tal que $f(0) = 0$ y $f'(0)$ tiene valores propios con módulo menor que 1, probar que 0 es asintóticmante estable. (Sugerencia: Utilizando la norma adaptada del ejercicio 16 , con la matriz $A = \log f'(0)$ escribir $f(x) = Ax + \Delta(x)$ con $\|\Delta(x)\|/\|x\| \to_{x\to 0} 0$.)

30. Sea $\dot{x} = y + (1 - \rho^2)x$, $\dot{y} = -x + (1 - \rho^2)y$ donde $\rho^2 = x^2 + y^2$.
    (a) Verificar que la circunferencia unitaria S^1 es una órbita periódica.
    (b) Probar que S^1 es orbitalmente estable.
    (c) Probar que todas las órbitas son estables.

    (Sugerencia: En polares $\dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2)$, $\dot{\varphi} = -1$, entonces $\rho(t) \to_{t\to+\infty} 1$ y todas las órbitas se recorren con la misma velocidad angular).

31. Sea
$$\dot{x} = \rho y - x\frac{(\rho - 1)^3}{\rho}, \quad \dot{y} = \rho x - y\frac{(\rho - 1)^3}{\rho}$$
    donde $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$

(a) Verificar que la circunferencia unitaria es una órbita periódica, y que es orbitalmente estable.

(b) Probar que S^1 no es estable y que las demás órbitas sí lo son. (Sugerencia: En polares integrando queda $\rho(t) \to_{t\to+\infty} 1$ y $\varphi(t) = \varphi_0 + t + 1/(\|\rho_0 - 1\|)(1-(1-2t(\|\rho_0 - 1\|)^{1/2}))$ si $\rho_0 \neq 1$, pero $\varphi(t) = \varphi_0 + t$ si $\rho_0 = 1$)

Capítulo 3 ESTABILIDAD según LIAPUNOV

1 DEFINICIONES

Sea $\dot{x} = X(x,t)$; $X: \Omega \subset R^n \times R \to R^n$ en las hipótesis del teorema de Picard. Denotaremos con $\phi(x_0,t_0,t)$ a la solución definida en su intervalo maximal, que en $t = t_0$ toma el valor x_0.

DEFINICION 1

Una solución particular $x(t)$, definida para todo $t \geqslant t_0$, se llama ESTABLE EN EL FUTURO (según LIAPUNOV), si

dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x(t_0)\| < \delta \Rightarrow$ $\phi(y_0,t_0,t)$ está definida para todo $t \geqslant t_0$ y cumple:

$$\|\phi(y_0,t_0,t) - x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0$$

DEFINICION 2

Una solución particular $x(t)$, definida para todo $t \geqslant t_0$, se dice ESTABLE ASINTOTICAMENTE EN EL FUTURO, si a) es estable en el futuro y b) existe $\rho > 0$ tal que $\|y_0 - x(t_0)\| < \rho \Rightarrow$

$$\lim_{t \to +\infty} \|\phi(y_0,t_0,t) - x(t)\| = 0$$

DEFINICION 3

Una solución particular $x(t)$, definida para todo $t \leq t_0$, se dice ESTABLE EN EL PASADO (según LIAPUNOV), si

dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x(t_0)\| < \delta \Rightarrow$ $\phi(y_0,t_0,t)$ está definida para todo $t \leq t_0$ y cumple:

$$\|\phi(y_0,t_0,t) - x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \leq t_0$$

En forma similar, para $t \leq t_0$, se define solución ASINTOTICAMENTE ESTABLE EN EL PASADO.

EJEMPLO

En el sistema: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$ la órbita $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $\forall t$ es estable según Liapunov en el futuro y en el pasado, pero no lo es asintóticamente. En efecto:

Las órbitas verifican $\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2\right) = 0$$

o sea, la función $x_1(t)^2 + x_2(t)^2$ es constante. Entonces las órbitas están co ntenidas en circunferencias alrededor del origen.

EJEMPLO

Sea $\Omega = \{(x,y) \in R^2 \ ; \ \frac{1}{2} < x^2+y^2 < 2\}$

$$\begin{cases} \dot{x} = (1-\rho^2)x + (\rho - y)y \\ \dot{y} = (1-\rho^2)y - (\rho - y)x \end{cases}$$ con $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, definida $\forall (x,y) \in \Omega$.

La ecuación verifica las hipótesis del teorema de Picard.
El vector $X(p) = ((1-\rho^2)x + (\rho-y)y \ , (1-\rho^2)y - (\rho-y)x)$ puede descomponerse en $(1-\rho^2)(x,y) + (\rho-y)(y,-x)$

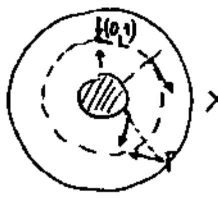
El primer sumando es un vector radial (según $\vec{0p}=(x,y)$), y el segundo sumando es ortogonal a $\vec{0p}=(x,y)$.

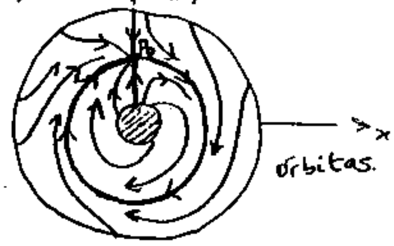
La componente radial tiene el mismo sentido que $\vec{0p} = (x,y)$, si $\rho < 1$ y tiene sentido opuesto si $\rho > 1$. La componente ortogonal a $\vec{0p}$ es cero solo si $p = (0,1)$, que es el único punto de equilibrio.

La órbita que pasa por p, es una curva tangente en p, al vector $X(p)$. Si la norma de $\vec{Op}$ es 1, entonces el vector tangente a la órbita es ortogonal al vector radial p-O. La órbita se mantiene contenida en la circunferencia de radio 1.

Si la norma de $\vec{Op}$ es mayor que 1, el vector tangente tiene una componente radial que apunta hacia O. La órbita, para tiempos $t \geqslant 0$, tiene una distancia a O decreciente con t, pero siempre mayor que 1 (porque la órbita por p no puede cortar a otra órbita distinta en el circunferencia de radio 1). Luego $\{\phi(p,t) ; \quad t \geqslant 0\}$ está acotado dentro de Ω, y por el teorema del intervalo maximal, está definida para todo $t \geqslant 0$. Análogamente, cuando $\|p\| < 1$.

Un croquis de las órbitas es:





Todas las órbitas tienden a $p_0 = (0,1)$ cuando $t \to +\infty$. Sin embargo, p_0 no es estable (ni asintót. estable) porque en cualquier entorno de p_0, existen puntos $p_1 = (x_1, y_1)$, con $x_1 > 0$. La semiórbita $\phi(p_1, t)$ para $t \geqslant 0$, se aleja más que $\frac{1}{2}$ de p_0, antes de acercarse nuevamente a p_0.

1.2 Puntos de equilibrio

Un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x,t)$, es una solución $\phi(x_0, t_0, t) = x_0$ para todo t en el int. maximal.
(Como la solución es constante, la derivada respecto de t es cero, y por lo tanto x_0 verifica: $X(x_0, t) = 0 \quad \forall t$ en el int. maximal)

Las definiciones 1 y 2 se aplican en particular para puntos de equilibrio:
x_0 es un punto de equilibrio estable en el futuro, si $\phi(x_0, t_0, t) = x_0$ para todo $t \geqslant t_0$, y si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|y_0 - x_0\| < \delta$ entonces $\phi(y_0, t_0, t)$ está definida para todo $t \geqslant t_0$ y cumple:

$$\|\phi(y_0, t_0, t) - x_0\| < \varepsilon \qquad \forall t \geqslant t_0$$

es un punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro si es estable en el futuro y además existe $\rho > 0$ tal que

$$\|y_0 - x_0\| < \rho \quad \Rightarrow \quad \phi(y_0, t_0, t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} x_0$$

Nota:
Trabajaremos también con ecuaciones diferenciales autónomas, definidas en superficies de R^3, o sobre variedades de R^n (cap. 1).
En estos casos también se generalizan las definiciones 1, 2 y 3.

2. ESTABILIDAD DE PUNTOS DE EQUILIBRIO EN SISTEMAS AUTONOMOS

2.1. FUNCIONES DE LIAPUNOV

Sea $\dot{x} = X(x)$ en las hipótesis del teorema de Picard.
Como el sistema es autónomo se verifica $\phi(x_1, t_1, t) = \phi(x_1, 0, t-t_1)$
Usaremos la notación $\phi(x_1, t)$ para la solución $\phi(x_1, 0, t)$.

Sea x_0 un punto que verifica $X(x_0)=0$ Entonces $\phi(x_0,t) = x_0$ y su intervalo maximal es todo R. Luego, es un punto de equilibrio.

El punto de equilibrio x_0 es estable en el futuro según Liapunov, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta \Rightarrow \phi(y_0, t)$ está definida para todo $t \geq 0$ y además $\|\phi(y_0,t) - x_0\| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$ El punto es asintót. estable en el futuro, si además de lo anterior, existe $\delta > 0$ tal que $\|\phi(y_0, t) - x_0\| \to 0$ con $t \to +\infty$.

DEFINICION

Sea $\dot{x} = X(x)$ en las hipótesis de Picard, y x_0 ; $X(x_0) = 0$.
Una función $V: U \to \mathbb{R}$ definida en un entorno U del punto x_0 , se llama FUNCION DE LIAPUNOV para el punto de equilibrio x_0 , si es c continua y además

$$\dot{V}(x) \overset{def}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(\phi(x,t)) = \lim_{h \to 0} \left(V(\phi(x,h)) - V(x) \right)/h$$

existe y es continua para todo x en U.

DEFINICION

Una función $H: U \to R$ es definida positiva cerca del punto $x_0 \in U$ si $H(x_0) = 0$; $H(x) > 0 \ \forall x \neq x_0$ en U. (Análogamente para ser definida negativa para el punto x_0). Es semidefinida positiva, cuando $H(x_0) = 0$ y $H(x) \geq 0 \quad \forall x$ en U.

Observación

1.- Sea V una función de Liapunov. Entonces $\dot{V}(\phi(x,T)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=T} V(\phi(x,t))$ para todo T en el intervalo maximal de la solución $\phi(x,t)$.
En efecto:

Por definición: $\dot{V}(\phi(x,T)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(\phi(\phi(x,T), t))$

Como el sistema es autónomo, se cumple: $\phi(\phi(x,T),t) = \phi(x, T+t)$
de donde:

$$\dot{V}(\phi(x,T)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V(\phi(x,T+t)) = \frac{d}{du}\Big|_{u=T} V(\phi(x,u)) \cdot \frac{du}{dt}\Big|_{t=0}$$

donde $u = T+t$ $\qquad \dot{V}(\phi(x,T)) = \frac{d}{du}\Big|_{u=T} V(\phi(x,u))$ Q.E.D.

2 Sea la ecuación $\dot{x} = X(x)$ y la función $V(x)$. Si V es una función deferenciable, se puede calcular $\dot{V}(x)$ sin necesidad de conocer las soluciones $\phi(x,t)$. Resulta:

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), X(x) \rangle \qquad \text{(ver ejercicio 2).}$$

2.2 TEOREMAS DE LIAPUNOV

TEOREMA 1 de Liapunov

Si existe una función de Liapunov $V : U \rightarrow R$ para el punto de equilibrio x_0, definida positiva, con $\dot{V}$ semidefinida negativa, entonces x_0 es estable en el futuro (según Liapunov).

(Nota: si existe una función de Liapunov V definida negativa, con $\dot{V}$ semidefinida positiva, vale la misma tesis, pues basta considerar la función $-V$).

Prueba:

Dado $\varepsilon > 0$ (tomémoslo de modo que $B_\varepsilon(x_0) \subset U$, dominio de definición de la función de Liapunov V). Hay que hallar $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta \Rightarrow \phi(y_0, t)$ definida para todo $t \geq 0$ y $\phi(y_0,t) \in B_\varepsilon(x_0), \forall t \geq 0$

Sea $m = \min\{V(x) ; \|x - x_0\| = \varepsilon\} > 0$

Como V es continua en x_0 y como $V(x_0) = 0$, entonces, existe $\delta > 0$ tal que $\|y - x_0\| < \delta \Rightarrow V(y) < m$.

Fijo un y_0 que cumple la condición anterior, consideremos la función $V(\phi(y_0, t))$, definida para todo t en el intervalo maximal de $\phi(y_0, t)$, y tal que $\phi(y_0, t) \in U$. Para esos t, se cumple:

$$\frac{d}{dt} V(\phi(y_0,t)) = \dot{V}(\phi(y_0,t)) \leq 0$$

Así que $V(\phi(y_0,t))$, es continua y decreciente (no estrictamente) para todo t tal que $\phi(y_0,t) \in U$.

Consideremos la ecuación diferencial, restringida al abierto U. Sea b el extremo derecho del intervalo maximal de definición de $\phi(y_0,t)$ en U. Cuando $\phi(y_0,t) \in U$, $V(\phi(y_0,t)) \leq V(y_0) < m$. Entonces $\|\phi(y_0,t) - x_0\| < \varepsilon$. La solución está acotada dentro de una bola de radio ε, dentro de U. Luego, está definida para todo $t \geq 0$. Así $b = +\infty$.

Hemos probado que, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta \Rightarrow$, se tiene $\phi(y_0,t)$ definida para todo $t \geq 0$ y $\|\phi(y_0,t) - x_0\| < \varepsilon$.

Eso es la estabilidad en el futuro según Liapunov, del punto de equilibrio x_0.

TEOREMA 2 de LIAPUNOV

Si existe una función de Liapunov $V : U \rightarrow R$ para el punto de equilibrio x_0, definida positiva, con $\dot{V}$ definida negativa, entonces x_0 es asintóticamente estable en el futuro.

(Nota: lo mismo vale si se encuentra una función de Liapunov V, con V definida negativa y $\dot{V}$ definida positiva).

Prueba:

Por el teorema anterior, x_0 es estable en el futuro. Dado $\varepsilon > 0$ (que lo elegimos de modo que $B_\varepsilon(x_0) \subset U$), sea $\delta > 0$ de la definición de estabilidad en el futuro (definición 1). Demostraremos primero que $V(\phi(x,t)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $\forall x \in B_\delta(x_0)$; y después que $\phi(x,t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} x_0$

Sea $y \neq x_0$ en $B_\delta(x_0)$:

$F(t) = V(\phi(y,t))$ es decreciente estrictamente, porque $\dot{F}(t) = \dot{V}(\phi(y,t)) < 0$

$F(t)$ es positiva. Entonces, $\lim_{t \to +\infty} F(t)$ existe y es mayor o igual que 0

Por absurdo, supongamos que $\lim_{t \to +\infty} F(t) = \alpha > 0$.

Entonces $F(t) > \alpha > 0 \quad \forall t \geq 0$.

Por la continuidad de V, existe $\gamma < \varepsilon$ tal que $\|x-x_0\|<\gamma \Rightarrow V(x)<\alpha$.
Como $F(t) = V(\phi(y,t)) > \alpha \ \forall t \geq t_0$, entonces

$$\|\phi(y,t)-x_0\| \geq \gamma \quad \forall t\geq t_0$$

Por lo tanto $\phi(y,t)$ está en la corona : $\{x : \gamma \le \|x-x_0\| \le \varepsilon\}$

Sea $-r$ = máx de $\dot V(x)$ <0 para x en la corona compacta anterior,

Tenemos $\dot F(t) = \dot V(\phi(y,t)) \le -r \quad \forall t\geq 0.$

$$F(t) = F(0) + \int_0^t \dot F(t)\,dt \le F(0) - rt \longrightarrow -\infty \text{ cuando } t\to+\infty$$

Pero $F(t)\geq 0 \ \forall t\geq 0$. Hemos llegado a un absurdo, y por tanto hemos probado que $V(\phi(y,t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Ahora veamos que $\phi(y,t)\to x_0$ con $t\to+\infty$
Dado $\varepsilon'>0$ $(\varepsilon'<\varepsilon)$ Sea $m=\min\{V(x) : \varepsilon'\le\|x-x_0\|\le\varepsilon\} > 0$
Como $V(\phi(y,t)) \to 0$ $t\to+\infty$; existe T tal que $\forall t\geq T$
$V(\phi(y,t)) < m$.
De lo anterior: $\phi(y,t)$ está fuera de la corona $\forall t \geq T$
Como desde el principio elegimos δ de modo que $\phi(y,t)\in B_\varepsilon(x_0)$
ntonces:

$$\|\phi(y,t)-x_0\| < \varepsilon' \quad \forall t\geq T$$

Hemos probado que dado ε' arbitrario existe T, tal que $\forall t \geq T$ se cumple $\|\phi(y,t)-x_0\|<\varepsilon'$. O sea $\phi(y,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} x_0$.

QED

EJEMPLOS

1 $\dot x = -x^3$ 0 es asintótiamente estable en el futuro, pues $V(x) = x^2$ verifica el teorema 2.

2 $\dot x = -x$ $\dot y = -y+x$ Tomando $V(x,y) = x^2+y^2$ se prueba que (0,0) es asintóticamente estable en el futuro.

3 ~~En el péndulo con rozamiento: $\ddot\theta = -\omega^2 \sin\theta - a\theta$ $(a>0)$~~
~~$\dot\theta = \mu$ $\dot\mu = -\omega^2\sin\theta - a\mu$~~
~~tomando $V(\theta,\mu) = \frac{\mu^2}{2}+\omega^2(1-\cos\theta)$, se demuestra que es asintóticamente estable en el futuro.~~

4 $\dot x = y-x^3$ $\dot y = -x-y^3$
Tomando $V(x,y) = x^2+y^2$ se muestra que (0,0) es asintóticamente estable, aunque para la parte lineal del sistema $\dot x = y$, $\dot y = -x$

(0,0) no lo es.

Observaciones
1-El recíproco del teorema 2 es cierto (Teorema de Massera, que se demuestra más adelante). Sin embargo el recíproco del teorema 1 es falso (ver ejercicio. 5).
2- Dada la ecuación $\dot x = X(x)$. Considérese la nueva ecuación $\dot x = -X(x)$. Si $\phi(x_0,t)$ es solución general de la primera, entonces $\phi(x_0,-t)$, es solución de la segunda. Los puntos de equilibrio de una y

otra ecuación son los mismos. Es sencillo ver que x_0 es un punto de equilibirio estable hacia el futuro de la ecuación priemera, si y solo si x_0, es punto de equilibrio estable hacia el pasado de la segunda ecuación (y viceversa). También es cierto para la estabilidad asintótica.

Si V es una función de Liapunov definida positiva cerca de x_0 lo es también para la otra ecuación. Pero la función $\dot{V}$ relativa ala primera ecuación es distinta a la que se obtiene usando la segunda ecuación (verifíquese que son opuestas)

Con esas consideraciones, se obtienen los sig uiantes corolarios

COROLARIOS

Si existe una función de Liapunov V para el punto de equilibrio x_0, definida positiva, con $\dot{V}$ semidefinida positiva, entonces x_0 es estable hacia el pasado.

Si existe una función de Liapunov V definida positiva, con $\dot{V}$ definida positiva, entonces x_0 es asintóticamente estable hacia el pasado.

DEFINICIONES

Se llama FUENTE, a un punto de equilibrio asintóticamente estable hacia el pasado. Se llama POZO, a un punto de equilibrio asintóticamente estable hacia el futuro.

DEFINICION Sea la ecuac ión $\dot{x} = X(x)$; X campo en M (variedad de R^k. o abierto de R^k). Sea E: M $\longrightarrow$ R una función continua no constante, tal que $\dot{E}(x) \overset{def}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E(\phi(x,t))$ existe y es cero para todo $x \in M$.

Una tal función se llama PREINTEGRAL DE LA ECUACION.

Obs. Una preintegral E, (cuando existe) cumple:

Es una función de Liapunov con $\dot{E}(x) = 0$.

Los puntos de equilibrio estables en el futuro se obtienen para los mínimosrelativos de la función E. Si alrededor de un punto de equilibrio, la preinteg ral E no es constante, entonces el punto de equilibrio no es asintóticamente estable (ver ejercicio 8).

Ejemplos:

1. La energía en los sistemas mecánicos conservativos es una preinteg ral.
2. Sea $\ddot{x} = f(x)$, f continua, que se puede escribir como $\begin{cases}\dot{x} = y\\ \dot{y} = f(x)\end{cases}$

   Se obtiene: $\dot{y}y = f(x)\dot{x}$ $\qquad \int_0^t y\dot{y}\,dt = \int_0^t f(x)\dot{x}\,dt \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \int_0^x f(x)\,dx = cte.$

   La función $E(x,y) = \frac{y^2}{2} - \int_0^x f(x)\,dx$

   es una preintegral.

2.3 TEOREMA DE CETAEV $\quad \dot{x} = X(x) \qquad X(x_0) = 0$

DEFINICION x_0 es inestable en el futuro (según Liapunov), cuando no es estable en el futuro (según Liapunov).

Así como el teorema 1 de Liapunov da una condición suficiente (pero no necesaria) para la estabilidad en el futuro, el teorema de Cetaev de una condición suficiente (tampoco es necesaria) para la inestabilidad en el futuro.

Teorema de Cetaev

$\dot{x} = X(x) \qquad X(x_0) = 0$

Si existe una función de Liapunov V, con $V(x_0) = 0$, y $\dot{V}$ definida negativa, y tal que para alguna sucesión $x_n \neq x_0$ que tiende a x_0 se cumple $V(x_n) \leq 0$, entonces x_0 no es estable en el futuro según Liapunov.

Prueba

Sea ε tal que $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset$ U, dominio de definición de la función de Liapunov V.

Por absurdo, si x_0 fuera estable, existiría $\delta > 0$ tal que $\|y - x_0\| < \delta$ $\Rightarrow \phi(y,t) \in B_\varepsilon(x_0) \quad \forall t \geq 0$.

Como $x_n \to x_0$, existe N tal que $\|x_n - x_0\| < \delta \quad \forall n > N$

Luego: $\phi(x_n, t) \in B_\varepsilon(x_0)$, $\forall n \geq N$; $\forall t \geq 0$.

Fijemos n > N: siendo $\dot{V}$ definida negativa y $x_n \neq x_0$, se tiene $\dot{V}(\phi(x_n,t)) < 0$. Luego $V(\phi(x_n, t))$ es decreciente con t estrictamente y en t=0 vale $V(x_n) \leq 0$. Luego, para $t \geq T$ se tiene

$V(\phi(x_n,t)) < -k < 0$

Como V es continua, existe $\varepsilon' < \varepsilon$ tal que $\|x - x_0\| < \varepsilon' \Rightarrow |V(x)| < k$

Luego $\|\phi(x_n,t) - x_0\| \geq \varepsilon' \qquad \forall t \geq$ T.

Tenemos que $\phi(x_n,t)$ está en la corona $\{y : \varepsilon' \leq \|y - x_0\| \leq \varepsilon\}$

Siendo $\dot{V}$ definida negativa, alcanza un máximo negativo $-r$ en esa corona, y por lo tanto $\dot{V}(\phi(x_n,t)) \leq -r < 0 \qquad \forall t \geq T$

$$V(\phi(x_n,t)) = V(x_n) + \int^t \dot{V}(\phi(x_n,t))\, dt \leq V(x_n) - r(t-T) \longrightarrow -\infty \quad (t \to +\infty)$$

Esto es absurdo, porque V está acotada en la bola cerrada de centro x_0 y radio ε , donde se mantiene la semitrayectoria $\phi(x_n,t)$.

QED

2.4 TEOREMA DE MASSERA

El recíproco del teorema de Liapunov , asegura que la existencia de funciones de Liapunov definida positivas con $\dot{V}$ definida negativa es equivalente a la estabilidad asintótica en el futuro.

Teorema de Massera Sea una ecuación $\dot{x} = X(x)$ en las hip. del teorema de Picard. Si x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro, entonces existe una función de Liapunov V definida positiva con $\dot{V}$ definida negativa, en un entorno de x_0 .

Para la prueba necesitaremos algunas definiciones y un lema previo:

DEFINICION

Un punto de equilibrio x_0 es uniformemente asintóticamente estable (en el futuro), si es asintóticam. estable, y además existe $\rho > 0$ talque $\phi(x,t)$ converge uniformemente a x_0 , cuando $t \to +\infty$, para todo x en $B_\rho(x_0)$.

(Eso es: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T$ tal que $\|\phi(x,t) - x_0\| < \varepsilon \quad \forall t > T \ \forall x \in B_\rho(x_0)$).

LEMA

Si x_0 es punto de equilibrio as. estable en un sistema autónomo $\dot{x} = X(x)$, entonces es uniformemente asintóticamente estable.

Prueba

Sea $\delta>0$ tal que $\|x-x_0\|\leq\delta \Rightarrow \phi(x,t)\to x_0 \quad (t\to+\infty)$;
Por absurdo, si no es unif. asintót. estable, entonces:
existe algún $\varepsilon>0$, , y para todo natural n , existe algún punto $x_n\in B_\delta(x_0)$ y un tiempo $t_n>n$ tales que $\|\phi(x_n,t_n)-x_0\|\geq\varepsilon$

Por la estabilidad de x_0 , existe $\delta'<\delta$ tal que $\|y-x_0\|<\delta' \Rightarrow \|\phi(y,t)-x_0\|<\varepsilon \;\; \forall t>0$ Entonces $\|\phi(x_n,t)-x_0\|\geq\delta'$ para todo $t\in[0,n]$.

Sea $\{x_{n_j}\}$ una subsucesión convergente de $\{x_n\}$, que converge a un punto $\bar{x}$. Resulta $\|\bar{x}-x_0\|\leq\delta$
Tomemos T cualquiera. Para todo $n_j>T$, se cumple
$\|\phi(x_{n_j},t)-x_0\|\geq\delta'$ para todo $t\in[0,n_j]$
En particular para t=T: $\|\phi(x_{n_j},T)-x_0\|\geq\delta'$

Haciendo $j\to+\infty$ $\|\phi(\bar{x},T)-x_0\|\geq\delta' \quad \forall T$

Entonces $\phi(\bar{x},T)\not\to x_0$, con $T\to+\infty$; $\|\bar{x}-x_0\|\leq\delta$ Esto contradice la construcción de δ .
QED

Prueba del teorema de Massera

No es restrictivo suponer que $x_0=0$ (Pues de lo contrario, se haría el cambio de variable $y=x-x_0$). Tomemos $\rho>0$ de la definición de punto asintót. uniform. estable.

Construyamos una función de Liapunov del tipo:

$$V(x)=\int_0^{+\infty} g(\|\phi(x,s)\|)\,ds$$

definida en $B_\rho(0)$, eligiendo $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, de modo que:

1) g sea creciente estrictamente, g(0)=0.
2) g sea continua
3) $\int_0^{+\infty} g\left(\sup_{x\in B_\rho(0)}\|\phi(x,s)\|\right)ds$ sea convergente.

Esas tres condiciones aseguran:

a) La existencia y continuidad de V(x), pues $g(\|\phi(x,s)\|)$ es continua y está mayorada, para todo $x\in B_\rho(0)$ por una función de integral convergente. Entonces $\int_0^{+\infty} g(\|\phi(x,s)\|)\,ds$ converge uniformemente para todo $x\in B_\rho(0)$. Luego V(x) es continua.
b) V(x) es definida positiva, pues $V(0)=\int_0^{+\infty} g(0)\,ds=0$; y si $x\neq 0$, entonces $g(\|\phi(x,s)\|)>0 \Rightarrow V(x)>0$
c) $\dot{V}(x)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_0^{\infty} g(\|\phi(x,t+s)\|)\,ds=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_t^{+\infty} g(\|\phi(x,u)\|)\,du=-g(\|x\|)$ es continua y definida negativa.

Basta entonces construir la función g que cumpla 1,2y3.
Sea $h(s)=\sup\{\|\phi(x,s)\| : x\in B_\rho(0)\}$.
Debido a que 0 es asint. unif. estable, se cumple:
$\forall\varepsilon>0\ \exists\, T>0$ tal que $\|\phi(x,t)\|<\varepsilon \quad \forall\, t>T \ \forall\, x\in B_\rho(0)$; luego:

$0\leq h(s)\leq\varepsilon \quad \forall s>T$; $\lim_{s\to+\infty} h(s)=0$ cuando $s\to+\infty$

Entonces, existe una sucesión $t_n\to+\infty$ con $h(t)<\frac{1}{n}$ $\forall t\in[t_n,t_{n+1})$.

Elijamos números a_i $\quad 0 < a_i < \frac{1}{2^i} \frac{1}{t_{i+1} - t_i}$.

Sea $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función continua creciente tal que

$g(0) = 0$ y $0 < g(t) < a_i$ si $t \in \left(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$.

Se tiene: $\int_0^\infty g(h(s))ds \le \int_0^{t_1} g(h(t))dt + \int_{t_1}^{t_2} g(1)dt + \int_{t_2}^{t_3} g(\frac{1}{2})dt + \dots$

$$= \int_0^{t_1} g(h(t))dt + \sum_{i=1}^{\infty} g(\tfrac{1}{i})\,(t_{i+1} - t_i) \le \int_0^{t_1} g(h(t))dt + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = k$$

Q.E.D.

lo cual prueba el teorema.

Nota: $\int_0^{t_1} g(h(t))\,dt$ existe, porque $g \circ h$ es la composición de dos funciones continuas. En efecto, para ver que h(t) es continua

$|h(t) - h(t_0)| \le \sup_{\|x\| < \rho} \|\phi(x,t) - \phi(x,t_0)\| < \varepsilon$ si $|t - t_0| < \delta'$

La última desigualdad es válida para todo x en el compacto $\overline{B_\rho(0)}$, debido a la continuidad de $\phi(x,t)$ respecto a t.

3. FUNCIONES DE LIAPUNOV PARA SISTEMAS LINEALES CON COEF. CONSTANTES.

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ donde A es una matriz $n \times n$ y $x \in R^n$.

0 es un punto de equilibrio del sistema.

Consideremos la función $V: R^n \to R$ definida mediante:

$$V(x) = \langle Mx, x \rangle$$

donde M es una matriz simétrica real. La función V(x) es una función de Liapunov, forma cuadrática en R^n.

Estudiemos $\dot{V} : R^n \to R$.

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle Mx(t), x(t) \rangle = \langle M\dot{x}, x \rangle + \langle Mx, \dot{x} \rangle = \langle MAx, x \rangle + \langle Mx, Ax \rangle = \langle MAx, x \rangle + \langle A^t Mx, x \rangle = \langle (MA + A^t M)x, x \rangle .$$

La matriz $MA + A^t M$ es simétrica, y la función $\dot{V}(x)$ es también una forma cuadrática.

La manera de pasar de la matriz simétrica correspondiente a la forma cuadrática V(x), a la matriz simétrica de la forma cuadrática $\dot{V}(x)$, es:

$$M \longrightarrow MA + A^t M$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema lineal.

LEMA

Si la matriz A tiene todos los valores propios con parte real negativa, entonces la transformación T qque lleva una matriz simétrica M en otra simétrica N, mediante :

$$T(M) = N = MA + A^t M$$

es una transformación lineal biyectiva.

Prueba

T es una transformación lineal de un espacio de dimensión finita en sí mismo. Basta demostrar que Ker T = 0.

Sea M en Ker T. Eso es:

$$M A + A^t M = 0$$

Se sabe que la solución de la ecuación $\dot{x} = Ax$ es $x(t) = e^{At} x_0$

Sea $-\mu$ un número negativo, mayor que la parte real de todos los valores propios de A. Entonces:

$$\| x(t) \| \leq K e^{-\mu t} \| x_0 \| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Resulta que 0 es asintóticamente estable.

Consideremos $V(x) = \langle M x , x \rangle$ donde $M \in \operatorname{Ker} T$.

Se tiene: $\dot{V}(x) = \langle (MA + A^t M) x, x \rangle = 0$.

Luego, V es una preintegral (constante sobre las trayectorias).

Tomemos $x \neq 0$: $V(\phi(x,0)) = V(x) = V(\phi(x,t))$ para todo t, luego es igual a

$$\lim_{t \to +\infty} V(\phi(x,t)) = V(0) = 0 .$$ La forma cuadrática $V(x)$ resulta ser id'enticamente nula, y por lo tanto la matriz M es 0. QED

TEOREMA

Sea la ecuación $\dot{x} = Ax$. Si la parte real de los valores propios de A son todos negativos, entonces

a) Dada una forma cuadrática cualquiera $W(x) = \langle Nx, x \rangle$; existe una única forma cuadrática $V(x)$ tal que $\dot{V}(x) = W(x)$.

b) Si $W(x)$ es definida negativa, entonces $V(x)$ queda definida positiva.

Prueba

a) Dada $W(x) = \langle Nx, x \rangle$, con N matriz simétrica, sea $M = T^{-1}(N)$ donde T es la transformación lineal biyectiva del lema anterior.

La forma cuadrática $V(x) = \langle Mx, x \rangle$ verifica lo deseado.

La unicidad se debe a la inyectividad de la transformación T.

b) Supongamos que $W(x)$ es def. negativa, y por absurdo, que existe algún $x_1 \neq 0$ tal que $V(x_1) \leq 0$. Tomemos $x_n = \frac{1}{n} x_1$

$V(x_n) = V(\frac{1}{n} x_1) = (\frac{1}{n})^2 V(x_1) \leq 0$, porque V es una forma cuadrática

Como $\dot{V}(x) = W(x)$ es def. negativa, por el teorema de Cetaev, lo anterior implica que 0 no es estable. Absurdo QED.

Nota: El teorema anterior da un método para construir funciones de Liapunov (cuadráticas) de sistemas lineales con 0 asintóticamente estable.

OBSERVACIONES

$\dot{x} = Ax$; con la parte real de los val. prop. de A negativa

1) Existe una única forma cuadrática V(x) tal que $\dot{V}(x) = -\|x\|^2$. (V(x) es definida positiva).
2) Existe una única forma cuadrática U(x) (que resultará definida negativa) tal que $\dot{U}(x) = V(x)$ donde V(x) es una forma cuadrática dada, definida positiva. (Basta aplicar el teorema a -V(x)).
3) Existen , dada una forma cuadrática W(x) definida positiva, las formas cuadráticas U(x) y V(x) tales que

$\dot{U}(x) = V(x)$ y $\dot{V}(x) = W(x)$, con
U def. positiva ; V def. negat. ; W def. positiva.

3.2 APROXIMACION LINEAL

Los resultados anteriores, que valen sólo para sistemas lineales, pueden aplicarse a sistemas autónomos, cuando la parte lineal tiene todos los valores propios con parte real negativa:

TEOREMA

Sea $\dot{x} = X(x)$; $X(0)=0$, X de clase C^1.

Si la matriz jacobiana $X'(0)$ tiene todos los valores propios con parte real negativa, entonces 0 es asintótic. estable.

Prueba

$X(x) = Ax + f(x)$ donde $A = X'(0)$ y $f(x) = X(x) - Ax$.

Se tiene $X(x) - X(0) = \int_0^1 \frac{d}{du}(X(ux))\,du = \int_0^1 X'(ux)\cdot x\,du \Rightarrow$

$$f(x) = X(x) - Ax = \int_0^1 X'(ux)x\,du - \int_0^1 Ax\,du = \int_0^1 (X'(ux) - X'(0))x\,du$$

$\|f(x)\| \le \int_0^1 \|X'(ux) - X'(0)\| \; \|x\| \; du$. Como X' es continua (pues X es de clase C^1), entonces $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ tal que

$$\|X'(ux) - X'(0)\| < \varepsilon \quad \text{si } \|x\| < \delta \text{ y si } 0 \le u \le 1$$

Así $\|f(x)\| \le \int_0^1 \varepsilon \; \|x\| \; du = \varepsilon\|x\|$; si $\|x\| < \delta$

Sea $V(x) = \langle Mx, x\rangle$ donde V es la única forma cuadrática definida positiva, con matriz M tal que $\langle (MA + A^tM)x, x\rangle = -\|x\|^2$

Entonces

$$\dot{V}(x) = \langle M\dot{x}, x\rangle + \langle Mx, \dot{x}\rangle = \langle MX(x), x\rangle + \langle Mx, X(x)\rangle =$$
$$= \langle M(Ax + f(x)), x\rangle + \langle Mx, Ax + f(x)\rangle =$$
$$= \langle (MA + A^tM)x, x\rangle + 2\langle Mx, f(x)\rangle = -\|x\|^2\left(1 - \frac{2\langle Mx, f(x)\rangle}{\|x\|^2}\right)$$

$$\frac{|\langle Mx, f(x)\rangle|}{\|x\|^2} \le \frac{\|M\|\|x\| \; \|f(x)\|}{\|x\|^2} \le \|M\|\cdot\varepsilon \quad \text{si } \|x\| < \delta$$

Como ε es arbitrario podemos elegirlo $2\|M\|\varepsilon < 1$

y resulta: $\dot{V}(x) \leq -\|x\|^2\left(1 - 2\|M\|\varepsilon\right) < 0$

Luego, $\dot{V}(x)$ es definida negativa, y por el teorema de Liapunov, 0 es asintót. estable en el futuro. Q.E.D.

EJEMPLOS

1) $\dot{x} = -\operatorname{sen} x + \dfrac{x^3}{2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$: 0 es asintót. estable.

2) En el péndulo con rozamiento $\ddot{\theta} = -\omega^2 \operatorname{sen}\theta - a\dot{\theta}$ $\quad (a > 0)$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \operatorname{sen}\theta - ay \end{cases} \qquad X(\theta, y) = (y, -\omega^2 \operatorname{sen}\theta - ay)$$

$$X(0,0) = 0 \qquad X'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{pmatrix} = A$$

Los valores propios de A son las raíces de $\lambda^2 + a\lambda + \omega^2$, que tienen parte real $-\frac{a}{2} < 0$. Entonces (0,0) es asintót. estable en el futuro.

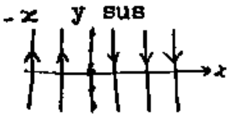
NOTA: En un sistema lineal $\dot{x} = Ax$, 0 es asint. estable en el futuro si y solo si la parte real de los valores propios de A son negativas. Pero en un sistema no lineal $\dot{x} = X(x)$, la condición: parte real de los valores propios de X'(0) negativas es suficiente pero no necesaria para la estabilidad asintótica de 0 en el futuro (ejercicio 13).

EJEMPLOS

1) $\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 \\ \dot{y} = x + y^3 \end{cases}$ (0,0) no es estable por el teorema de Cetaev usando $v(x,y) = x^2 + y^2$

Pero la parte lineal del sistema $\dot{x} = -y$ $\dot{y} = x$ tiene a (0,0) como punto de equilibrio estable.

2) $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ La parte lineal es $\dot{x} = 0$ $\dot{y} = -x$ y sus órbitas son como en la figura:



El (0,0) no es estable para la parte lineal, pero sí lo es para el sistema dado, pues tomando $V(x,y) = x^2 + y^4$ resulta $\dot{V}(x,y) = 0$.

4. ESTABILIDAD ASINTOTICA EN GRANDE

Definición

Sea x_0 un punto de equilibrio para la ecuación $\dot{x} = X(x)$.
Se dice que x_0 es asintóticamente estable en grande (en el futuro), si es asintóticamente estable en el futuro y además para todo x en el dominio de definición de X, se cumple: $\phi(x,t)$ def. $\forall t \geq 0$

$$\phi(x,t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_0$$

TEOREMA DE LIAPUNOV EN GRANDE $\dot{x} = X(x)$ $x \in R^n$; $X(x_0) = 0$

x_0 es asintóticamente estable en grande si existe una función de Liapunov V, en todo R^n tal que:

V es definida positiva
$\dot{V}$ es definida negativa
$\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty$

Prueba

Por el teorema 2 de Liapunov, x_0 es asintóticamente estable (localmente).
Tomemos un punto y_0 cualquiera, y sea $f(t) = V(\phi(y_0,t))$ $(y_0 \neq x_0)$
Como $\dot{V}$ es def. Negat. entonces $\dot{f}(t)$ es negativa, y $f(t)$ es decreciente. Entonces $f(t) \leq f(0) = V(y_0)$ para todo $t \geq 0$ donde está definida.

Sea $K = \{x : V(x) \leq V(y_0)\}$ Tenemos, por lo anterior, que
$\phi(y_0,t) \in K$ para todo $t \geq 0$ donde está definida.

El conjunto K es cerrado porque V es continua, y acotado porque $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty$. Entonces K es un compacto de R^n. La solución $\phi(y_0,t)$; $t \geq 0$ está contenida en ese compacto, y entonces, por la propiedad del intervalo maximal, está definida para todo $t \geq 0$.

La función $f(t)$ está definida para todo $t \geq 0$, y es decreciente estrictamente. Entonces existe $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. La prueba de que este limite es cero, y de allí que $\phi(y_0,t) \longrightarrow x_0$, son iguales a las del teorema 2 de Liapunov.

EJEMPLO

Sea el sistema: $\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 \\ \dot{y} = x - y\,\mathrm{sen}^2 y \end{cases}$

Consideremos la función $V(x,y) = x^2 + y^2$ definida positiva.

Resulta $\dot{V}(x,y) = -2(x^4 + y^2 \mathrm{sen}^2 y)$ es definida negativa en un entorno de $(0,0)$, pero en todo el espacio $\dot{V}(x,y) < 0$ si $(x,y) \neq (0, n\pi)$.

Probemos que $(0,0)$ es asintóticamente estable en grande.

Primero obsérvese que el teorema 2 de Liapunov, admite la siguiente versión, un poco más que general:

Si existe una función de Liapunov V definida positiva en un entorno del punto de equilibrio x_0, y si $V(\phi(x,t))$ es estrictamente decreciente para todo $x \neq x_0$ tal que $\phi(x,t)$ permanece en el dominio de definición de V, entonces x_0 es asintóticamente estable en el futuro. (la prueba de este teorema es como la del teorema 2 de Liapunov, pero al final, cuando se utiliza la función $\dot{V}$, hay que sustituirla por $V(\phi(x,t+1)) - V(\phi(x,t))$.) (ver ejercicio 4)

El teorema de Liapunov en grande también admite una versión como la anterior:

Si existe una función de Liapunov V definida positiva con relación al punto de equilibrio x_0 , definida para todo R^n , y tal que, para todo $x \neq x_0$ la función $V(\phi(x,t))$ es estrictamente decreciente con t, y la función $V(x)$ tiende a $+\infty$ cuando $\|x\| \to +\infty$, entonces x_0 es asintóticamente estable en grande (en el futuro). (ver ejercicio 18).

En el ejemplo planteado, veamos que $V(\phi((x,y),t))$ es estrictamente decreciente con t, para cualquier $(x,y) \neq (0,0)$. En efecto, para los puntos (x,y) tales que $y \neq n\pi$, la función $\dot{V}(x,y)$ es < 0 , y entonces $V(\phi(x,y),t)$ es estrictamente decreciente. Para el punto $(0,n\pi) = p_n \neq (0,0)$ sea $\bar{t} > 0$ tal que $\{\phi(p_n,t);\ 0<|t|\leq\bar{t}\}$ no corta a ningún p_j

La función $V(\phi(p_n,t))$, tiene derivada nula en t=0, pero derivada estrictamente negativa para $0 < |t| \leq \bar{t}$. Entonces:

$$V(\phi(p_n,t)) < V(p_n) < V(\phi(p_n,-t)) \qquad \forall t:\ 0<|t|\leq\bar{t}$$

Entonces la función $V(\phi(p_n,t))$ es estrictamente decreciente con t , en todos los puntos de R^n que no son $(0,0)$.

Como $V(x)$ es definida positiva y $V(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$, entonces $(0,0)$ es asintóticamente estable en grande en el futuro.

4.2 Cuenca de atracción de un pozo

<u>Definición</u> Sea p_0 un pozo (un punto de equilibrio asintóticamte estable en el futuro (localmente)). Se llama cuenca de atracción de p_0 al conjunto de los puntos q tales que

$\phi(q,t)$ está definida para todo $t \geq 0$ y $\phi(q,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} p_0$

<u>Proposición</u>

La cuenca de atracción de un pozo es un conjunto abierto.

<u>Prueba</u>

Sea $\varepsilon>0$ tal que $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) \Rightarrow \phi(x,t) \to x_0$ con $t\to+\infty$

Si y_0 está en C, cuenca de atracción de x_0 , entonces existe T tal que $\phi(y_0,t) \in B_\varepsilon(x_0)\ \ \forall t \geq T$

En particular $\phi(y_0,T) \in B_\varepsilon(x_0)$. Como $\phi(y_0,T)$ es continua respecto a y_0 , existe un entorno U de y_0, tal que

$$y \in U \Rightarrow \phi(y,T) \in B_\varepsilon(x_0)$$

Luego: $x_0 = \lim_{t\to+\infty} \phi(\phi(y,T),t) = \lim_{t\to+\infty} \phi(y,T+t) = \lim_{s\to+\infty} \phi(y,s) = x_0$

Así $y \in U \Rightarrow y \in C$. Se ha probado que todo punto de C, está contenido en un entorno contenido en C. Luego C es abierto QED.

Observaciones

Si x_0 es un punto as. estable en grande, su cuenca de atracción es todo el espacio M (donde esté definida la ecuación diferencial, o el sistema din'mico).

Si x_0 es un pozo, y si el punto y_0 está en la frontera de la cuenca C de atracción de x_0, entonces $y_0 \notin C$, y y_0 no es estable en el futuro(según Liapunov).

Si x_0 es un punto asintóticamente estable en el futuro (localmente) y todo punto del espacio R^n es estable en el futuro (según Liapunov), entonces x_0 es asintóticamente estable en grande.
(ver ejercicio 20).

4.3 Conjetura de AJZERMAN y criterio de estabilidad en grande de HARTMAN

Una condición suficiente para la estabilidad asintótica en grande, que prescinde de las funciones de Liapunov, y analiza la parte lineal de la ecuación diferencial, está dada en el siguiente teorema debido a Hartman:

TEOREMA

Sea en R^n la ecuación $\dot{x} = X(x)$ con $X: R^n \to R^n$ de clase C^1, y tal que $X(0)=0$.
Sea $J(x) = X'(x)$ la matriz jacobiana de la función X, calculada en el punto x .
Si los valores propios de $J(x) + J(x)^t$ (como es una matriz real simétrica, todos sus valores propios son reales), son todos negativos, entonces O es asintóticamente estable en grande.

No se dio

Prueba:
Probaremos las siguientes afirmaciones:
i) Si $x \in R^n$ $x \neq 0$, entonces $\|\phi(x,t)\| < \|x\|$ para todo $t \in (0, \bar{t}_x)$.
ii) Si $x \in R^n$, entonces $\phi(x,t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Observemos que i) $\Rightarrow$ ii):
i) $\Rightarrow$ $\|\phi(x,t)\| < \|x\|$ si $t \in (0, \bar{t}_x)$, para cualquier x. Significa que la distancia de $\phi(x,t)$ a 0 es decreciente con t estrictamente para todo x . En el parágrafo 4.1 se observó que esta condición es suficiente para la estabilidad en grande del punto O (pues $\|x\|$ es definida positiva, estrictamente decreciente sobre las trayectorias, y cumple: $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|x\| = +\infty$).

Demostremos i):
Sea K una bola cerrada de centro 0, y sean y_1, y_2 dos puntos cualquiera de K.

$$f(t) = \|\phi(y_1,t) - \phi(y_2,t)\|^2 = \langle \phi(y_1,t) - \phi(y_2,t), \phi(y_1,t) - \phi(y_2,t) \rangle$$

$$\dot{f}(0) = \langle X(y_1) - X(y_2), y_1 - y_2 \rangle + \langle y_1 - y_2, X(y_2) - X(y_1) \rangle$$

$$X(y_1) - X(y_2) = X'(y_1)(y_1 - y_2) + \Delta(y_1, y_2) = J(y_1)(y_1 - y_2) + \Delta(y_1, y_2)$$

$$\dot{f}(0) = \langle (J(y_1) + J^t(y_1))(y_1 - y_2), y_1 - y_2 \rangle + 2\langle \Delta(y_1, y_2), y_1 - y_2 \rangle$$

Como X es una función de clase C^1 se tiene:

$$\|\Delta(y_1,y_2)\| / \|y_1-y_2\| \to 0 \quad \text{con} \quad \|y_1-y_2\| \to 0$$

Por lo anterior, y porque K es compacto, existe $\delta_K > 0$ tal que
$0 < \|y_1-y_2\| < \delta_K \ ; \ y_1, y_2 \in K \Rightarrow \|\Delta(y_1,y_2)\| / \|y_1-y_2\| < \mu/4$
donde $-\mu$ es un número < 0, mayor que todos los valores propios de las matrices $J(y)+J^t(y)$ cuando y está en el compacto K.

Sustituyendo en $\dot{f}(0)$, se obtiene:

$$\dot{f}(0) \leq \langle J(y_1)+J(y_1)^t (y_1-y_2), y_1-y_2 \rangle + \|y_1-y_2\|^2 \, 2 \frac{\|\Delta(y_1,y_2)\|}{\|y_1-y_2\|}$$

$$\leq \|y_1-y_2\|^2 \left(-\mu + 2 \|\Delta\| / \|y_1-y_2\| \right) \leq -\frac{\mu}{2} \|y_1-y_2\|^2 < 0$$

Como f(t) es continua con t, exite $\bar{t}$ tal que:

$$\dot{f}(t) < 0 \qquad \forall t \text{ con } |t| < \bar{t}$$

$$\Rightarrow \|\phi(y_1,t) - \phi(y_2,t)\| < \|y_1-y_2\| \qquad \text{si } \begin{array}{l} 0 < t < \bar{t} \ , \text{ si} \\ y_1, y_2 \in K \ \ \alpha \|y_1-y_2\| < \delta_K \end{array}$$

Dado ahora $z \in R^n$, cualquiera, elijamos una bola K centrada en 0, que contenga a z. Tomemos puntos $x_1, x_2, \ldots, x_r$ en el segmento $\overline{Oz}$ tales que $x_1 = 0$ $x_r = z$; $\|x_{i+1} - x_i\| < \delta_K$

Entonces:

$$\|\phi(z,t)\| \leq \sum_{i=1}^{r-1} \|\phi(x_{i+1},t) - \phi(x_i,t)\|$$

Por lo demostrado recién:

$\|\phi(x_2,t) - \phi(x_1,t)\| < \|x_2 - x_1\|$ para $0 < t < \bar{t}_1$

$\|\phi(x_3,t) - \phi(x_2,t)\| < \|x_3 - x_2\|$ para $0 < t < \bar{t}_2$

$\|\phi(x_{i+1},t) - \phi(x_i,t)\| < \|x_{i+1} - x_i\|$ para $0 < t < \bar{t}_i$

$\|\phi(z,t)\| < \|z\|$ para $0 < t < \bar{t} = \min \bar{t}_i$

Luego se ha probado i), como queríamos.

qed

Observaciones:

1. Si $A + A^t$ tiene valores propios negativos, entonces A tiene valores propios con parte real negativa, pues:
el sistema lineal $\dot{x} = Ax$, aplicando el teorema anterior, tiene a 0 como punto de equilibrio asintóticamente estable en grande. Se sabe además, del capítulo 1, que un sistema lineal $\dot{x} = Ax$, tiene a 0 como punto asintót. estable en el futuro si y solo si la parte real de los valores propios de A son negativas.

2. Si la parte real de los valores propios de A, es negativa, entonces no se puede afirmar nada sobre el signo de los valores propios de $A+A^t$. En efecto: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

tiene valor propio único $-1 < 0$.

$A+A^t = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ tiene valores propios 1 y -5.

3. Si la parte real de los valores propios de A es negativa, entonces el 0 es asintót. estable., en el futuro (localmente) para cualquier sistema $\dot{x} = X(x)$ con jacobiano $X'(0) = A$. (ver 3.2) y $X(0) = 0$
0 asintót. estable en grande?

La conjetura de AJZERMAN, que enunciamos a continuación, es aún un problema abierto (no se conoce demostración de ella, pero tampoco un contraejemplo que pruebe que es falsa):

Conjetura : En ujn sistema $\dot{x} = X(x)$ (con X que tiene derivadas de todos los órdenes), $X(0) = 0$ sea $J(x) = X'(x)$ la matriz jacobiana de X en el punto x. Sabiendo que la parte real de todos los valores propios de $J(x)$, para todo x , es negativa, entonces 0 es asintóticamente estable en grande (en el futuro).

Hay una prueba, agregando la siguiente hipótesis:
se trabaja en R^2
existen constantes ρ y r tales que $\|x\| \geq r \Rightarrow \|X(x)\| \geq \rho$.
(Teorema de Olech- On the global stability of an autonomous system on the plane- C. Olech Contributions to differential equations vol. 1 No.3).

5. ESTABILIDAD EN SISTEMAS DINAMICOS DE PARAMETRO ENTERO

Lo visto en parágrafos anteriores, fue presentado en un contexto que lo refiere a soluciones de ecuaciones diferenciales autónomas. Pero puede presentarse también en forma más abstracta, refiriéndose a un sistema din'mico de parámetro real en un espacio topológico de Hausdorff, o en una variedad diferenciable.

Para sistemas dinámicos de parámetro entero; también pueden generalizarse la mayoría de los teoremas enunciados antes (aunque la generalización puede no ser tan directa):

5.1 Funciones de Liapunov

Sea $f: M \to M$ un homeomorfismo en un espacio topológico de Hausdorff. Consideraremos el sistema dinámico en M, por iterados de f. (cap. 2) x_0 es un punt o fijo o de equilibrio si $f(x_0) = x_0$.

DEFINICION El punto fijo x_0 es estable en el futuro (segoun Liapunov) si dado un entorno U cualquiera de x_0, existe un entorno V de x_0 talc que $x \in V \Rightarrow f^n(x) \in U \quad \forall n \geq 0$.

DEFINICION El punto fijo x_0 es asintóticamente estable en el futuro (según Liapunov), si

a) es estable en el futuro

b) existe un entorno E de x_0, tal que $x \in V \Rightarrow f^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$.

DEFINICION Si x_0 es un punto periódico de período N; se dice que es estable (o asintót. estable) en el futuro, si lo es respecto al homeomorfismo f^N.

En un espacio métrico M, puede darse una definición de estabilidad de órbitas cualquiera, que comprende las definiciones anteriores para puntos fijos o periódicos:

DEFINICION

La trayectoria de un punto x_0, (o el mismo punto x_0) se dice que es estable en el sentido de Liapunov, en el futuro, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f^n x, f^n x_0) < \varepsilon \quad \forall n \geq 0$

En forma similar se define estabilidad asintótica.

DEFINICION

Una función de Liapunov para el punto fijo x_0, es una función continua $V: U \to \mathbb{R}$ definida en un entorno U del punto x_0.

Es definida positiva cerca de x_0, si es $V(x_0)=0 \quad V(x)>0$ si $x \neq x_0$

Análogamente se define: semidefinida positiva o negativa.

Dada una función de Liapunov V para un punto x_0, se construye otra función de Liapunov, haciendo:

$$\Delta V(x) \stackrel{def}{=} V(f(x)) - V(x) \qquad \forall x \in U \cap f^{-1}(U)$$

Los teorema 1 y 2 de Liapunov, en este contexto, se expresan así:

TEOREMA DE LIAPUNOV (para homeomorfismos)

Sea M un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto (o sea: todo punto de M tiene algún entorno con adherencia compacta), por ejemplo R^n.

Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo , y x_0 un punto fijo.

Si existe una función de Liapunov V para el punto fijo x_0 , definida positiva, con ΔV semidefinida negativa (o definida negativa), entonces x_0 es estable en el futuro (asintót. estable en el futuro, respectivamente).

Prueba

Habrá que reiterar las ideas de la prueba del teorema 1 y 2 de Liapunov, sustituyendo $\phi(x_0,t)$ por $f(x_0)$, y $\dot{V}$ por ΔV . (ejercicio 26).

TEOREMA DE MASSERA (para homeomorfismos).

Sea $f: R^n \to R^n$ un homeom. con $f(0)=0$.

Si 0 es asintóticamente estable en el futuro , entonces existe una función de Liapunov V definida positiva cerca de 0, con ΔV definida negativa.

Prueba

También se reiteran las ideas del teorema de Massera para flujos, con las adaptaciones del caso (ver ejercicio 27).

5.2- FUNCIONES LINEALES Y LOGARITMO DE UNA MATRIZ

Sea f una transformación lineal en R^n , invertible con matriz A $n\times n$

Veremos en este sección que 0 es asintóticamente estable si y solo si los valores propios de A tienen módulo menor que 1.

PROPOSICION

Si A es una matriz $n\times n$, invertible , entonces:

existe alguna matriz B $n \times n$ tal que $e^B = A$, y los valores propios de B son $\operatorname{Log}\lambda_i$, donde λ_i son los valores propios de A.

(Nota: aunque A sea real, quizás B es compleja).

Prueba

Siendo $P^{-1} e^Q P = e^{P^{-1}QP}$, alcanza probar lo propuesto cuando $A= J$ forma canónica de jordan

$$J= \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}$$

donde $J_i = \lambda_i (I_i + N_i)$ $\quad$ N_i nilpotente y I_i identidad)
λ_i es valor propio de J (y de A) , $\lambda_i \neq 0$

Alcanza hallar Q_i tal que $e^{Q_i} = J_i$
$\operatorname{Log}\lambda_i$ es valor propio de Q_i .

Sea $R_i = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{N_i^k}{k}$ (N_i es nilpotente, luego R_i es una suma finita de potencias de N_i). (R_i es también nilpotente)

Consideremos la matriz $S_{i,n} = I + R_i + \dots + R_i^n/n!$

N_i es nilpotente, luego $S_{i,n}$ es una suma finita . Sea entonces la matriz e^{R_i} , que está bien definida (cap. 1).

$$e^{R_i} = \lim_{n\to+\infty} S_{i,n} = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k+1}\frac{N_i^k}{k}\right)^j \frac{1}{j!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a_n^0 I_i + a_n^1 N_i + \dots + a_n^\ell N_i^\ell = a^0 I_i + a^1 N_i + \dots + a^\ell N_i^\ell$$

Reordenando los términos, se obtiene:

donde $a^j = \lim_{n\to+\infty} a_n^j$

Por separado consideremos un número real x, con $|x|<1$, cualquiera, y la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$ que converge absolutamente a $L(1+x)$

Entonces, su reducida cumple: $\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} L(1+x)$

de donde: $e^{\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}} \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} e^{L(1+x)} = 1+x$

Luego: $\lim_{\ell\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right)^j\frac{1}{j!}\right) = 1+x$

$$1+x = \lim_{\ell\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(a_n^0 + a_n^1 x + \dots + a_n^\ell x^\ell\right)\right)$$

Los coeficientes buscados son:

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = 1 \qquad a^2 = a^3 = \dots = a^\ell = 0$$

Por lo tanto, la matriz R_i verifica: $e^{R_i} = I_i + N_i$

Tomemos ahora $Q_i = (\log\lambda_i) I_i + R_i$. Cumple:

$$e^{Q_i} = e^{(\log\lambda_i) I_i}\, e^{R_i} = \lambda_i I_i (I_i + N_i) = J_i$$

como queríamos probar.

<u>DEFINICION</u> LLamaremos Log A a una matriz B (compleja) tal que $e^B = A$ y los valores propios de B son $\log\lambda_i$, donde λ_i son los valores propios de A (A invertible) .

<u>TEOREMA</u>

Sea f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el homeomorfismo lineal de matriz A invertible. Entonces 0 es asintóticamente estable en el futuro si y solo si los valores propios de A tienen módulo menor que 1.

<u>Prueba</u>

Tomemos B tal que $e^B = A$ con los valores propios de B $\log\lambda_i$ donde λ_i son los val. propios de A.

La ecuación $\dot{x} = Bx$ con $x\in \mathbb{C}^n$, tiene a 0 como punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro (porque los valores propios de B tienen parte real menor que cero).

Luego, la solución general es $e^{Bt}x_0 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Como $f^n(x_0) = e^{Bn} x_0$, entonces $f^n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Recíprocamente, si A tiene algún valor propio con módulo ≥ 1 , consideremos en C^n un vector propio correspondiente. $\vec{u} \in C^n$

Entonces, o bien la parte real, o bien la parte imaginaria v de $\vec{u}$, cumple en R^n : $\|A^n v\| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$. Luego 0 no es asintót. estable .

QED

PROPOSICION

Si los valores propios de una matriz A invertible, tienen todos módulo menor que 1, entonces existe en R^n un producto interno tal que $\|A u\| \leq K \|u\|$ (para cierta constante k menor que 1).

Prueba:

Tomando B = Log A , y la ecuación diferencial $\dot{x} = Bx$, resulta 0 asintóticamente estable. Existe una forma cuadrática en R^n , definida positiva $\langle \, , \, \rangle$ decreciente estrictam ente sobre las órbitas de la ecuación.

Basta verificar que esa forma cuadrática, es el producto interno buscado en R^n . (ver ejercicio 16).

OBSERVACION

Es válido también un teorema de linealización:

Sea $f: R^n \circlearrowleft$ un difeomorfismo (homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable) tal que $f(0)=0$ y $f'(0)$ tiene valores propios con módulo menor que 1. Entonces 0 es asintóticamente estable.

(ver ejercicio 29).

6 ESTABILIDAD DE ORBITAS PERIODICAS

Cosideremos una órbita periódica $\phi(x_0, t)$ de período T en R^n.

6.1 ESTABILIDAD ORBITAL

Una órbita periódica puede ser estable, pero nunca asintóticamente estable, como se demuestra en el teorema siguiente :

Teorema

Una órbita periódica no puede ser asintóticamente estable.

Prueba:

Sea $\phi(x_0,t)$ periódica de período T. Si fuera asintóticamente estable en el futuro, existiría $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B_\delta(x_0)$ se cumple $\|\phi(y,t) - \phi(x_0,t)\| \longrightarrow 0 \quad t\to+\infty$

Por la continuidad de $\phi(x_0,t)$ respecto a t, existe $\bar{t} > 0 \quad \bar{t} < T$ tal que $|t| \leq \bar{t} \implies \|\phi(x_0,t) - x_0\| < \delta$

Entonces, en particular: $\phi(x_0,\bar{t}) \in B_\delta(x_0)$

o sea $\|\phi(x_0,\bar{t}+s) - \phi(x_0,s)\| \longrightarrow 0 \quad s\to+\infty$

pero, para t= nT $\|\phi(x_0,\bar{t}+nT) - \phi(x_0,nT)\| = \|\phi(x_0,\bar{t}) - x_0\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

El miembro de la izquierda es constante con n,

Se tiene entonces: $\phi(x_0,\bar{t}) = x_0 \qquad 0 < \bar{t} < T$

lo cual contradice la definición de período T.

Q.E.D.

Nota

La idea de que otras órbitas, cercanas a la órbita periódica $\phi(x_0,t)$, sean tales que se acerquen, cuando $t\to+\infty$, a la órbita periódica, es formalizada a través de la siguiente definición:

DEFINICION

Una órbita periódica $\phi(x_0,t)$ se dice orbitalmente asintóticam. estable en el futuro, si

a) $\forall \varepsilon \ \exists \ \delta>0$ $\quad y\in B_\delta(x_0) \Rightarrow dist(\phi(y,t),\sigma(x_0))<\varepsilon \ \forall t\geq 0$

b) existe $\rho>0$ talque $dist(\phi(y,t),\sigma(x_0))\to 0$ cuando $t\to+\infty$ $\forall y\in B_\rho(x_0)$

(donde $\sigma(x_0)=\{\phi(x_0,t): \ t\in R\}$ es la órbita por x_0).

Nota: Puede cumplirse la estab. orbital sin cumplirse la estabilidad (ejercicio 31).

6.2- TRANSFORMACION DE POINCARE

Sea $\dot{x}=X(x)$, con X un campo de clase C^1 en M.
Consideremos una órbita periódica $\phi(x_0,t)$ (definida para toda t, con período T).
La órbita, en t=0, es tangente al vector $X(x_0)\neq\vec{0}$.

Sea H el hiperplano ortogonal a $X(x_0)$ por x_0.

H= $\{y : \langle y-x_0, X(x_0)\rangle=0\}$

Consideremos la ecuación $F(x,t)=\langle \phi(x,t)-x_0, X(x_0)\rangle=0$

Se satisface para $x=x_0$ $t=T$. El teorema de la función implícita, asegura que, si $\partial F/\partial t|_{\substack{x=x_0\\ t=T}}\neq 0$, entonces existe $t=t(x)$ definida en un entorno de x_0, que toma valores en un entorno de T, y tal que

$$F(x,t(x)) = \langle\phi(x,t(x))-x_0, X(x_0)\rangle=0$$

Si F es de clase C^1, entonces la función $t(x)$ también es de clase C^1.

En nuestro caso $\frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{\substack{x=x_0\\ t=T}} = \langle X(x_0), X(x_0)\rangle = \|X(x_0)\|^2\neq 0$

Entonces, para todo x suficientemente próximo a x_0, existe $t(x)$ tal que $\phi(x,t(x))\in H$, con $t(x)$ cercano a T.

La transformación $x\longrightarrow t(x)$ es de clase C^1. Entonces la transformación $x\longrightarrow\phi(x,t(x))$, también es de clase C^1, toma valores en un entorno de x_0. Es la transformación que, a cada punto x suficientemente cercano a x_0, le hace corresponder el punto del hiperplano H, al que llega $\phi(x_0,t)$ después de dar una vuelta.

DEFINICION

Se llama transformación de Poincaré asociada a la órbita periódica $\phi(x_0,t)$, a la transformación $x\longrightarrow\phi(x,t(x))\in H$, definida en un entorno $H\cap U$ de x_0, como se dijo antes.

Nota: La transformación de Poincaré tiene a x_0 como punto fijo.

DEFINICION

La órbita periódica se llama ATRACTOR HIPERBOLICO, si los valores propios de $P'(x_0)$ (donde P indica la transformación de Poincaré asociada a la órbita periódica), tienen módulo menor que 1.

Nota: Según lo observado al final de 5.2, cuando se tiene un atractor hiperbólico, su transformación de Poincaré puede iterarse hacia adelante en un entorno de V_{x_0} en el hiperplano H, y el punto x_0 es asintóticamente estable en el futuro. Lo dicho es un corolário de la siguiente proposición:

PROPOSICION

Si $\phi(x_0,t)$ es un atractor hiperbólico, entonces existe un entorno U de x_0, y una norma en H, y un número $\lambda < 1$ $\lambda > 0$ tales que

$$\| P(x) - x_0 \|_H \leq \lambda \| x - x_0 \|_H \qquad \forall x \in U$$

donde P es la transf. de Poincaré

Prueba

Según la última proposición de 5.2, existe una norma en H y un número $\lambda' < 1$ $\lambda' > 0$ tales que $\| P'(x_0)(x - x_0)\|_H < \lambda' \| x - x_0\|_H$

Sea $P(x) - x_0 = P'(x_0)(x - x_0) + \Delta(x)$

donde $\frac{\|\Delta(x)\|_H}{\|x - x_0\|_H} \to 0$ cuando $\|x - x_0\| \to 0$ (porque P es de clase C^1).

Luego, para todo x en H:

$$\|P(x) - x_0\|_H \leq \lambda' \|x - x_0\|_H + \|\Delta(x)\|_H$$

Tomando U tal que $\forall x \in U$ $\frac{\|\Delta(x)\|_H}{\|x - x_0\|_H} \leq \frac{1-\lambda'}{2}$

se tiene

$$\|P(x) - x_0\|_H \leq \|x - x_0\|_H \left(\lambda' + \frac{\|\Delta x\|_H}{\|x - x_0\|_H} \right) \leq \lambda \|x - x_0\|_H$$

donde $\lambda = \lambda' + \frac{1-\lambda'}{2} < 1$

QED

5.3 ESTABILIDAD DE LOS ATRACTORES HIPERBOLICOS

Los atractores hiperbólicos tienen propiedades fuertes de estabilidad en el futuro:

TEOREMA

Los atractores hiperbólicos son estables y orbitalmente estables en el futuro.

PRUEBA

Veamos primero la estabilidad orbital:

Vamos a demostrar las siguientes afirmaciones:

i) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in H$ con $\|x - x_0\|_H < \delta$, entonces

$$dist(\phi(x,t), \sigma(x_0)) < \varepsilon \qquad \forall t \geq 0$$

ii) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\rho > 0$ tal que $\|y - x_0\| < \rho \Rightarrow$ y

$$dist(\phi(y,t), \sigma(x_0)) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$ y además tiende a 0 con $t \to +\infty$

i) Elijamos $\delta > 0$ de modo que, si $x \in H$ y si $\|x - x_0\|_H < \delta$, entonces:

$x \in U$ donde U es el entorno de x en H, de la proposición anterior.

$|t(x) - t(x_0)| = |t(x) - T| < \frac{T}{10}$

$\|\phi(x,t) - \phi(x_0,t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, T + \frac{T}{10}]$

Dado un tal $x \in H$, y dado $t \geq 0$, sea $P^n(x)$ el último punto del arco de órbita $\{\phi(x,s)\}_{0 \leq s \leq t}$, que está en H. O sea:

$$\phi(x,t) = \phi(P^n x, \tilde{t}) \quad \text{con} \quad 0 \leq \tilde{t} < t(P^n x)$$

Se tiene:

$$\|P^n x - x_0\|_H < \lambda^n \|x - x_0\|_H < \delta \Rightarrow |t(P^n(x)) - T| < \frac{T}{10}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \tilde{t} < T + \frac{T}{10} \Rightarrow dist(\phi(x,t), o(x_0)) \leq dist(\phi(P^n x, \tilde{t}), \phi(x_0, \tilde{t})) < \varepsilon$$

ii) Como la función $\phi(y, t(y))$ es continua, dado el δ construido antes, existe $\rho > 0$, tal que $\|y - x_0\| < \rho \Rightarrow \|\phi(y, t(y)) - x_0\|_H < \delta$

y además $|t(y) - T| < \frac{T}{10}$; $\|\phi(y,t) - \phi(x_0,t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, T + \frac{T}{10}]$

Entonces, se cumple $\boxed{dist(\phi(y,t), o(x_0)) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0}$.

Por la parte i), existe, para cada $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, un δ_n.

LLamemos $x = \phi(y, t(y)) \in H$, y elijamos $P^{j_n}(x) \in H$

tal que $\|P^{j_n}(x) - x_0\|_H < \lambda^{j_n} \|x - x_0\|_H < \delta_n$

Entonces $P^{j_n}(x) = \phi(y, T_n(y)) \qquad dist(\phi(P^{j_n}(x), t), o(x_0)) < \frac{1}{n} \quad \forall t \geq 0$

Hemos probado que existe T_n tal que $dist(\phi(y,s), o(x_0)) < \frac{1}{n} \quad \forall s \geq T_n$

Eso es

$$dist(\phi(y,s), o(x_0)) \xrightarrow[s \to +\infty]{} 0$$

qed

Veamos ahora la <u>estabilidad</u> en el futuro . La estabilidad orbital ya demostrada, dice que hay acercamiento a la órbita, pero no dice nada respecto a los tiempos en que se producen . Ahora hay que probar que, para todo instante $t \geq 0$ el punto $\phi(y, t)$ dista menos de del punto $\phi(x_0, t)$, para <u>el mismo</u> t; (cuando y está suficientemente cercano de x_0).

Lo demostraremos también en dos partes:

i') Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in H$ y si $\|x - x_0\|_H < \delta$, entonces $\|\phi(x,t) - \phi(x_0,t)\|_H < 2\varepsilon \quad \forall t \geq 0$

ii') Dado $\varepsilon > 0$, existe $\rho > 0$ tla que $\|y - x_0\| < \rho \Rightarrow$

$$\|\phi(y,t) - \phi(x_0,t)\| < 3\varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

i') Sea $\alpha > 0$ un número tal que $|s| < \alpha \Rightarrow \|\phi(x_o, t+s) - \phi(x_o, t)\| < \mathcal{E}\ \forall t \in R$. (existe por la continuidad de $\phi(x_o, t)$ respecto a s, y por la compacidad de la órbita periódica).

La función $t(x)$, definida para todo x en un entorno de x_o, es de clase C^1, entonces $|t(x) - t(x_o)| < K \|x - x_o\|_H$ para cierta constante $K > 0$, para todo x donde está definida $t(x)$.

Sea $\lambda < 1$, el número cuya existencia fue asegurada en la última proposición de 6.2

Dado $\mathcal{E} > 0$, elijamos $\delta > 0$, de modo que cumpla las mismas condiciones pedidas en i), y además que $\delta < \dfrac{\alpha}{k \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i}$

Entonces, si $x \in H$, y si $\|x - x_o\|_H < \delta$, se tiene:

$$\phi(x,t) = \phi(P^n x, t - t(x) - \ldots - t(P^{n-1}x)) = \phi(P^n x, t - nT + \sum_{j=0}^{n-1} T - t(P^j x))$$

$$\|\phi(x,t) - \phi(x_o, t)\| \leq \|\phi(P^n x, \tilde{t}) - \phi(x_o, \tilde{t})\| + \|\phi(x_o, \tilde{t}) - \phi(x_o, t - nT)\|$$

donde $\tilde{t} = t - nT + \sum_{j=0}^{n-1} T - t(P^j x) \qquad 0 \leq \tilde{t} \leq t(P^n x) \leq T + T/10$

Por lo tanto, el primer sumando es menor que $\mathcal{E}$ (igual que en i)

$\tilde{t} = t - nT + s$ donde $|s| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |t(P^j x_o) - t(P^j x)| \leq K \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j \|x - x_o\|_H < \alpha$

Luego, el segundo sumando es menor que $\mathcal{E}$.

ii') Con el número $\delta > 0$ construido en i'), elijamos $\rho > 0$ que cumpla las mismas condiciones pedidas en ii), y además tal que

$\|y - x_o\| < \rho \Rightarrow |t(y) - T| < \alpha$

Para tales puntos y, se cumple:

$$\|\phi(y,t) - \phi(x_o, t)\| \leq \|\phi(\phi(y, t(y)), t - t(y)) - \phi(x_o, t - t(y))\| + \|\phi(x_o, t - t(y)) - \phi(x_o, t - T)\|$$

Llamando $x = \phi(y, t(y)) \in H$: $\|x - x_o\|_H < \delta$

El primer sumando es menor que $\mathcal{E}$ porque $\|x - x_o\|_H < \delta$.
El segundo sumando es menor que $\mathcal{E}$, pues $t - t(y) = t - T + s$ con $|s| < \alpha$

QED

Nótese que la hipótesis de atractor hiperbólico es esncial para demostrar que la suma de los corrimientos de tiempos

$$\sum_{j=0}^{n-1} (T - t(P^j x))$$

es convergente. (La hipótesis de atractor hiperbólico se emplea a través de la existencia de una contracción en el hiperplano H transversal a la órbita periódica, definida por la transformación de Poincaré).

Bibliografía para el capítulo 3

SOTOMAYOR Licoes de Ecuacoes Diferenciais
ROXIN Ecuaciónes diferenciales ordinarias
MASSERA On Liapunov Conditions of Stability (Annals of Math. vol50-1949)
HIRSCH-SMALE Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.

V.I. ARNOLD Ordinary Differential Equations.

Capítulo 4 DINAMICA TOPOLOGICA

Consideraremos un sistema din'mico $\phi(p,t)$ de parámetro real o uno de parámetro entero $f^n(p)$, en un espacio topológico de Hausdorff(para fijar ideas un subconjunto de R^n).

Estudiaremos propiedades topológicas generales de estos sistemas.

1. RECURRENCIA

DEFINICION

Un punto p se dice que es recurrente positivamente, o también que es "estable positivamente según Poisson", si $p \in \omega(p)$. (donde $\omega(p)$ es el omega-límita de p).

Se dice que es recurrente negativamente, si $p \in \alpha(p)$ (alfa-límite de p).

Se dice que es recurrente si es a la vez recurrente positivamente y negativamente.

Notas:

1) p recurrente positivamente, es decir que existe $t_n \to +\infty$ tal que $\phi(p, t_n) \to p$. La órbita por p pasa infinitas veces para tiempos arbitrariamente grandes, tan cerca como se desee de p.

Dado cualquier entorno U de p, el conjunto $\{t \in R : \phi(p,t) \in U\}$ no está acotado superiormente.

2) p es recurrente positivamente si y solo si dado U entorno arbitrario de p, existe $t > 1$ tal que $\phi(p,t) \in U$ (ver ejercicio 1).

3) si p es recurrente positivamente, entonces $\phi(p,t)$ también lo es para todo t (ejercicio 1)

PROPOSICION

p es recurrente positivamente si y solo si $\overline{\sigma(p)} = \omega(p)$.

" " " Negativamente " " " " $\overline{\sigma(p)} = \alpha(p)$.

Prueba

p es recurrente posit $\iff p \in \omega(p) \iff \sigma(p) \subset \omega(p) \iff \overline{\sigma(p)} = \omega(p)$

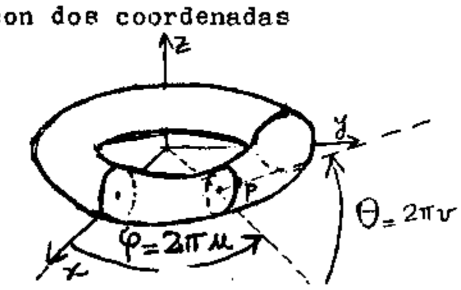
Corolario

p es recurrente si y solo si $\alpha(p) = \omega(p) = \overline{\sigma(p)}$

EJEMPLO- DINAMICA LINEAL EN EL TORO (FLUJO IRRACIONAL).

Consideremos el toro T^2 en R^2 (superficie generada por la circunferencia $y=0$ $(x-a)^2 + z^2 = r^2$ $(0<r<a)$; al girar alrededor del eje oz.)

Cada punto del toro T^2, puede identificarse con dos coordenadas que son los angulos de la figura:



$p \in T^2$

$p = ((r\cos\theta + a)\cos\varphi, (r\cos\theta + a)\operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\theta)$

Sea $(u,v) \in R^2$ y sea

$\pi : R^2 \to T^2$ dada por

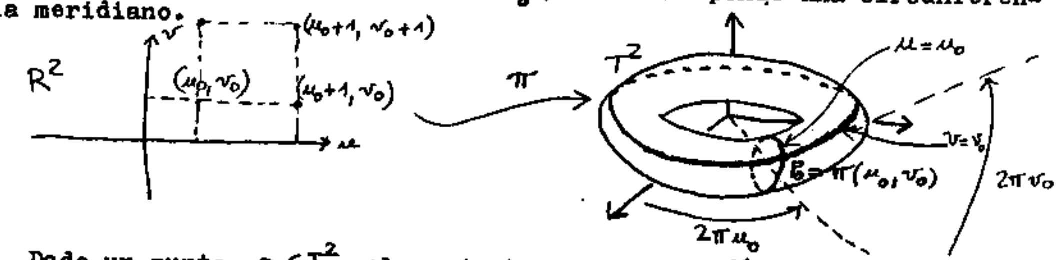
$\pi: R^2 \to T^2$

$x = (r\cdot\cos 2\pi v + a)\cos 2\pi u$ $\qquad$ $y = (r\cos 2\pi v + a)\,\text{sen}\, 2\pi u$

$z = r\,\text{sen}\, 2\pi v.$

La función $\pi: R^2 \to T^2$ se llama proyección de R^2 sobre el toro.

A la recta $v = v_0$, le corresponde la circunferencia contenida en el plano z constante. A la recta $u = u_0$, le corresponde una circunferencia meridiano.



Dado un punto $p_0 \in T^2$ el conjunto preimagen $\pi^{-1}(p_0)$ es un conjunto de infinitos puntos, tales que $\left.\begin{array}{l}(u_0,v_0)\in\pi^{-1}(p_0)\\(u_0',v_0')\in\pi^{-1}(p_0)\end{array}\right\}\Rightarrow (u_0',v_0') = (u_0+n, v_0+m)$ con n y m enteros.

Si π se restringe a un cuadrado abierto cualquiera en R, de lado 1 o menor, entonces queda inyectiva, y es un homeomorfismo sobre su imagen (se dice que es un homeomorfismo local).

Se puede definir en R^2 la relación de equivalencia $(u_0,v_0)\sim(u_0',v_0')$ si $u_0' - u_0 = n$ entero, $v_0' - v_0 = m$ " A cada clase de equivalencia $[u_0, v_0]$, corresponde un único punto del toro, y recíprocamente.

Dar una curva $p=p(t)$ en el toro, equivale a dar una curva $u=u(t)$, $v=v(t)$ en R^2, y tomar $p(t) = \pi(u(t),v(t))$

Dar una ecuación diferencial en el toro, equivale a dar una ecuación $(\dot u, \dot v) = X(u,v)$ en R^2, donde $X: R^2 \to R^2$, es periódica de período (1,1), es decir: $X(u+n, v+m) = X(u,v)$ $\forall$ n,m enteros. Si $(u(t), v(t))$ verifica la ecuación diferencial $(\dot u, \dot v) = X(u,v)$ entonces $(u(t)+n, v(t)+m)$ es otra curva de R^2, que también verifica la ecuación diferencial, y que da, al aplicar π, la misma curva en T^2.

Sea $\begin{cases}\dot u = 1\\ \dot v = a\end{cases}$ La solución general en R^2 es $\begin{cases}u = t+u_0\\ v = at+v_0\end{cases}$ (rectas todas paralelas, de pendiente a). (rectas $a(u-u_0) = v - v_0$)

Se llama flujo lineal en el toro a $\phi(p_0,t) = \pi(t+u_0, at+v_0)$ flujo racional, si a es racional; y flujo irracional en caso contrario.

<u>TEOREMA</u>
Todas las órbitas del flujo racional del toro son periódicas.
Todas las órbitas del flujo irracional del toro son densas.

<u>Prueba</u>
Si $a = M/N \in Q$ hay que probar, para (u_0, v_0) cualquiera en R^2 que existe T tal que $T>0$ $\quad u_0+n = T+u_0 \quad v_0+m = aT+v_0$ n,m enteros
Tomando T=N resulta $n=N$ $\quad m=M$ como se quería.

Si a es irracional: hay que probar que dado (u_0, v_0) y dado un abierto U arbitrario en T^2, existe $T\in\mathbb{R}$ tal que

$$\pi(u_0+T,\ v_0+aT) \in U$$

Sea (u_1,v_1) y $\delta>0$ tales que $\pi\ B_\delta(u_1,v_1) \subset U$.

Basta hallar T núm. real y m,n enteros tales que

$$(u_0+T+m,\ v_0+aT+n) \in B_\delta(u_1,v_1)$$

$$\|(u_0+T+m-u_1,\ v_0+aT+n-v_1)\| < \delta \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$

con $u_0, v_0, \delta, u_1, v_1$ dados.

Alcanza probar que existen enteros m y n tales que

$$|v_0+a(u_1-u_0-m)+n-v_1| < \delta \ ; \ |v_0-v_1+a(u_1-u_0)-am+n|<\delta$$

(pues basta elegir $T = u_1-u_0-m$)

Llamemos $r = v_0-v_1+a(u_1-u_0)$. supongamos por absurdo que para todo n y m enteros: $|r-am+n| \geq \delta$

Entonces, todos los elementos del conjunto $G=\{am-n\in\mathbb{R} : n,m \text{ enteros}\}$ están fuera del intervalo $(r-\delta, r+\delta)$.

G es un subgrupo de reales (pues $g\in G$ $g'\in G \Rightarrow -g\in G$ $g+g'\in G$).

Si hubiera algún $g\in G$ $0<g<\delta$, tomando $k = \text{ent}(r/g)$
$r = kg+u$ con $0\leq u<g<\delta$. Tendríamos $kg\in G$
$kg\in(r-\delta, r+\delta)$

Luego: si $g\in G$ y si $g>0$, entonces $g\geq\delta$

si $g>g'$ están en G, entonces $g-g'\geq\delta$. Los puntos de G están aislados. El conjunto $\{g\in G ;\ g>0\}$ es acotado inferiormente por δ

Sea $\ell = \cancel{\min}\inf\{g\in G ;\ g>0\}>0$ $\quad \ell>0 \quad \ell\in G$ (¿por qué?)

Probemos que todo $g\in G$ es múltiplo entero de ℓ:

dado $g\in G$ sea $k=\text{ent}(g/\ell)$ $\quad g=k\ell+u$ con $0\leq u<\ell$

$u = g-k\ell\in G \quad \ell=\min\{u>0 ;\ u\in G\} \quad 0\leq u<\ell\Rightarrow u=0.$

En particular:

Por definición del grupo G, $a = a1-0 \in G$

Luego, $a=k\ell$ para algún entero k.

Además $1 = +a.(0)+1 \in G$, luego $1 = h\ell$ para algún entero $h\neq 0$.

$ha = hk\ell = h\ell k = k \Rightarrow a = k/h$ racional, contradiciendo la hipótesis.

Q.E.D

Nota: Según el flujo irrac. en T^2, todos los puntos son recurrentes (ejerc. 2)

2. CONJUNTO NO ERRANTE

DEFINICION Un punto p se llama NO ERRANTE, si $\forall$ U entorno de p y para todo real T, existe $t>T$ tal que $U\cap\phi(U,t)\neq\emptyset$

Observación Los puntos recurrentes son no errantes, pero el recíproco es falso, como se ve en ejercicio 3

P

DEFINICION

Se llama CONJUNTO NO ERRANTE, al conjunto de todos los puntos no errantes

NOTACION : Ω indica el conjunto no errante.

Observaciones

1) p es no errante $\Leftrightarrow$ $\forall U$ entorno de p; dado T existe $t < -T$ tal que $U \cap \phi(U,t) \neq \phi$

Prueba

Supongamos que existe $s > T$ tal que $U \cap \phi(U,s) \neq \phi$. Entonces $\phi(U,-s) \cap U = \phi(U \cap \phi(U,s), -s) \neq \phi$. Sea $t = -s$. Entonces $t < -T$ y cumple $U \cap \phi(U,t) \neq \phi$

El recíproco se prueba en forma similar.

2) $\Omega \supset P^+ \cup P^-$ (donde P^+ es el conjunto de los puntos recurrentes positivamente y P^- el de los rec. negativamente). (ejercicio 3)

3) Ω es invariante (ejercicio 4)

4) Ω es cerrado (pues, si q no pertenece a Ω, existe un entorno U de q y un real T, tal que $U \cap \phi(U,t) = \phi$ $\forall t > T$. También cumplen la misma propiedad todos los puntos de U. Luego $U \subset$ complem. de Ω. Así, el complem. de Ω es abierto).

5) $p \in \omega(q)$ para algún q $\Rightarrow$ p es no errante.

Prueba: Dado U entorno de p, existe $\phi(q,t_1) \in U$. Dado T existe t_n, con $t_n - t_1 > T$, tal que $\phi(q,t_n) \in U$. Entonces:

$$\phi(q,t_n) = \phi(\phi(q,t_1), t_n - t_1) \in \phi(U, t_n - t_1) \cap U \neq \phi$$

6) Si hay alguna semiórbita contenida en un compacto, entonces $\Omega \neq \phi$. (pues algún ω-límite o α-límite es no vacío).

EJEMPLO

Consideremos la función $F: R^2 \to R^2$, dada por $F(u,v) = \operatorname{sen}^2 2\pi u + \operatorname{sen}^2 2\pi v$

Se considera un número a irracional, y el flujo en el toro dado por

$$\dot{u} = F(u,v) \qquad \text{(no es un flujo lineal)}$$
$$\dot{v} = F(u,v)\, a$$

Las órbitas en T^2 están contenidas en las rectas $v - v_0 = a(u - u_0)$

Aunque no es un flujo lineal, sus órbitas están contenidas (como conjuntos) en las del flujo irracional del toro. Hay un punto fijo (0,0)

La velocidad con que se recorren las órbitas se aproxima a cero, cuando la órbita se acerca al punto (0,0) en el toro.

Los puntos de $\pi(\{(u,v) \in R^2 \;\; v = au \; ; \; u > 0\}$ son recurrentes positiv. pero no negativamente. Los puntos de $\pi\{v = au \, ; \, u < 0\}$ son recurrentes negativ. pero no positiv. Los demás son recurrentes en ambos sentidos

Todo el toro es el conjunto no errante Ω (ejercicio 5).

3. CONJUNTOS MINIMALES

DEFINICION

Un conjunto M de un espacio topológico, donde se tiene definido un sistema dinámico, se dice MINIMAL, si es cerrado, invariante , no vacío, y no contiene subconjuntos propios (subc. propio es un subconjunto no vacío y que no coincide con M), que sean cerrados e invariantes.

Nota: En buena parte de la bibliografía se pide además que M sea compacto. Nosotros distinguiremos los minimales de los "minimales compactos".

TEOREMA

Si M es no vacío, entonces

M es minimal si y solo si para todo $p \in M$, la órbita por p es DENSA EN M.

(densa en M quiere decir que todos los puntos de M que no son de la órbita por p, son puntos de acumulación de la órbita por p; es decir, $\overline{o(p)} = M$).

Prueba

Si M es minimal, entonces es cerrado e invariante. Sea $p \in M$.
M invariante $\Rightarrow o(p) \subset M$. M cerrado $\Rightarrow \overline{o(p)} \subset M$.
el conjunto $\overline{o(p)}$ es no vacío, cerrado e invariante, contenido en M minimal $\Rightarrow \overline{o(p)} = M$.

Recíprocamente:

Si $p \in M$, $\overline{o(p)} = M$, entonces M es cerrado, invariante (y no vacío por hipótesis). Tomemos $G \neq \emptyset$, cerrado e invariante contenido en M. Para demostrar que M es minimal, hay que probar que $G = M$.
Sea $q \in G$. G invariante $\Rightarrow o(q) \subset G$; G cerrado $\Rightarrow \overline{o(q)} \subset G$.
$G \subset M \Rightarrow q \in M$. Por hipótesis: $\overline{o(q)} = M$. Luego $M = \overline{o(q)} \subset G \subset M \Rightarrow G = M$.

QED

EJEMPLOS

1. En el flujo irracional en el toro, el toro es el único minimal.
2. En el ejemplo de la pág. 4 (el flujo no lineal irracional en el toro con un único punto de equilibrio), el único minimal es el punto de equilibrio $(0,0)$; pues si contuviera otro punto p, debería contener a $\overline{o(p)} = T^2$. Pero T^2 no es minimal porque contiene un invariante cerrado no vacío propio (el punto de equilibrio $(0,0)$).
3. En el ejemplo anterior consideremos como espacio topológico el toro "pinchado" (es decir el toro sin el punto $(0,0)$).
Todas las órbitas de ese espacio, quedan ahora, densas. El único minimal es todo ese espacio (no compacto).
4. En un sistemas dinámico de R^2, cuyas órbitas sean las de la figu ra, los únicos minimales son los dos puntos de equilibrio (cada uno es un minimal, la unión de ambos no lo es).

5. En un sistema dinámico de R, cuyas órbitas sean las de la figura los únicos minimales son el punto de equilibrio (que es una fuente), y la órbita periódica (que es atractora).

COROLARIO

Dos minimales distintos son disjuntos. (sale inmediatamente de la definición de minimal, considerando la intersección de dos minimales distintos).

PROPOSICION

Si M es compacto no vacío, entonces:

a) M es minimal si y solo si para todo $p \in M$ $\omega(p) = M$, si y solo si para todo $p \in M$ $\alpha(p) = M$

b) M es minimal compacto $\Rightarrow$ todos los puntos de M son recurrentes y por lo tanto no errantes.

Prueba a) Es una consecuencia de que en conjuntos compactos los ω-límite son no vacíos, cerrados invariantes contenidos en $\overline{\sigma(p)}$.
b) Es consecuencia de a) y de que todo punto que esté en su ω y en su α-límite, es recurrente por definición. (Ejercicio 6).

TEOREMA

Todo compacto K invariante no vacío contiene algún minimal.

Prueba

Sea $\mathcal{F} = \{F \subset K;$ F compacto invariante no vacío$\}$

No tiene porqué ser numerable

Si $F_1 \supset F_2 \supset \ldots\ldots \supset F_i \supset \ldots$ en $\mathcal{F}$ entonces $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$ No tiene porqué ser numerable
(pues $\cap F_i$ es compacto, invariante, y no vacío debido a la propiedad de intersecciones finitas en compactos)

El lema de Zorn: afirma que si toda "cadena ordenada" tiene un elemento minimal (un elemento "menor", con la relación de orden parcial en el conjunto, que todos los de la cadena), entonces existe en el conjunto un elemento minimal (un elemento tal que no hay en todo el conjunto ningún otro que sea menor que él)(puede haber varios elementos minimales).

En el conjunto $\mathcal{F}$, sea la relación de orden parcial

F_1 menor que F_2, cuando $F_1 \subset F_2$

(conjunto $\{F_i\}_{i \in I}$ en el que dados dos elementos cualesquiera se puede decir que uno es menor que el otro)

Toda cadena ordenada .. tiene un elemento minimal de la cadena ($\bigcap F_i$), en el conjunto $\mathcal{F}$. Por el lema de Zorn, existe un elemento $M \in \mathcal{F}$ tal que ningún otro $F \in \mathcal{F}$ está contenido en M.
Por definición M es minimal (en sentido dinámico).

CONSECUENCIAS

En un espacio compacto, el conjunto no errante Ω es no vacío y compacto. Se descompone en minimales no vacíos, disjuntos dos a dos. Estos minimales no tienen porqué cubrir todo Ω, pero las órbitas que no cubren pasan infinitas veces, arbitrariamente cerca de algún minimal, para tiempos arbitrariamente grandes y chicos (porque $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ contienen algún minimal).

Observación

Cuando se está trabajando en un espacio compacto, los minimales son compactos, y por lo tanto todos sus puntos son recurrentes.

pero el recíproco es falso: Puede haber puntos recurrentes (aún en un espacio compacto), que no estén contenidos en ningún minimal:
Por ejemplo:

En el ejemplo de la pág. 4 (flujo no lineal en el toro, con pendiente irracional, y un único punto de equilibrio (0,0))., el único minimal es (0,0). El especio es compacto, y hay órbitas recurrentes que no son (0,0): todas las órbitas por puntos que no sean los de $\pi\{(u,v)\in R^2 \quad v=au\}$.

3. En particular, interesa caracterizar los puntos de los minimales.
$p \in M$ minimal $\Leftrightarrow$ $\overline{o(p)} = M$ minimal.

En el caso de los minimales compactos, los puntos cumplirán una condición aún más fuerte que la recurrencia:

4 RECURRENCIA FUERTE Y MINIMALES COMPACTOS

DEFINICION

p es recurrente fuertemente si , para todo entorno U de p existe un número $L > 0$ tal que todo arco de trayectoria por p, con duración L, corta a U .

Es decir: $\{\phi(p,t) \ ; \ T\leq t\leq T+L\}$ corta a U , $\forall T\in R$

Observación:

p es recurrente , según lo visto en 1, si
para todo entorno U de p , el conjunto
$\{t\in R \ : \ \phi(p,t)\in U\}$
es no acotado inferiormente ni superiormente.

p es fuertemente recurrente, si
para todo entorno U de p, el conjunto $\{t\in R \ : \ \phi(p,t)\in U\}$ es L-denso.

DEFINICION

Un conjunto de reales se dice que es L-denso si todo intervalo de longitud L , tiene algún elemento del conjunto .

Un conjunto de reales que sea L-denso, es no acotado superiormente ni inferiormente. Pero la condición de L-densidad exige además que los puntos del conjunto no estén muy separados.

La condición de recurrencia se expresa diciendo que la órbita por p vuelve infinitas veces a estar arbitrariamente cerca de p.
la condición de recurrencia fuerte, pide además que no haya que esperar más que un tiempo L, entre un regreso y el próximo.

TEOREMA (Birkhoff)

Consideremos p tal que $o(p)$ está contenida en un compacto.
Entonces:
$\overline{o(p)}$ es minimal (y compacto), si y solo si p es recurrente fuertemente.

Prueba

Prueba

Sea p recurrente fuertemente, con $\overline{o(p)}$ compacto. Probemos que $\overline{o(p)}$ es minimal.

$\overline{o(p)}$ es cerrado, invariante y no vacío. Sea $G \subset \overline{o(p)}$, G cerrado invariante no vacío. Hay que probar que $G=\overline{o(p)}$.

- Si $p \in G$, entonces $\overline{o(p)} \subset G \subset \overline{o(p)} \Rightarrow G = \overline{o(p)}$ como se quería.

- Si $p \notin G$, entonces existen abiertos V y V', disjuntos, que contienen a p, y al conjunto compacto G respectivamente.

Por la hipótesis de recurrencia fuerte de p, existe $L>0$, tal que todo arco de trayectoria de p, con duración L, corta a V. (1).

Tomemos $q \in G \subset \overline{o(p)}$. Como G es invariante, $\phi(q,t) \in G \subset V'$ $\forall t \in [0,L]$
Por la continuidad de $\phi(q,t)$ respecto a (q,t): existe un entorno U de q, tal que $\phi(U,t) \subset V'$ $\forall t \in [0,L]$ (2)

Como $q \in \overline{o(p)}$, y U es un entorno de q: existe T tal que $\phi(p,T) \in U$
Luego, por (2): $\phi(p, T+t) \in V'$ $\forall t \in [0,L]$

Pero V y V' son disjuntos: $\phi(p,T+t)$ no corta a V $\forall t \in [0,L]$
Lo anterior contradice (1).
Entonces, el caso $p \in G$ es general, y $G = \overline{o(p)}$ en ese caso, como ya se probó.

RECIPROCO:

Sabiendo que $\overline{o(p)}$ es compacto y minimal, probemos que p es recurrente fuertemente.

Como $\overline{o(p)}$ es compacto, entonces $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ son no vacíos, (cerrados e invariantes) contenidos en el minimal $\overline{o(p)}$
$\alpha(p) = \omega(p) = \overline{o(p)}$. Luego p es recurrente.

Supongamos, por absurdo, que no es fuert. recurrente: Para todo $L>0$, hay un arco de trayectoria de p, con duración L, que no corta a un entorno dado U de p.

Sea para cada n, t_n tal que $\{\phi(p,t) \; : \; t_n \leq t \leq t_n + n\}$ no corta a U.

Como o(p) está contenida en el compacto $\overline{o(p)}$: existe una subsucesión $\phi(p, t_{n_j})$ convergente a q.
Como $\phi(p,t_n) \notin U \Rightarrow q \notin U$

Sea $T \geq 0$ ...: $\phi(p, T+t_{n_j}) \to \phi(q,T)$ por la continuidad de ϕ
Para todo n_j que sea mayor que T: $t_{n_j} \leq t_{n_j} + T \leq t_{n_j} + n_j$
Luego: $\phi(p, T+t_{n_j}) \notin U$, y pasando al límite: $\phi(q,T) \notin U$ $\forall T \geq 0$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} p \in U \\ \phi(q,T) \notin U \quad \forall T \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p \notin \omega(q)$$

Pero $q \in \overline{o(p)}$ por construcción, y $\overline{o(p)}$ es minimal.
Entonces $\omega(q) = \overline{o(p)} \Rightarrow p \in \omega(q)$ contradiciendo lo anterior.

QED

DEFINICION

Un conjunto minimal, se dice no trivial, cuando no es un punto fijo, ni una órbita periódica, ni todo el espacio. Veremos más adelante, ejemplos de minimales compactos no triviales.

En resumen, se establecen las siguientes realciones :

CONJUNTO NO ERRANTE
$\cup$
UNION DE TODOS LOS α-Límites y ω-Límites.
$\cup$
Conjunto de puntos recurrentes positivamente o negativam.
$\cup$
conjunto de puntos recurrentes (pos. yneg.)
$\cup$
Unión de minimales compactos
$=$
Conjunto de puntos fuertemente recurrentes con órbitas contenidas en algún compacto.

(Si el espacio es compacto, o si hay alguna semitrayectoria que se mantiene en un compacto, el último de esas categorías es no vacío).

En el ejercicio 7 se pide encontrar ejemplos que muestren que las inclusiones anteriores son estrictas.

5 MINIMALES COMPACTOS EN ESPACIOS METRICOS

Consideremos ahora un espacio topológico, cuya topología proviene de una métrica d(distancia).

La definición de recurrencia fuerte, puede traducirse en:

DEF. p es fuertemente recurrente si y solo si dado $\varepsilon>0$, existe $L>0$ (que depende de p y de ε), tal que todo arco de órbita de p, con duración L, pasa por $B_\varepsilon(p)$.

Otra forma de enunciar lo mismo es:

p es fuertemente recurrente si dado $\varepsilon>0$, el conjunto de reales $\{t\in R \;\; d(\phi(p,t), p) < \varepsilon\}$ es relativamente denso.

(Un conjunto de reales se dice relativamente denso, cuando es L-denso para algún número $L>0$).

El número L en la definición de recurrencia fuerte, depende de ε y del punto p. Todo arco de órbita de p, con duración L dista menos que ε de p.

DEFINICION.

p es fuertemente uniformemente recurrente, si dado $\varepsilon>0$, existe $L>0$ (que depende de ε , y de la órbita de p), tal que todo arco de órbita de p, con duración L dista menos que ε , de cualquier punto de la órbita por p.

En apariencia esta condición es más exigente que la recurrencia fuerte, pero en realidad no lo es:

PROPOSICION

Si $\overline{o(p)}$ es compacto, entonces:
p es fuertemente recurrente si y solo si lo es uniformamente.

Prueba

Se deja como ejercicio 11 .

(sugerencia: p fuert. recurrente $\Rightarrow$ q también para todo $q \in o(p)$. Cubrir $\overline{o(p)}$ compacto, con una cantidad finita de bolas $B_{\varepsilon/2}(q_i)$ con $q_1 \dots q_r \in o(p)$. Parqa cada q_i existe L_i tal que todo arco con duración L_i corta a $B_{\varepsilon/2}(q_i)$. Sea $L = \max L_i$. Muéstrese que todo arco con duración L corta a $B_\varepsilon(q)$ para todo $q \in o(p)$.)

Otro enunciado del teorema de Birkhoff; resulta:
Si $\overline{o(p)}$ es compacto, entonces; $\overline{o(p)}$ es minimal (y compacto), si y solo si p es unif. fuertem. recurrente.

Nota:
En espacios métricos completos, se demuestra que:
p unif. fuertem recurrente $\Rightarrow$ $\overline{o(p)}$ compacto. (ejercicio 12).
De allí sale este otro enunciado del teorema de Birkhoff:
En un espacio métrico completo, $\overline{o(p)}$ es minimal compacto si y solo si p es unif. fuertemente recurrente.

(es decir: dado $\varepsilon > 0$, existe $L > 0$, tal que el conjunto $\{t : \phi(p,t) \in B_\varepsilon(q)\}$ es L- denso $\forall\, q \in o(p)$).

6. ORBITAS CUASI-PERIODICAS

Sea un sist. dinámico en un espa métrico

DEFINICION

Un punto p se llama CUASI PERIODICO, si dado $\varepsilon > 0$, existe $L > 0$ tal que

$$\{\tau : \ dist(\phi(p,t+\tau), \phi(p,t)) < \varepsilon \ \forall t \in R\}$$

es un conjunto L-denso en la recta R.

COMENTARIO

Se pide que para cada punto de la órbita por p haya instantes τ de regreso a menos de ε del punto de partida, que esos instantes formen un conjunto L-denso (recurrencia fuerte), pero además:
que sean los MISMOS instantes τ que sirvan para regresar a menos de ε del punto de partida, cualquiera sea éste en la órbita por p.

CONSECUENCIA

En un espacio métrico completo, o(p) casi periódica $\Rightarrow$ $\overline{o(p)}$ minimal compacto. (ver ejercicio 13)

EJEMPLO

Definamos en el toro T^2 la siguiente distancia:

Si p_1 y p_2 son dos puntos de T^2, y si $\pi: R^2 \to T^2$ es la proyección definida en (1),

$$d(p_1, p_2) \stackrel{def}{=} \min \{ \| (u_1 - u_2, v_1 - v_2) \| \text{ para } (u_1, v_1) \in \pi^{-1}(p_1) \text{ y } (u_2, v_2) \in \pi^{-1}(p_2) \}$$

(Puede verificarse que se cumple $d(p_1, p_2) \geq 0$, $d = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$, $d(p_1, p_2) = d(p_2, p_1)$; y la propiedad triangular).

Todas las órbitas del flujo lineal irracional del toro son casi periódicas.

En efecto:

El toro es minimal compacto, y entonces todas sus órbitas son fuertemente recurrentes: dado $\varepsilon > 0$ $\exists L$ tal que $\{\tau \in R: d(\phi(p_0, \tau), p_0) < \varepsilon\}$ es L-denso.

Como en el flujo lineal se cumple: $d(p,q) = d(\phi(p,t), \phi(q,t))$ $\forall t \in R$, entonces $\{\tau \in R: d(\phi(p_0, t+\tau), \phi(p_0, t)) < \varepsilon \ \forall t \in R\}$ es L-denso

QED

COMENTARIO

En un espacio métrico completo, si p es casi periódico, entonces $\overline{o(p)}$ es minimal compacto. Pero ¿todas las trayectorias de minimales compactos son casi periódicas? La respuesta es no, como veremos más adelante en un ejemplo.

¿Cuándo un minimal compacto tiene trayectorias casi periódicas?

PROPOSICIÓN

Primero observemos que si el minimal compacto C tiene una trayectoria casi periódica, entonces todas sus trayectorias son casi periódicas.

En efecto:

$p \in C$ C minimal $\Rightarrow \overline{o(p)} = C$ $\left.\begin{matrix} q \in \overline{o(p)} \\ p \text{ casi periód} \end{matrix}\right\} \Rightarrow q$ casi periód. pues:

Sea $H = \{\tau: d(\phi(p, t+\tau), \phi(p,t)) \leq \varepsilon\}$. p casi periód $\Rightarrow$ H rel. denso

$q \in \overline{o(p)}$ $q = \lim \phi(p, t_n)$

$\phi(q, t+\tau) = \lim \phi(p, t+\tau+t_n)$ $\forall \tau \in H$.

$$\operatorname{dist}(\phi(q,t+\tau), \phi(q,t)) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist} \phi(p, t+\tau+t_n); \phi(p, t+t_n) \leq \varepsilon \quad \forall \tau \in \{\tau: d(\phi(p, t+\tau), \phi(p,t)) < \varepsilon\}$$

Entonces $\{\tau: d(\phi(q, t+\tau), \phi(q,t)) \leq \varepsilon\}$ es rel. denso .

TEOREMA

En un espacio métrico , sea C un minimal compacto.

Entonces:

C es estable Liapunov si y solo si las trayectorias por C son casi-periódicas.

DEFINICION

Un conjunto invariante C se dice que es estable LIAPUNOV , en el futuro, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\left.\begin{matrix} \operatorname{dist}(x,y) < \delta \\ x, y \in C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{dist}(\phi(x,t), \phi(y,t)) < \varepsilon \text{ para todo } t \geq 0$$

DEFINICION

Un conjunto C invariante es estable Liapunov en el pasado, si dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $\left.\begin{array}{l} x,y \in C \\ \mathrm{dist}(x,y)<\delta \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{dist}(\phi(x,t),\ \phi(y,t))<\varepsilon$ $\forall\, t\leq 0$

Un conjunto invariante C se dice estable Liapunov, cuando es est.en el futuro y en el pasado, es decir, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{dist}(x,y)<\delta \\ x,y \in C \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{dist}\,(\phi(x,t),\ \phi(y,t))<\varepsilon \quad \forall\, t\in R$$

Prueba del teorema de estabilidad de minimales compactos

Sea C un minimal compacto estable Liapunov. Sea $p\in C$. Probemos que p es casi-periódico.

Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $\left.\begin{array}{l} q\in C \\ \mathrm{dist}(p,q)<\delta \end{array}\right\} d(\phi(p,t),\phi(q,t))<\varepsilon$ $\forall t\in R$

Como $p\in C$ minimal compacto, entonces p es fuertem. recurrente:

$\{\tau:\ \mathrm{dist}(p,\phi(p,\tau))<\delta\}$ es un conjunto relativamente denso.

Si τ pertenece a ese conjunto, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} d(\phi(p,\tau),p)<\delta \\ \phi(p,\tau)\in C \end{array}\right\} \Rightarrow d(\phi(p,\tau+t),\phi(p,t))<\varepsilon \quad \forall t\in R$$

Luego:

$\{\tau:\ \mathrm{dist}(\phi(p,\tau+t),\phi(p,t))<\varepsilon\ \forall t\}$ es rel. denso

de donde p es casi periódico.

RECIPROCO

Sea $C=\overline{o(p)}$ un minimal compacto con trayectorias casi-periódicas. Probemos que C es estable Liapunov.

Dado $\varepsilon>0$, existe L tal que el conjunto

$H=\{\tau:\ d(\phi(p,\tau+t),\phi(p,t))<\varepsilon/3\quad \forall t\}$ es L-denso. (1)

Si $q\in C=\overline{o(p)}$, entonces $q=\lim\phi(p,t_n)$. Sea $\tau\in H$ $\forall t\in R$:

$d(\phi(q,t+\tau),\phi(q,t))=\lim d(\phi(p,t+t_n+\tau),\phi(p,t+t_n))\leq\varepsilon/3$ (2)

Sea $\delta>0$ tal que $\left.\begin{array}{l} d(q,q')<\delta \\ q\in C \\ q'\in C \end{array}\right\} \Rightarrow d(\phi(q,t),\phi(q',t))<\varepsilon/3$ para todo $t\in[0,L]$ (3)

Tomemos $q'\in\overline{o(p)}$ con $\mathrm{dist}(q,q')<\delta$

H, es L-denso:

Sea $t\in R$ cualquiera, y escribamos $t=\tau+\ell$ donde $\tau\in H$ y $\ell\in[0,L]$

Por (2): $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{dist}(\phi(q,t),\ \phi(q,\ell))\leq\varepsilon/3 \\ \mathrm{dist}(\phi(q',t),\ \phi(q',\ell))\leq\varepsilon/3\end{array}\right.$

Por (3): $\mathrm{dist}\,(\phi(q,\ell),\ \phi(q',\ell))<\varepsilon/3$

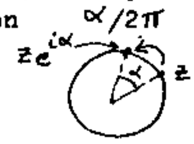
Luego: $\mathrm{dist}(\phi(q,t),\ \phi(q',t))<\varepsilon\quad \forall\, t\in R$

Q.E.D.

NOTA :
Lo definido hasta ahora para sistemas dinámicos con parám. continuo, puede generalizarse para sist. dinámicos con parámetro entero.
(ejercicio 15)

EJEMPLO
En la circunferencia S^1, sea $f: S^1 \to S^1$, dado por $f(z) = z\,e^{i\alpha}$, donde α es un ángulo con $\alpha/2\pi$ irracional.

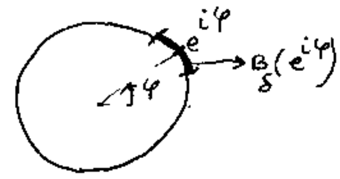
$f^n(z) = z\,e^{in\alpha}$



Como $\alpha/2\pi$ es irracional,
entonces $\alpha n + m2\pi$, con n y m enteros, es denso en R. Luego dados $z\in S^1$ $\varphi\in R$ y $\delta > 0$, existen n y m enteros tales que

$$\alpha n + m2\pi \in (\varphi - \delta - \operatorname{Arg} z, \varphi + \delta - \operatorname{Arg} z)$$

$$f^n(z) = z\,e^{i(n\alpha + m2\pi)} \in B_\delta(e^{i\varphi})$$



Luego $\{f^n(z)\}$ es densa en S^1.
Para todo $z \in S^1$, $\overline{o(z)} = S^1 \Rightarrow S^1$ es minimal.

Veamos que todas las órbitas son estables Liapunov:
Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta \leq \varepsilon < 1$

$\operatorname{dist}(z,z') \leq \delta \Rightarrow z = e^{i\varphi} \quad z' = e^{i\varphi'}$ con $|\varphi - \varphi'| < \delta$

$\operatorname{dist}(f^n(z), f^n(z')) = |n\alpha + \varphi - n\alpha - \varphi'| = |\varphi - \varphi'| < \delta \leq \varepsilon$

Todas las órbitas son estables Liapunov, S^1 es minimal $\Rightarrow$ todas las órbitas son casiperiódicas.

Ahora veremos un ejemplo de minimal con órbitas que no son casiperiódicas:

7. EJEMPLO DE MINIMAL NO ESTABLE LIAPUNOV

Sea el toro $T^2 = R^2 / Z^2$ $\quad \pi: R^2 \to T^2$ la proyección

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ un vector de R.

Consideremos la transformación $a: R^2 \to R^2$ dada por

$$a(x,y) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (x+2y+b_1\,,\ y+b_2).$$

Sea $p\in T^2$ Definamos $f: T^2 \to T^2$ de la siguiente manera:

$$f(p) = f(\pi(x,y)) = \pi(a(x,y))$$

1º) $f: T^2 \to T^2$ está bien definido, porque no depende del punto (x,y) elegido en la preimagen $\pi^{-1}(p)$, pues:

$$\text{si } \left.\begin{matrix} x - x' = \text{entero} \\ y - y' = \text{entero} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a(x,y) - a(x',y') = A\begin{bmatrix} x-x' \\ y-y' \end{bmatrix} = \text{enteros}.$$

$$\Rightarrow \pi(a(x,y)) = \pi(a(x',y'))$$

2) $f: T^2 \to T^2$ es invertible, pues:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad a^{-1}: R^2 \to R^2$ definida por

$$a^{-1}(u,v) = A^{-1}\begin{bmatrix} u-b_1 \\ v-b_2 \end{bmatrix}$$

Es fácil verificar que a^{-1} induce una función $f^{-1}: T^2 \to T^2$, mediante la definición

$$f^{-1}(p) = f^{-1}(\pi(x,y)) \overset{def}{=} \pi(a^{-1}(x,y)).$$

También es fácil verificar que f^{-1} es la inversa de f.

3) $f: T^2 \to T^2$ es contínua, y su inversa f^{-1} tambi'n es continua. Entonces f es un homeomorfismo en el toro T^2.

Consideremos el sistema dinámico por iterados de f.

$$f^n(\pi(x,y)) = \pi(a^n(x,y))$$

$a(x,y) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ $\quad a^2(x,y) = A^2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$a^n(x,y) = A^n\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A^{n-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \dots A\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = A^n\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{n-1} A^j \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

donde
$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

I) VEAMOS QUE T^2 NO ES ESTABLE LIAPUNOV

Sean p y $p' \in T^2$. $p = \pi(x,y)$ $\quad p' = \pi(x',y')$

$\mathrm{dist}(f^n(p), f^n(p')) = \min_{k,h \text{ enteros}} \| a^n(x,y) - a^n(x',y') + (k,h) \| =$

$\| (x - x' + 2n(y-y'), y - y') + (k,h) \|$

Si T fuera estable Liapunov, existiría $\delta < 1/2$ tal que para todos p y p' en T^2, con $\mathrm{dist}(p,p') < \delta$, se cumple:

$\mathrm{dist}(f^n(p), f^n(p')) < \frac{1}{10}$ para todo n entero.

En particular eligiendo $x=x'$ e $y-y'$ irracional con $0<y-y' < \delta < 1/2$ existen enteros m y h tal̀s que $1/2 \geq 2n(y-y') + m > 1/4$
(porque $an+m$ es denso en R cuando a es irracional)

Entonces se tiene: $\mathrm{dist}(f^n(p), f^n(p')) =$
$= \| (x-x'+2n(y-y') + m, y-y') + (k,h) \|$.

$\mathrm{dist}(f^n(p), f^n(p')) = \| (x-x'+2n(y-y') + m + k, y-y' + h) \|$
con k y h enteros:

$\geq |2n(y-y') + m + k|$ con $1/4 < 2n(y-y') + m < 1/2$
k entero

Si k es entero $k \geq 0$, resulta $d(f^n(p), f^n(p')) > 1/4$
Si k es ≤ -1, resulta $d(f^n(p), f^n(p')) > 1/2$

Entonces, p y p' son puntos de T^2 que distan menos que δ, y tales que para algún n entero

$$d(f^n(p), f^n(p')) > 1/4 > \varepsilon$$

Luego, T^2 no es estable Llapunov.

II) Veamos ahora que
TODAS LAS ORBITAS SON DENSAS en T^2.

(Entonces T^2 es minimal compacto, y por (I), sus órbitas no pueden ser casi-periódicas).

Para que las órbitas sean densas en T^2, habrá que elegir un vector (b_1, b_2) adecuado.

Primero buscaremos un vector (b_1, b_2) tal que con él, la órbita por $(0,0)$ sea densa en T. Luego demostraremos que, con ese vector elegido, todas las otras órbitas también son densas en T.

i) La órbita por el origen es

$$f^n(0,0) = \pi\left(A^n\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{n-1} A^j\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)$$

donde $A^n = \begin{pmatrix}1 & 2n\\0 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad \sum_{j=0}^{n-1} A^j = \sum_{j=0}^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 2j\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n & n(n-1)\\0 & n\end{pmatrix}$

$f^n(0,0) = \pi\left(n b_1 + n(n-1) b_2 \;,\; n b_2\right)$

Buscaremos $b_1 = b_2 = b$ de modo que $\{f^n(0,0)\}$ sea denso en T^2

$f^n(0,0) = \pi(n^2 b, nb)$. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Dado $\delta > 0$, debe existir n entero tal que

$$\text{dist}\left(\pi(n^2 b, nb), \pi(x,y)\right) := \min_{h,k \text{ enteros}} \|(n^2 b - x + h, nb - y + k)\| < \delta$$

resulta:

$$\text{dist}(f^n(0,0), \pi(x,y)) \leq \min_{h,k}\left(|n^2 b - x + h|^2 + |nb - y + k|^2\right)^{1/2}$$

EN RESUMEN: Hay que elegir un número real b fijo para que:

Dados (x,y) y $\delta > 0$ cualquiera, deben existir h, k y n enteros tales que

$$|n^2 b - x + h| < \delta/2 \quad \text{y} \quad |nb - y + k| < \delta/2 .$$

Ordenemos todas las parejas de racionales entre 0 y 1:

$(x_1, y_1)\ (x_2, y_2)\ (x_3, y_3) \ldots\ldots (x_i, y_i) \ldots$ con $x_i, y_i \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$

(se pueden ordenar porque es un conjunto numerable).

Elijamos el siguiente número b; dando las cifras de su desarrollo decimal:

$b = 0,000\ldots$ donde en el lugar 1 al 10 después de la coma hay un cero, en el lugar 11 está la primera cifra decimal de $y_1 + 1$. En los lugares 12 al 100 después de la coma hay ceros. En el lugar 101 está la primera cifra decimal de $x_1 + 1$. En los lugares 102 hasta 1000 hay ceros. En los lugares 1001 y 1002 están las dos primeras cifras de $y_2 + 1$, en los lugares 1003 hasta el 10^6 incluidos hay ceros. En los lugares $10^6 + 1$ y $10^6 + 2$ están las dos primeras cifras de $x_2 + 1$, etc. Veamos cómo seguir: se toma la sucesión siguiente:

$$h_1 = 1, h_2 = 3, \ldots, h_{j+1} = 2h_j + 1, \ldots$$

Las cifras de b después de la coma de las que no se diga nada son ceros.

La cifra en el lugar $10^{h_1} + 1$ es la primera cifra decimal de $y_1 + 1$. La cifra en el lugar $10^{2h_1} + 1$ es la primera cifra decimal de $x_1 + 1$.

Las dos cifras en los lugares $10^{h_2} + 1$ y el siguiente son las dos primeras cifras decimales de $y_2 + 1$. Las dos cifras en los lugares $10^{2h_2} + 1$ y el siguiente son las dos primeras cifras decimales de $x_2 + 1$.

Las tres cifras en los lugares del $10^{h_3} + 1$ al $10^{h_3} + 3$ son las tres primeras cifras decimales de $y_3 + 1$. Las tres cifras en los lugares del $10^{2h_3} + 1$ al $10^{2h_3} + 3$ son las tres primeras cifras decimales de $x_3 + 1$.

En general: Las j cifras en los lugares del $10^{h_j} + 1$ al $10^{h_j} + j$ son las j primeras cifras decimales de $y_j + 1$. Las j cifras en los lugares del $10^{2h_j} + 1$ al $10^{2h_j} + j$ son las j primeras cifras decimales de $x_j + 1$.

Dado $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ y dado $\delta > 0$, elijamos $N > 1$ tal que $1/10^N < \delta/8$, y luego elijamos (x_j, y_j) con $j > N$ tal que $|x - x_j| < \delta/4$ y también $|y - y_j| < \delta/4$.

Basta probar que existen n, h, k enteros tales que $|n^2 b - x_j + h| < \delta/4$ y $nb - y_j + k| < \delta/4$.

Sea $n = 10^{h_j}$. Se cumple $nb - y_j = b10^{h_j} - y_j$ tiene parte decimal con todos ceros en las primeras $j - 1$ cifras. A continuación hay o bien un cero, o bien un uno:

$$\operatorname{dec}\,(nb - y_j) < \frac{2}{10^j} < \frac{2}{10^N} < \frac{\delta}{4}$$

Además $n^2 b - x_j = 10^{2h_j} b - x_j$ tiene ceros en las primeras $j - 1$ cifras, y a continuación tiene un cero o un uno:

$$\operatorname{dec}\,(n^2 b - x_j) < \frac{2}{10^j} < \frac{2}{10^N} < \frac{\delta}{4}$$

como se quería.

Elijamos (b, b) tal que $\{f^n(0,0)\}_{n \in Z}$ sea densa en T^2.

ii) Probemos que $o(\phi(a, 0))$ es densa en T^2. El número a es real cualquiera.

$$f^n(\pi(a,0)) = \pi(A^n(a,0) + \sum_{i=0}^{n-1} A^i(b,b)) = \pi \begin{bmatrix} a + n^2 b \\ nb \end{bmatrix}$$

Dado $\pi(x,y)$ cualquiera en el toro T^2, y dado $\delta > 0$, sabemos, por la parte i) que existe n tal que:

$$\text{dist}(\pi(n^2b, nb), \pi(x-a, y)) < \delta \quad .$$

Pero esa distancia es $\min \{ \|(nb+a-x+h, nb-y+k)\| \text{ con } k,h \text{ enteros} \}$

$$= \text{dist} (\pi(n^2b + a , nb), \pi(x,y)) = \text{dist} (f^n(\pi(a,0)), \pi(x,y)).$$

Entonces, la órbita por cualquier punto de la forma $\pi(a,0)$ es también densa en el toro.

iii) Finalmente, probemos que la órbita por cualquier punto $\pi(x_0,y_0) = p_0$ es también densa en el toro.

$$f^n(\pi(x_0,y_0)) = \pi(A^n(x_0,y_0) + \sum_{i=0}^{n-1} A^i(b,b)) =$$

$$= \pi(x_0 + n^2b + 2ny_0, y_0 + nb)$$

En la parte i) se probó que dec(nb) se puede hacer tan cercana como se desee a cualquier número $y \in [0,1)$

Entonces puede elegirse una sucesión n_j tal que

$$\text{dec}(n_j b) \rightarrow 0$$

Los números $\text{dec}(n_j^2 b + 2n_j y_0) \in [0,1)$. Existe una subsucesión de $\{n_j\}^j$, tal que

$$\text{dec}(n_{j_k}^2 b + 2n_{j_k} y) \longrightarrow a \in [0,1]$$

Entonces:

$$f^{n_{j_k}}(\pi(x_0,y_0)) \longrightarrow \pi(a,0) \quad \Rightarrow \pi(a,0) \in \overline{o(p_0)}$$

Luego: $\quad o(\pi(a,0)) \subset \overline{o(p_0)}$

$$\overline{o(\pi(a,0))} \subset \overline{o(p_0)} \subset T^2$$

En ii) se probó que la órbita por $\pi(a,0)$ es densa en T^2, entonces

$$\overline{o(\pi(a,0))} = T^2$$

Luego: $\overline{o(p_0)} = T^2$. La órbita por cualquier punto $p_0 \in T^2$ es densa en el toro, como se quería probar.

De allí que T^2 es minimal y compacto. Como no es estable Liapunov, entonces las órbitas no son casi periódicas.

NOTA

En el próximo capítulo se darán ejemplos de sistemas dinámicos con minimales no triviales.

BIBLIOGRAFIA

Nemitskii- Stepanov: Qualitative Theory of Diff. Equations.
Gottchalk- Hedlung: Topolog ical Dynamics.
S. Newhouse: Lectures on Dyn. Systems.

$b = 0,000\ldots$ donde en el lugar 1 al 10 después de la coma hay un cero, en el lugar 11 está la primera cifra decimal de $y_1 + 1$. En los lugares 12 al 100 después de la coma hay ceros. En el lugar 101 está la primera cifra decimal de $x_1 + 1$. En los lugares 102 hasta 1000 hay ceros. En los lugares 1001 y 1002 están las dos primeras cifras de $y_2 + 1$, en los lugares 1003 hasta el 10^6 incluidos hay ceros. En los lugares $10^6 + 1$ y $10^6 + 2$ están las dos primeras cifras de $x_2 + 1$, etc. Veamos cómo seguir: se toma la sucesión siguiente:

$$h_1 = 1, h_2 = 3, \ldots, h_{j+1} = 2h_j + 1, \ldots$$

Las cifras de b después de la coma de las que no se diga nada son ceros.

La cifra en el lugar $10^{h_1} + 1$ es la primera cifra decimal de $y_1 + 1$. La cifra en el lugar $10^{2h_1} + 1$ es la primera cifra decimal de $x_1 + 1$.

Las dos cifras en los lugares $10^{h_2} + 1$ y el siguiente son las dos primeras cifras decimales de $y_2 + 1$. Las dos cifras en los lugares $10^{2h_2} + 1$ y el siguiente son las dos primeras cifras decimales de $x_2 + 1$.

Las tres cifras en los lugares del $10^{h_3} + 1$ al $10^{h_3} + 3$ son las tres primeras cifras decimales de $y_3 + 1$. Las tres cifras en los lugares del $10^{2h_3} + 1$ al $10^{2h_3} + 3$ son las tres primeras cifras decimales de $x_3 + 1$.

En general: Las j cifras en los lugares del $10^{h_j} + 1$ al $10^{h_j} + j$ son las j primeras cifras decimales de $y_j + 1$. Las j cifras en los lugares del $10^{2h_j} + 1$ al $10^{2h_j} + j$ son las j primeras cifras decimales de $x_j + 1$.

Dado $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ y dado $\delta > 0$, elijamos $N > 1$ tal que $1/10^N < \delta/8$, y luego elijamos (x_j, y_j) con $j > N$ tal que $|x - x_j| < \delta/4$ y también $|y - y_j| < \delta/4$.

Basta probar que existen n, h, k enteros tales que $|n^2 b - x_j + h| < \delta/4$ y $nb - y_j + k| < \delta/4$.

Sea $n = 10^{h_j}$. Se cumple $nb - y_j = b10^{h_j} - y_j$ tiene parte decimal con todos ceros en las primeras $j - 1$ cifras. A continuación hay o bien un cero, o bien un uno:

$$\text{dec } (nb - y_j) < \frac{2}{10^j} < \frac{2}{10^N} < \frac{\delta}{4}$$

Además $n^2 b - x_j = 10^{2h_j} b - x_j$ tiene ceros en las primeras $j - 1$ cifras, y a continuación tiene un cero o un uno:

$$\text{dec } (n^2 b - x_j) < \frac{2}{10^j} < \frac{2}{10^N} < \frac{\delta}{4}$$

como se quería.

Elijamos (b, b) tal que $\{f^n(0, 0)\}_{n \in Z}$ sea densa en T^2.

ii) Probemos que $o(\phi(a, 0))$ es densa en T^2. El número a es real cualquiera.

$$f^n(\pi(a, 0)) = \pi(A^n(a, 0) + \sum_{i=0}^{n-1} A^i(b, b)) = \pi \left[\begin{array}{c} a + n^2 b \\ nb \end{array} \right]$$

TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras.

Octubre de 1998.

CAPITULO IV
DINAMICA TOPOLOGICA

EJERCICIOS

1. Probar que p es recurrente positivamente si y solo si para todo enotrno U de p, existe $t > 1$ tal que $\phi(p,t) \in U$ (sugerencia: considerar entorno de p que no corte al arco $\{\phi(p,t) : 1 \leq t \leq T\}$).

   Demostrar que el conjunto de los puntos recurrentes es invariante.

2. (a) Demostrar que si a es irracional el grupo

   $$G = \{an + m \in I\!R : n, m \text{ enteros } \}$$

   es denso en $I\!R$ y que el conjunto

   $$H = \{an + m \in I\!R : n, m \text{ enteros con } n \geq N\}$$

   es denso en $I\!R$ con N entero fijo.

   (b) Probar que el flujo irracional en el toro T^2 tiene todas las semiórbitas positivas y negativas densas.

   (c) Probar que en el flujo irracional del toro todos los puntos son recurrentes.

3. Demostrar que los puntos recurrentes negativamente o positivamente son no errantes.

   Sea en $I\!R^2$ el sistema dinámico ψ del ejercicio 10 del capítulo intermedio entre el II y III, parte b). Ver que tiene puntos no errantes que no son recurrentes.

4. Probar que el conjunto no errante es invariante.

   Probar que los alfa y omega-límites de todos los puntos están contenidos en el no errante.

   Buscar un ejemplo en que haya puntos no errantes que no estén en el alfa límite ni en el omega límite de ningún punto.

5. Sea $\dot{u} = F(u,v), \quad \dot{v} = F(u,v)a \quad (u,v) \in I\!R^2$, con a irracional constante y $F(u,v) = \sin^2 2\pi u + \sin^2 2\pi v$.

   Esa ecuación diferencial induce un sistema dinámico en el toro T^2 a través de la proyección $\pi : I\!R^2 \mapsto T^2$ como se cio en la sección 1 de este capítulo.

   Sea $P^+ = \{p_0 \in T^2 : p_0 \text{ es recurrente positivamente } \}$

   y sea $P^- = \{p_0 \in T^2 : p_0 \text{ es recurrente negativamente } \}$

   Verificar que hay puntos en P^+ que no están en P^- y viceversa.

   Probar que $P^+ \cap P^-$ es denso en el toro.

   Probar que el conjunto no errante es todo el toro.

6. Sea K un compacto no vacío. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   i) K es minimal

   ii) $\omega(p) = K, \ \ \forall p \in K$

   iii) $\alpha(p) = K, \ \ \forall p \in K$

   Probar que si K es minimal compacto, entonces todo punto de K es recurrente.

   Encontrar un ejemplo en que haya un punto recurrente que no esté contenido en ningún minimal.

7. Dar ejemplos de:

   a) punto no errante que no esté en ningún alfa ni omega límite.

   b) punto que esté en un omega-límite pero que no sea recurrente ni positivamente ni negativamente.

   c) Punto que sea recurrente positivamente pero no negativamente.

   d) Punto recurrente que no esté contenido en ningún minimal (ver ejercicio anterior).

8. Sea M un espacio topológico con base numerable $\{V_i\}$ de abiertos (esto significa que todo abierto del espacio se puede escribir como unión de algunos de los V_i, y que la familia de los V_i es numerable).

   Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo.

   Para cada V_i se define $V_i^* = V_i - \cup_{n\geq 0} f^{-n}(V_i)$.

   Demostrar que $\cup_i V_i^*$ es el conjunto de los puntos que no son recurrentes positivamente.

9. Sea M un espacio topológico y ϕ un flujo en él. Se dice que un conjunto A es recurrente positivamente si dado T existe $t > T$ tal que $A \cap \phi(A, t) \neq \emptyset$. En forma similar se define conjunto recurrente negativamente.

   (a) Probar que A es recurrente positivamente si y solo si lo es negativamente.

   (b) Esta parte del ejercicio requiere conocer de teoría de la medida:
   En M se define una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ y una medida μ. La medida es invariante si para todo $A \in \mathcal{A}$ y para todo $t \in I\!R$, se cumple $\phi(A, t) \in \mathcal{A}$ y $\mu(\phi(A, t)) = \mu(A)$.
   Probar que si μ es una medida finita, entonces todo medible con medida positiva es recurrente (Teorema de recurrencia de Poincaré). si la medida es de Borel, ¿cómo es el conjunto no errante?

10. Demostrar que el conjunto de los puntos fuertemente recurrentes y el conjunto de los puntos uniformemente fuertemente recurrentes son invariantes.

11. demostrar que si $\overline{o(p)}$ es compacto, entonces p es fuertemente recurrente si y solo si p es uniformemente fuertemente recurrente. (Ver sugerencia en la sección 5 de este capítulo).

12. (a) Probar que si p es uniformemente fuertemente recurrente entonces $o(p)$ es totalmente acotado (Esto es: Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe una cantidad N finita de puntos $q_i \in o(p)$ tal que $o(p) \subset cup_{i=1}^{N} B_\epsilon(q_i)$). Sugerencia: Si $q \in o(p)$ entonces la distancia de q a un cierto arco compacto es menor que ϵ.

    (b) Deducir que en un espacio métrico completo, si p es uniformemente fuertemente recurrente entonces la adherencia de la órbita por p es compacta. (Sugerencia: recoradar que en espacios métricos, K es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado).

    (c) Demostrar la siguiente versión del teorema de birkhoff en espacios métricos completos: $\overline{o(p)}$ es minimal compacto si y solo si p es uniformemente fuertemente recurrente.

13. Demostrar que en un espacio métrico completo, si p es casi-periódico entonces $\overline{o(p)}$ es minimal compacto. (Sugerencia: usar el ejercicio anterior).

14. En el flujo irracional del toro (con pendiente a irracional) se probó que para todo $\epsilon > 0$ existen M y N enteros tales que $0 < aM + N < \epsilon$. Demostrar que para todo p_0 del toro el conjunto
$$\{\tau \in I\!R : \text{ dist } (\phi(p_0, t+\tau), \phi(p_0, t) < \epsilon\}$$
es N-denso. Deducir que todas las órbitas son casi periódicas.

15. En un espacio métrico M, sea $f : M \mapsto M$ homeomorfismo.
    (a) Definir recurrencia, recurrencia fuerte, minimal, y casi periodicidad, para el sistema dinámico por iterados de f.
    (b) demostrar que si $\overline{o(p)}$ es compacta entonces es minimal si y solo si p es fuertemente recurrente.
    (c) Demostrar que un minimal compacto tiene todas sus órbitas casi periódicas si y solo si es estable Liapunov.

16. En $\Omega = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ sea
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tfrac{1}{2}\left(-2by - axzr^{-1} - xr^{-1}(r-1)(w - \tfrac{1}{4})\right)\\ \dot{y} &= \tfrac{1}{2}\left(2bx - ayzr^{-1} - yr^{-1}(r-1)(w - \tfrac{1}{4})\right)\\ \dot{z} &= a(r-1) - z(w - \tfrac{1}{4})\end{aligned}$$
donde $r = x^2+y^2$ y $w = (r-1)^2+z^2$, y a y b son constantes reales tales que b/a es irracional.
Demostrar que la superficie $w = 1/4$ (que es homeomorfa a un toro T^2) es un invariante minimal, con flujo casi periódico. (Sugerencia: con el cambio $x = \sqrt{r}\cos\varphi, \quad y = \sqrt{r}\sin\varphi$ queda $\dot{\varphi} = b$ y luego con el cambio $r - 1 = \sqrt{w}\cos\theta, \quad z = \sqrt{w}\sin\theta$ queda $\dot{\theta} = a, \quad \dot{\varphi} = b, \quad \dot{w} = (-1/2)(w - 1/4)w)$.

17. Demostrar que en un espacio métrico los puntos estables Liapunov en el futuro y recurrentes fuertemente son casi periódicos.
Sugerencia: Dado $\epsilon > 0$ sea δ de la definición de estabilidad. Si $\phi(p, \tau) \in B_{\delta/2}(p)$ elíjase $t_n \to -\infty$ tal que $\phi(p, t_n) \in \phi_{-\tau}(B_{\delta/2}(\phi_\tau(p)))$ y pruébese que para todo $t > t_n$ la distancia entre $\phi(p, t+\tau)$ y $\phi(p, t)$ es menor que ϵ.

18. Sea M un minimal compacto.
¿Puede ser M estable Liapunov en el futuro y no serlo en el pasado?

19. Se considera en C^2 el conjunto
$$Q = \{(z, w) \in C^2 : |z| = 1, \ \ |w| < 1\}$$
llamado toro sólido. Es el producto cartesiano de la circunferencia $S^1 = \{|z| = 1\}$ por el disco $D^2 = \{|w| < 1\}$ y es homeomorfo a la componente conexa acotada de R^3 que queda en el interior de la superficie de un toro.
Sea $f : C^2 \mapsto C^2$ un homeomorfismo tal que $f|_Q(z, w) = (z^2, (1/2)z + (1/4)w)$
    (a) Verificar que $f(Q) \subset Q$
    (b) Dibujar la sección plana $\{z = z_0\} \cap f(Q)$ y $\{z = z_0\} \cap f^2(Q)$.
    (c) Probar que $\Lambda = \cap_{n=0}^{\infty} f^n(Q)$ es compacto, invariante y no vacío. Demostrar que para todo $p \in Q$ el conjunto omega-límite de p es no vacío y está contenido en Λ.

Capítulo 5 EJEMPLOS NOTABLES Y FENOMENOS CAOTICOS

Comenzaremos describiendo un ejemplo debido a S.Smale: un homeomorfismo en R^2 que define un sistema dinámico por iterados, con una cantidad infinita de puntos periódicos, con un conjunto no errante que es un conjunto de Cantor en R^2 , y que tiene minimales no triviales.

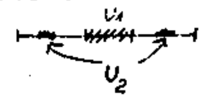
Nota: Un conjunto de Cantor en un espacio topológico, es un conjunto compacto, totalmente desconexo, y perfecto (por definición).

Totalemte desconexo: los únicos subconjuntos conexos son los puntos.

Perfecto: todos los puntos del conjunto son de acumulación (es decir, el conjunto no tiene puntos aislados).

Ejemplo de conjunto de Cantor en R: Considerar los abiertos:

$U_1 = (1/3, 2/3)$ $U_2 = \left(1/3\ U_1\right) \cup \left(2/3 + 1/3\ U_1\right)$



$U_{n+1} = \left(1/3\ U_n\right) \cup \left(2/3 + 1/3\ U_n\right)$

Sea $K = \left\{ x \in [0,1] ;\ x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \right\}$. Se puede probar que K es un conjunto de Cantor.

Ejemplo de conjunto de Cantor en R^n : Considerar K_i Conjunto de de Cantor en R (para i=1;2;...;n)

Sea $K = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n ;\ \text{tal que } x_i \in K_i \ \forall i = 1;2..n \right\}$

Es un conjunto de Cantor en R .

1. HERRADURA DE SMALE

1.1 DEFINICION DEL HOMEOMORFISMO

Primero enunciaremos un teorema de "pegado " de funciones continuas:

Teorema

Sean M y N espacios topológicos . Se tiene en M dos cerrados M_1 y M_2 cualesquiera, y dos funciones

$$f_1 : M_1 \to N \qquad f_2 : M_2 \to N$$

continuas y tales que coinciden en $M_1 \cap M_2$. Entonces: existe una única función continua $f: M_1 \cup M_2 \longrightarrow N$ que coincide con f_1 en M_1 y con f_2 en M_2 .

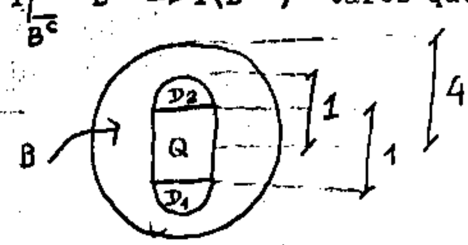
Además, si f_1 y f_2 son homeomorfismos sobre sus imágenes, y si $f_1(M_1) \cap f_2(M_2) = f_1(M_1 \cap M_2)$; entonces f es un homeomorfismo sobre su imagen.

Sea en R^2 la bola cerrada B de centro O y radio 4, y en ella la "cápsula" C, cerrada, formada por el cuadrado Q de centro O y lado 1, y dos semicírculos D_1 y D_2 de diámetro 1 , como en la figura.

Definiremos $f : R^2 \to R^2$ construyendo los homeomorfismos

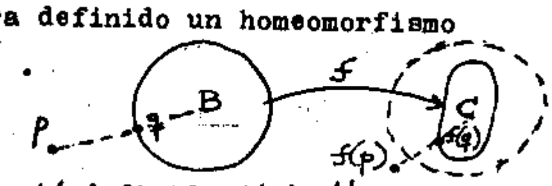
$f|_B : B \longrightarrow f(B)$ $\qquad f|_{\overline{B^c}} : \overline{B^c} \to f(\overline{B^c})$ tales que:

1) coincidan en ∂B
2) $f(B) \cap f(\overline{B^c}) = f(\partial B)$
3) $f(B) \cup f(\overline{B^c}) = R^2$



Supongamos que se tuviera definido un homeomorfismo

$f\big|_B : B \to f(B) = C$.



Entonces, en particular está definido $f(q)$ $\forall\, q \in \partial B$ y $f(q) \in \partial C$

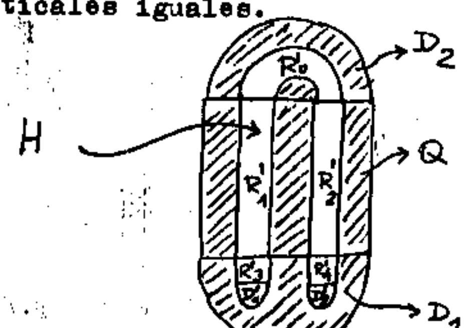
Definamos $f\big|_{\overline{B^c}} : \overline{B^c} \to \overline{C^c}$, tomando para todo $p \in \overline{B^c}$

$f(p) \overset{def}{=} \frac{\|p\|}{4} . f(q)$, donde $q = 4 \frac{p}{\|p\|} \in \partial B$

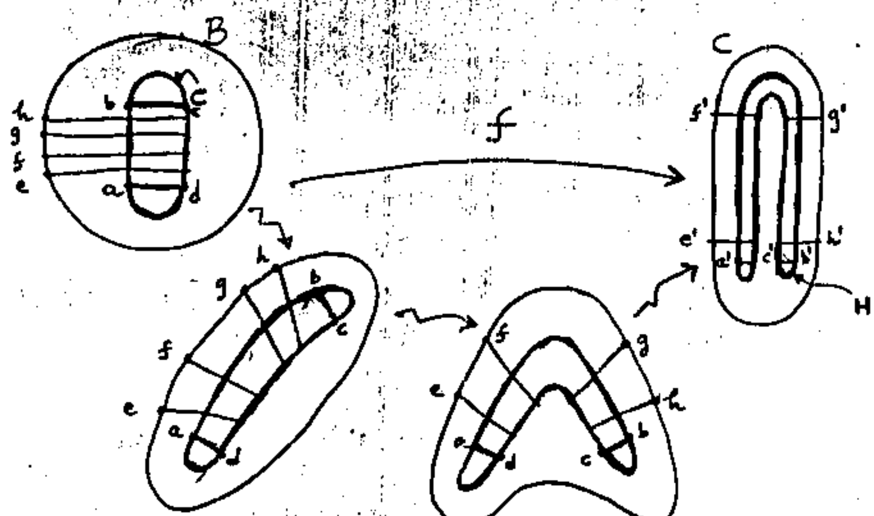
Falta sólo definir ahora $f : B \to C$ que sea un homeomorfismo.

Sea H 1 la "herradura" formada como en la figura, por una semicorona R_0' , dos rectángulos R_1' R_2' y los cuadrados R_3' R_4' y los semicírculos D_1' D_2' .

La herradura cerrada H, está contenida en el interior de la cápsula C de modo que los rectángulos R_1' R_2' están en Q, y dividen a éste en cinco franjas verticales iguales.



Se define $f : B \to C$ por medio de una deformación continua, invertible que lleve $B \to C$ y que lleve $C \to H$, como en la figura

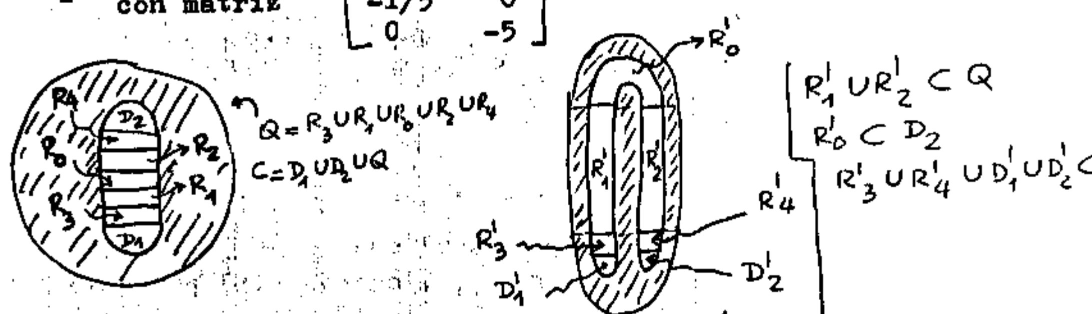


Más precisamente : f es un homeomorfismo tal que

$f(D_1) = D_1' \subset D_1$ $f|_{D_1}$ es una traslación seguida de una homotecia de razón 1/5

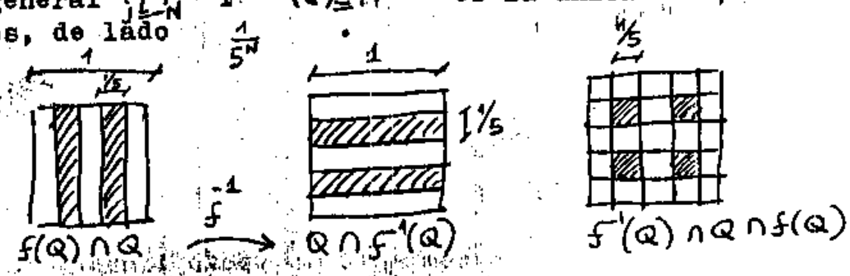
$f(R_1) = R_1'$ es una traslación seguida de una transformación lineal con matriz: $\begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$f(R_2) = R_2'$ es una traslación seguida de una transformación lineal con matriz $\begin{bmatrix} -1/5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$



Obsérvese que $f(Q) \cap Q$; $f^{-1}(Q) \cap Q$; $f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q)$ son los conjuntos señalados en la figura de abajo

En general $\bigcap_{j=-N}^{N} f^{j}(Q)$ es la unión de 4^N cuadraditos disjuntos, de lado $\frac{1}{5^N}$



1.2 CONJUNTO NO ERRANTE

PROPOSICION

En $R^2 - Q$ (los puntos de R^2 que no están en Q) , existe un único punto fijo q_0 . Todo punto p de $D_1 \cup D_2$ tiene $\omega(p) = \{q_0\}$

Consecuencias:

1) q_0 es un pozo que atrae a todas las órbitas que pasan por $D_1 \cup D_2$

2) Si una órbita no es atraida por q_0, entonces llega a Q y nunca sale de Q (en el futuro).

Prueba

Sea D_1 . Por construcción $f|_{D_1} : D_1 \to D_1$ es una semejanza de razón 1/5 (luego, es una contracción de D_1 en D_1)

Sea $K = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^n(D_1)$. Es compacto, invariante . Es no vacío por la propiedad de intersecciones finitas de los compactos.

diam K $\leq$ diam $f^n(D_1)$ $\forall n \geq 0$; diam $f^n(D_1) =$ diam$(D_1) \cdot 1/5^n \longrightarrow 0$ con $n \to$

$\Rightarrow$ diam K = 0 $\Rightarrow$ K está formado por un único punto q_0

Como $K \subset D_1$ y es invariante $\Rightarrow$ $q_0 \in D_1$ es un punto fijo.

Por construcción: si $p \in R^2 - Q$, existe n tal que $f^n(p) \in C$
$C = D_1 \cup D_2 \cup Q$.
Si p fuera un punto fijo de $R^2 - Q$, entonces $p \in D_1 \cup D_2$. Pero
$f(D_2) \subset D_1$.

Así: todo punto fijo de $R^2 - Q$ debe estar en D_1, luego debe estar en $f^n(D_1)$ $\forall n$, o sea en

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(D_1) = \{q_0\}$$

$\Rightarrow p = q_0 \Rightarrow q_0$ es el único punto fijo de $R^2 - Q$

Sea ahora $p \in D_1 \cup D_2$, como $o^+(p) \subset D_1 \cup D_2$ compacto, entonces $\omega(p)$ es compacto no vacío, contenido en $D_1 \cup D_2$, e invariante: $\omega(p) \subset f^n(D_1)$ $\forall n \Rightarrow \omega(p) \subset \bigcap_{n \geq 0} f^n(D_1) = \{q_0\}$

$\omega(p) = \{q_0\}$ QED

Nota

En Q existen otros puntos fijos, como veremos más adelante.

Observación En resumen se tiene que

$\omega(p)$ — o bien es el pozo q_0, cuando $o(p)$ pasa por $D_1 \cup D_2$
o bien es un conjunto invariante no vacío, que debe estar en el cuadrado Q (porque toda órbita llega a $C = Q \cup D_1 \cup D_2$, y no lo abandona, y suponemos que $o(p)$ no pasa por $D_1 \cup D_2$).
Si $\omega(p) \subset Q$, como $\omega(p)$ es invariante $\Rightarrow \omega(p) \subset f^n(Q)$ $\forall n$
$\omega(p) \subset \bigcap_{n \text{ entero}} f^n(Q) = \Lambda$

PROPOSICION

Sea $\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(Q)$.

El conjunto Λ es compacto, invariante y no vacío, y además el conjunto no errante $\Omega(f)$ está contenido en $\Lambda \cup \{q_0\}$.

(Nota: Más adelante se verá que $\Omega(f) = \Lambda \cup \{q_0\}$.

Prueba

Sea $\Lambda_N = \bigcap_{n=-N}^{+N} f^n(Q)$, es compacto no vacío (formado por 4^N cuadraditos de lado $1/5^N$).

$\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \dots \supset \Lambda_N \supset \Lambda_{N+1} \dots$ $\Lambda = \bigcap_{N=1}^{\infty} \Lambda_N$. Por la propiedad de intersecciones finitas de compactos: Λ es compacto no vacío.

$p \in \Lambda \Rightarrow f^n(p) \in Q$ $\forall n$ entero $\Rightarrow f^n(f^j(p)) \in Q$ $\forall n$ entero $\forall j$ entero
$\Rightarrow f^j(p) \in \Lambda \Rightarrow \Lambda$ es invariante.

Sea ahora p no errante (todo entorno U de p tiene algún iterado $f^n(U)$, con n arbitrariamente grande, tal que $U \cap f^n(U) \neq \emptyset$).
Por la construcción de f, todas las órbitas, desde algún n en adelante están en C. p no errante $\Rightarrow p \in C = D_1 \cup D_2 \cup Q$

Si $p \in D_2$, entonces $f^n(p) \in D_1$ $\forall n \geq 1$. Luego: p no errante $\Rightarrow$ $p \in D_1 \cup Q$.

Si $p \in D_1$, entonces $f^n(p) \to q_0$ con $n \to +\infty$. Luego p no errante $\Rightarrow$ $p \in \{q_0\} \cup Q$. $\Rightarrow \Omega(f) \subset \{q_0\} \cup Q \Rightarrow \Omega(f) - \{q_0\} \subset Q$.

El conjunto $\Omega(f) - q_0$ es invariante $\Rightarrow \Omega(f) - q_0 \subset f^n(Q)$ para todo n entero $\Rightarrow$ $\Omega(f) - q_0 \subset \Lambda \Rightarrow$

$\Omega(f) \subset \{q_0\} \cup \Lambda$ QED

PROPOSICION

Λ es un conjunto de Cantor en R^2 .

Prueba

Sea K el conjunto de Cantor en $[0,1]$ que se obtiene haciendo:

$K = [0,1] \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right)^{comp}$ U_i son los abiertos:

$U_1 = [0,1/5) \cup (2/5,3/5) \cup (4/5,1]$

$U_2 = \quad 1/5 + 1/5\, U_1) \cup (/5 + 1/5\, U_1)$

$U_{i+1} = \quad 1/5 + 1/5\, U_i) \cup (4/5 + 1/5\, U_i)$

Sea $K_N = (0,1) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{N} U_i\right)^{comp}$. Entonces $K = \bigcap_{N=1}^{\infty} K_N$.

Por construcción de la f de herradura:

$\bigcap_{i=-N}^{N} f^{i}(Q)$ es la unión de 4^N cuadraditos que se proyectan sobre los ejes en los compactos K_N .

Luego: $(x,y) \in \Lambda = \bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} f^{i}(Q) \Leftrightarrow (x,y) \in \bigcap_{i=-N}^{i=N} f^{i}(Q)\ \forall N \geq 1 \Longleftrightarrow$

$(x,y) \in k_N \times k_N\ \forall N \geq 1 \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{N=1}^{\infty} k_N \quad y \in \bigcap_{N=1}^{\infty} k_N$

De donde $\Lambda = K \times K$ QED

Comentario:

Probaremos que en Λ hay :

- puntos no recurrentes
- puntos recurrentes, pero que no están en minimales
- minimales no triviales
- órbitas periódicas de todos los períodos
- una cantidad densa de puntos periódicos

Para probar estos resultados, veremos que el homeomorfismo f restringido al conjunto Λ , es conjugado a un "SHIFT DE BERNOULLI" y que esa transformación "shift", tiene las propiedades enunciadas.

1.3 CONJUGACION CON UN SHIFT

$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{n}(Q)$

Sea $Q \cap f(Q) =$. Por construcción, está formado por dos franjas verticales, disjuntas, que llamamos S_0 y S_1 .

$p \in \Lambda \Leftrightarrow f^{n}(p) \in Q \quad \forall n$ entero.

Si $p \in \Lambda$, entonces $p \in Q \cap f(Q)$; $f^{n}(p) \in Q \cap f(Q)$ para todo n entero. Entonces $f^{n}(p)$ pertenece a uno de los dos rectángulos S_0 o S_1 .

Fijado un punto $p \in \Lambda$:

Sea i_n el número en $\{0,1\}$ definido por $f^{n}(p) \in S_{i_n}$

Queda determinada, para cada p , una sucesión $\{i_n\}$ de ceros y unos mediante $f^{n}(p) \in S_{i_n}$. (para todo n entero). (Es una sucesión bi-infinita, porque está definida i_n para todo n negativo y positivo).

Sea "$2^{\mathbb{Z}}$" el conjunto de todas las sucesiones bi-infinitas de ceros y unos .

Sea $\theta : \Lambda \to 2^{\mathbb{Z}}$ la función que a cada punto $p \in \Lambda$ hace corresponder la sucesión $\theta(p) = \{i_n\}$ con $f^{n}(p) \in S_{i_n}\ \forall n$

PROPOSICION

La función $\theta : \Lambda \to 2^{\mathbb{Z}}$ definida antes, es biyectiva (es decir, dada cualquier sucesión bi-infinita $\{i_n\}$ de ceros y unos, existe y es único un punto $p \in \Lambda$ tal que

$$f^n(p) \in S_{i_n} \quad \text{para todo n entero.})$$

Prueba:

Por construcción de la transformación f de herradura:

$Q \cap f(Q) = S_0 \cup S_1$ (dos franjas verticales disjuntas en Q)

$f^{-1}(Q) \cap Q = f^{-1}(S_0) \cup f^{-1}(S_1)$ (dos franjas horizontales disjuntas)

Dados i, j en $\{0,1\}$:

$f^{-1}(S_i) \cap S_j$ es uno de los cuatro cuadraditos de lado 1/5 que forma $f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q)$.

Análogamenge puede observarse que:

$\bigcap_{n=-N}^{N-1} f^n(S_{i_n})$ es uno de los 4^N cuadraditos de lado $1/5^N$ que forma $\bigcap_{n=-N}^{N} f^n(Q)$

Por la propiedad de intersecciones finitas:

$\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(S_{i_n}) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=-N}^{N-1} f^n(S_{i_n})$ es compacto no vacío y su diámetro es menor que diám. $\bigcap_{n=-N}^{N-1} f^n(S_{i_n}) = \sqrt{2}/5^N$ para todo N $\Rightarrow$ diam $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(S_{i_n}) = 0$

está formado por un único punto p (es un conjunto no vacío de diámetro 0). $p \in f^n(S_{i_n})\ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$f^{-n}(p) \in S_{i_{-n}}$ $\forall n$ entero

QED

- TOPOLOGIA EN EL ESPACIO DE LAS SUCESIONES BILATERALES :

Consideremos en el conjunto $2^{\mathbb{Z}}$ la siguienge topología:

$A \subset 2^{\mathbb{Z}}$ es abierto si y solo si $\theta^{-1}(A)$ es abierto en Λ

(o sea, $\theta^{-1}(A)$ es la intersección de un abierto de $\mathbb{R}^2$ con Λ).

Entonces θ es un homeomorfismo. Como Λ es compacto, y $2^{\mathbb{Z}} = \theta(\Lambda)$, entonces $2^{\mathbb{Z}}$ ES COMPACTO.

- SHIFT: Consideremos en $2^{\mathbb{Z}}$ la siguiente transformación: $\sigma : 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$

"shift" a la izquierda:

Dada la sucesión $\{a_n\}$, se define $\sigma(\{a_n\})$ como $\{b_n\}$ la sucesión tal que $b_n = a_{n+1}$. (en el lugar n, la nueva sucesión tiene el término que estaba en el lugar n+1 de la vieja sucesión).

PROPOSICION

Se cumple: $\sigma = \theta \circ f \circ \theta^{-1}$

o sea, el siguienge diagrama "conmuta":

$$\begin{tikzcd} 2^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\sigma"] & 2^{\mathbb{Z}} \\ \Lambda \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "f"] & \Lambda \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

Consecuencia: σ es un homeomorfismo.

Prueba:

Sea $\{i_n\}$ una sucesión en $2^{\mathbb{Z}}$, y sea p el punto de Λ obtenido como $p = \theta^{-1}(\{i_n\})$, o sea $\theta(p) = \{i_n\}$, o sea:

$$f^n(p) \in S_{i_n} \text{ para todo n entero.}$$

De allí: $f^n(f(p)) = f^{n+1}(p) \in S_{i_{n+1}} \quad \forall n$

Sea b_n la sucesión $\theta(f(p))$ Por definición

$$f^n(f(p)) \in S_{b_n} . \quad \forall n$$

Como los rectángulos S_0 y S_1 son disjuntos; y el mismo punto $f^n(f(p))$ pertenece a $S_{i_{n+1}}$ y S_{b_n} $\Rightarrow$

$i_{n+1} = b_n$, para todo n entero

Entonces la sucesión $\{b_n\}$ es $\sigma(\{i_n\})$

Por definición se obtuvo $\sigma(\{i_n\}) = \theta(f(p)) = \theta(f(\theta^{-1}\{i_n\}))$

Se obtuvo:

$$\theta(f(p)) = \sigma(\theta(p)) \text{ , o sea: } \theta \circ f = \sigma \circ \theta$$

QED.

DEFINICION

Si se tienen dos espacios topológicos M y N, y en ellos homeomorfismos $f: M \to M$ y $g: N \to N$ respectivamente,

se dice que son conjugados, si existe una función $\theta: M \to N$ (llamada conjugación), que sea un homeomorfismo, y tal que

$$\theta \circ f = g \circ \theta$$

PROPOSICION

Si dos homeomorfismos f y g son conjugados por una conjugación θ, entonces:

p es periódico según f si y solo si $\theta(p)$ lo es según g
- es fijo
- es recurrente
- es fuertemente recurrente
- está en un minimal
- es no errante

Prueba

Se deja como ejercicio.

En resumen

Hemos probado que la transformación f de herradura, restringida al compacto invariante Λ, es conjugada con el shift en el espacio de sucesiones bilaterales de ceros y unos (Shift de Bernoulli).

Veremos que esta transformación shift, tiene las propiedades anunciadas para f (existencia de minimales no triviales, infinidad de puntos periódicos, etc).

2 SHIFT DE BERNOULLI

Consideremos el espacio $2^{\mathbb{Z}} = \{$sucesiones bilaterales de ceros y unos$\}$, con la siguiente topología:

Definición

Dada la sucesión p, llamamos N-entorno de p (donde N es un natural), al conjunto de todas las sucesiones en $2^{\mathbb{Z}}$, tales que los términos entre el lugar $-N$ y N coinciden con los respectivos de p.

Consideraremos los abiertos en el espacio $2^{\mathbb{Z}}$, como las intersecciones finitas de los entornos recién definidos, y uniones cualesquiera de intersecciones finitas de ellos. (Esto define una topología que coincide con la definida en $2^{\mathbb{Z}}$ en el parágrafo anterior. En efecto, basta ver que

$$\left(\bigcap_{j=-N}^{N} f^{-j}(S_{i_j}) \right) = \text{N- entorno de } \{i_n\} \text{ en } 2^{\mathbb{Z}}).$$

(Luego, $2^{\mathbb{Z}}$ es COMPACTO, como ya se dijo en §1.3)

Sea en $2^{\mathbb{Z}}$ el shift a la izquierda: $\sigma: 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$

$$\sigma(\{a_n\}) = \{b_n\} \quad \text{con} \quad b_n = a_{n+1} .$$

(Es un homeomorfismo en $2^{\mathbb{Z}}$).

TEOREMA

En $2^{\mathbb{Z}}$, el sistema dinámico por iterados del shift, tiene las siguientes características:

1. Todo punto $p \in 2^{\mathbb{Z}}$, está en el ω- límite de algún punto q .
   1.1 Consecuencia: El conjunto no errante es todo el espacio.
2. Hay puntos no recurrentes.
3. Hay puntos recurrentes que no están en ningún minimal (no son fuertemente recurrentes).
4. Hay compactos minimales no triviales (que no son órbitas periódicas ni puntos fijos).
5. Hay puntos periódicos, con cualquier período natural dado.
6. Los puntos periódicos son un conjunto denso.
7. Hay solo dos puntos fijos.

COROLARIO

Sea el conjunto invariante compacto Λ definido en la transformación de herradura de Smale. Restringida a Λ esa transformación tiene las mismas propiedades enunciadas más arriba.

Prueba del teorema

1. Dada la sucesión $p = \{ \ldots a_{-n} \ldots a_{-1}, a_0, a_1, \ldots a_n \ldots \}$

Construyamos la sucesión q como sigue:

Entre el lugar	y el lugar	, q tiene los mismos términos que están entre el lugar	y	de p.
-10	10	-10	10	
100	3300	-100	100	
10^3	3×10^3	-10^3	10^3	
10^4	3×10^4	-10^4	10^4	
etc.				

Vamos a probar lo siguiente:

Dado un N- entorno cualquiera de p, existe un iterado de q , $\sigma^n(q)$ con

con $\sigma^n(q)$ perteneciente al N-entorno de p. (Eso es: los términos de q entre el lugar n-N y el lugar n+N , coinciden con los de p entre el lugar -N y +N). En efecto, dado N, basta elegir j natural tal que $10^j > N$, y tomar $n = 2\times 10^j$.

2\. Hay puntos no recurrentes. En efecto:

$$\text{Sea } p = \{\ldots 1,1,1,0,0,0,0,\ldots\} \qquad \omega(p) = \{\ldots 0,0,0,\ldots\}$$
$$\alpha(p) = \{\ldots 1,1,1,\ldots\} \Rightarrow p \notin \omega(p) \qquad p \notin \alpha(p) \Rightarrow p \text{ no es recurrente}$$

3\. 3. Hay puntos recurrentes que no están en ningún minimal (no son fuertemente recurrentes)

Por ejemplo, la siguiente sucesión verifica eso:

Construyamos la sucesión p como sigue:

Son "unos" los términos entre el lugar -10 y +10. , y
y también entre el lugar 10^n-10 y 10^n+10
y entre -10^n-10 y -10^n+10 $\forall n \geq 2$
Son "ceros" los demás términos entre el lugar -100 y +100.
Los términos de p (ya determinados) entre el lugar -100 y +100
son copiados entre el lugar 10^n-10^2 y 10^n+10^2
y entre -10^n-10^2 y -10^n+10^2 $\forall n \geq 3$
Son ceros los demás términos entre -10^3 y 10^3 .
etc.

Dado un natural j, sea el conjunto:

$$\{n: \sigma^n(p) \in (10^j\text{-entorno de } p)\} = \{10^{j+1}, 10^{j+2}, \ldots\} \cup \{-10^{j+1}, -10^{j+2}, \ldots\} \cup \{0\}$$

Este conjunto es no acotado inferiormente ni superiormente, entonces $p \in \alpha(p)$ $p \in \omega(p) \Rightarrow$ p es recurrente.
Pero el conjunto mencionado no es relativamente denso $\Rightarrow$ p no está en un minimal (no es fuertemente recurrente).

4\. <u>Hay conjuntos minimales no triviales</u>:

Tendremos que encontrar un punto fuertemente recurrente que no sea periódico ni fijo.

Sea p la sucesión construida como sigue:

Son "unos" los términos entre el lugar -10 y +10 ,
y también entre los lugares $n\,10^2-10$ y $n\,10^2+10$ $\forall n$
rellenar
~~Son ceros~~ los demás términos entre el lugar -100 y 100. de modo que no sea periódico de período 10 o menor

Los términos de p (ya determinados) entre el lugar -100 y 100
son copiados entre el lugar $n\,10^3-10^2$ y $n\,10^3+10^2$ $\forall n$.
~~Son ceros~~ los demás términos entre -10^3 y 10^3 de modo que no sea periódico de período 100 o menor
rellenar
etc
Dado un natural j, sea el conjunto:

$$\{n: \sigma^n(p) \in 10^j\text{-entorno de } p\} = \{[illegible]\,10^{j+1}[illegible]\ \text{entero}\}$$

es un conjunto . relativamente denso de naturales
$\Rightarrow$ p es fuertem. recurrente $\overline{o(p)}$ es minimal.

5. Dado N, sea una N-upla de N-1 "ceros" y un "uno": la sucesión que repite esta N-upla es periódica de período N por el shift.
6. Dada una sucesión q cualquiera, y un N- entorno de ella, sea p la sucesión periódica formada repitiendo los términos de q que están entre el lugar -N y N. Entonces p es periódica y está en el N- entorno dado. Los puntos periódicos en $2^{\mathbb{Z}}$ es un conjunto denso.
7. Los únicos puntos fijos son las sucesiones constantes (para que sean invariantes por el shift). Hay solo dos, una formada sólo por "unos" y otra sólo por "ceros".

QED

---

3 FENOMENOS CAOTICOS

Sea M un espacio métrico y $f^n(p)$ un sistema dinámico de parámetro entero, definido por iterados de un homeomorfismo $f: M \longrightarrow M$.

DEFINICION

Sea p un punto de M. Se llama "conjunto estable de p" a:

$$W^s(p) = \left\{ q: \operatorname{dist}(f^n(p), f^n(q)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \right\}$$

y se llama "conjunto inestable de p" a:

$$W^u(p) = \left\{ q: \operatorname{dist}(f^n(q), f^n(p)) \xrightarrow[n \to -\infty]{} 0 \right\}$$

Observaciones:

1. Si p es un punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro, entonces $W^s(p)$ contiene a un entorno de p, y $W^s(p)$ es la "cuenca de atracción" del pozo p.
2. Si p es periódico de período N, entonces $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son conjuntos invariantes por f^N.
3. Se cumplen las siguientes propiedades:

a) $p \in W^s(p)$
b) $q \in W^s(p) \iff p \in W^s(q)$
c) $\left.\begin{array}{l} p \in W^s(p') \\ p' \in W^s(p'') \end{array}\right\} \Rightarrow p \in W^s(p'')$

DEFINICION

Un homeomorfismo es topológicamente transitivo, si dados dos abiertos U y V cualquiera, existe algún $n > 0$ tal que $f^n(U)$ corta a V.

Nota :

Una definición equivalente es la siguiente: f es top. transitivo si dados dos abiertos U y V cualesquiera, existen iterados n tan grandes y tan pequeños como se quiera, tales que $f^n(U)$ corta a V.

DEFINICION

Un homeomorfismo f es TOPOLOGICAMENTE MIXING , si dados dos abiertos cualesquiera, existe algún N entero tal que $f^n(U)$ corta a V para todo $n \geqslant N$.

Comentario:

Es inmediato que la condición tóp. mixing $\Longrightarrow$ top. transitivo.

El siguiente teorema da una condición suficiente para que un homeomorfismo en un espacio métrico presente una dinámica "caótica".

TEOREMA

Sea $f: M \longrightarrow M$ homeomorfismo en un espacio métrico M conexo y con infinitos puntos.

Si f cumple:

1) Los puntos periódicos de f forman un conjunto denso en M.
2) Existe un cubrimiento de M por abiertos $\{U_\alpha\}$ tales que: si p y p' están en un mismo U_α , entonces $W^s(p) \cap W^u(p') \neq \phi$

Entonces:

1) El conjunto no errante es M
2) Para todo punto p que sea periódico $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son densos en M.
3) f es topológicamente mixing.
4) Dados $V_1, V_2, \ldots, V_n$ una cantidad finita de abiertos cualesquiera, existe una trayectoria periódica que pasa por todos ellos.
5) Hay puntos periódicos con período arbitrariamente grande.
6) Si M tiene base numerable, entonces hay un conjunto residual de puntos con trayectorias densas.
   (Conjunto residual: que contiene a una intersección numerable de abiertos densos).

Prueba

1) Sea Per(f) el conjunto de los puntos periódicos de f., y $\Omega(f)$ el conjunto no errante de f. Es claro que $Per(f) \subset \Omega(f)$. Como $\Omega(f)$ es cerrado, entonces $\overline{Per(f)} \subset \Omega(f) \subset M$
   Siendo por hipótesis: $\overline{Per(f)} = M$, se obtiene $\Omega(f) = M$.

2) Tomemos p periódico. Para ver que $\overline{W^s(p)} = M$, basta demostrar que $\overline{W^s(p)}$ es abierto en M .

Dado $q \in \overline{W^s(p)}$, sea $U_\alpha \ni q$, según la hipótesis. Demostremos que $U_\alpha \subset \overline{W^s(p)}$. (Con lo cual $\overline{W^s(p)}$ es abierto).

Sea $q' \in U_\alpha$. Alcanza probar que $\forall \varepsilon > 0$, existe un punto en $W^s(p) \cap B_\varepsilon(q')$. (Eso significa que $q' \in \overline{W^s(p)}$).

Tenemos dados $q \in \overline{W^s(p)}$ $q \in U_\alpha$; $q' \in U_\alpha$; $\varepsilon > 0$.
Tomemos $\delta > 0$ tal que $B_\delta(q') \subset U_\alpha \cap B_\varepsilon(q')$

Como $q \in \overline{W^s(p)}$, y U_α es un entorno de q, existe $p' \in W^s(p) \cap U_\alpha$
Como Per(f) es denso en M, existe q" periódico en $B_{\delta/2}(q')$.
Los puntos q" y p' están en U_α. Por hipótesis, existe

existe $p'' \in W^s(p') \cap W^u(q'')$.

Entonces: $p'' \in W^s(p')$ $\quad p' \in W^s(p)$, de donde $p'' \in W^s(p)$

Tomemos k un múltiplo común de los períodos de p y q":

$$p'' \in W^u(q'') \Rightarrow \operatorname{dist}(f^{nk}(p''), q'') \underset{n \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

Luego: Existe $-N < 0$ tal que $f^{-Nk}(p'') \in B_{\delta/2}(q'')$.

Como $q'' \in B_{\delta/2}(q') \Rightarrow f^{-Nk}(p'') \in B_{\delta}(q') \subset B_{\varepsilon}(q')$.

Por otra parte:

$p'' \in W^s(p)$, p periódico , k múltiplo del período de p $\Rightarrow$

$W^s(p)$ invariante por $f^k \Rightarrow f^{-Nk}(p'') \in W^s(p)$.

Hemos encontrado un punto $f^{-Nk}(p'')$ en $B_{\varepsilon}(q') \cap W^s(p)$ como queríamos.

Lo anterior muestra que $W^s(p)$ es densa en M. Análogamente se prueba para $W^u(p)$.

3) Dados U y V abiertos, existe p periódico en U (porque $\overline{Per(f)} = M$) y existe $q \in W^s(p) \cap V$ (porque $W^s(p)$ es denso en M).

Siendo k período de p: $\operatorname{dist}(f^{nk}(q), p) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Existe N tal que $\forall n \geq N$: $f^{nk}(q) \in U$. Luego : $U \cap f^{nk}(V) \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.

Sean ahora $V_1 = f(V)$; $V_2 = f^2(V)$; ... ; $V_{k-1} = f^{k-1}(V)$; $V_0 = V$

Por lo anterior, existen enteros $N_0, N_1, \ldots, N_{k-1}$ tales que para todo $n \geq N_i$

$$U \cap f^{nk}(V_i) \neq \emptyset \qquad i=0,1,\ldots,k-1.$$

Sea $N = \max N_i$. Para todo $n \geq N$: $U \cap f^{nk}(f^i(V)) \neq \emptyset$ para todo $i=0,1,\ldots,k-1$.

O sea , para todo $m \geq kN$: $U \cap f^m(V) \neq \emptyset$ QED.

4)

Dados $V_1; V_2; \ldots; V_n$:

existen números enteros n_i tales que:

$$f^{n_1}(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset , \quad f^{n_2}(f^{n_1}(V_1) \cap V_2) \cap V_3 \neq \emptyset$$

$$f^{n_i}(f^{r_1}(V_1) \cap f^{r_2}(V_2) \cap \ldots \cap V_i) \cap V_{i+1} \neq \emptyset$$

En definitiva, existen números enteros $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tales que

$f^{m_1}(V_1) \cap f^{m_2}(V_2) \cap \ldots \cap f^{m_i}(V_i) \ldots \cap V_{n-1} \neq \emptyset$ es un abierto no vacío.

Por la densidad de los puntos periódicos: existe p periódico en ese conjunto:

$p \in f^{m_i}(V_i) \Rightarrow f^{-m_i}(p) \in V_i \Rightarrow$ la trayectoria por p pasa por todos los V_i.

5. Basta elegir N abiertos disjuntos y aplicar 4.
6. Sea: $V_1 \quad V_2 \quad \ldots\ldots \quad V_i \ \ldots\ldots$

una base del espacio (que tiene base numerable).

Fijado el abierto V_i de la base, sea:

$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} f^n (V_i)$ es abierto (por ser unión de abiertos), y es denso (porque todo abierto de M tiene algún iterado $n > 0$ que corta al abierto V_i, entonces, ese abierto corta a $f^{-n}(V_i)$).

Sea $H = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n} (V_i)$

Entonces, H es la intersección de una cantidad numerable de abiertos densos. Por definición H, y cualquier conjunto que contenga a H, es residual.

Si $p \in H$, entonces $p \in \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n} (V_i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots$

O sea, para cada abierto V_i de la base, existe algún n entero tal que $p \in f^{-n}(V_i)$, o lo que es lo mismo

$f^n (p) \in V_i$

Luego, la trayectoria por p pasa por todos los abiertos de la base y por lo tanto, es densa.

$\Rightarrow$ Todos los puntos de H tienen trayectorias densas en M.
El conjunto de los puntos que tienen trayectorias densas, contiene a H, y entonces, es residual

QED

4 EJEMPLO DE FENOMENO CAOTICO EN EL TORO

Consideremos el toro T^2 y la proyección $\pi: R^2 \to T^2$

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y sea $f: T^2 \to T^2$ definida por

$f(p) = f(\pi(x,y)) = \pi(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \pi(2x+y, x+y).$

1) f está bien definida: es decir,
$f(p)$ no depende de la pareja (x,y) elegida en $\pi^{-1}(p)$.
En efecto:
si $(x',y') = (x,y) + (h,k)$ con h y k enteros,
entonces:
$A\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ = es una pareja de enteros.
Luego: $\pi\left(A\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = \pi\left(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \Rightarrow f(\pi(x',y')) = f(\pi(x,y)).$

2) f es invertible:
Basta verificar que la matriz A es invertible y que la inversa de A también tiene términos enteros (eso es porque $\det(A)=1$)
Entonces A^{-1} define una función de T^2 en T^2, que, según

se verifica fácilmente, es la inversa de f.

3) f es un homeomorfismo, porque f es continua, (al serlo en R^2 la transformación lineal, con matriz A), y f^{-1} también por la misma razón.

Estudiemos los puntos periódicos de f, y los conjuntos estables e inestables. Verificaremos que f cumple la hipótesis del teorema anterior.

PROPOSICION

1) El único punto fijo de f es (0,0).
2) El conjunto de puntos periódicos de f es el conjunto de puntos (x,y) con x e y racionales

Prueba

1) $f(\pi(0,0)) = \pi\left(A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \pi(0,0) \Rightarrow \pi(0,0)$ es punto fijo por f.

Si $f(\pi(x_0,y_0)) = \pi\left(A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right) = \pi(x_0,y_0)$, entonces:

$A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$ con h y k enteros:

$(A-I)\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$. Pero A no tiene valor propio 1, entonces A-I es invertible: $A-I = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ $(A-I)^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = (A-I)^{-1}\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$ = enteros $\Rightarrow \pi(x_0,y_0) = \pi(0,0)$ QED

2) Primero veamos que si x e y son racionales, entonces $\pi(x,y)$ es un punto periódico por f en el toro.

$f(\pi(x,y)) = \pi(A(x,y))$.

Si x e y son racionales, se pueden expresar con un denominador común m natural $m \geq 1$, y queda $x = h/m$ $y = k/m$ con h y k enteros.

$A(x,y) = 1/m\, A(h,k)$ = son dos racionales con denominador común m.

Entonces $f(\pi(x,y)) = \pi(A(x,y))$ admite una pareja de representantes en R^2 que son dos racionales en el intervalo $[0,1)$ con denominador común m.

Sea $Q_m = \{$ todas las parejas de racionales entre 0 y 1 que tienen denominador común m $\}$.

si $(x,y) \in Q_m$, entonces $f(\pi(x,y)) = \pi(x',y')$ con $(x',y') \in Q_m$

Como el conjunto Q_m es finito, tiene que haber un iterado de $\pi(x,y)$ que se repita. Entonces $\pi(x,y)$ es periódico.

Ahora, recíprocamente:

Si $\pi(x,y)$ es periódico $\Rightarrow A^n(x,y) = (x,y) + (h,k)$ con h y k enteros.

$(A^n - I)(x,y) = (h,k)$ enteros.

A tiene dos valores propios: uno < 1 y otro > 1 (ambos positivos)
$\Rightarrow A^n$ tiene la misma propiedad.
Entonces $(A^n - I)$ es invertible.

La inversa de una matriz con términos enteros, es una matriz con términos racionales.

$\Rightarrow (x,y) = (A^n - I)^{-1}(h,k)$ son racionales QED

COROLARIO

El conjunto de los puntos periódicos en T^2 por f, es denso.
(es una consecuencia inmediata delteorema anterior, porque el conjunto de parejas de racionales, es denso en R^2).

PROPOSICION

Sean (α, β) y (α', β') vectores propios de A con valor propio <1 y >1 respectivamente. Entonces:

$\frac{\alpha}{\beta}$ y $\frac{\alpha'}{\beta'}$ son irracionales.

Además la imagen por $\pi: R^2 \to T^2$ de la recta en R:
$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$ (t parám. real) está en el conjunto estable del punto $p_0 = \pi(x_0, y_0)$ en el toro.

Análogamente: $W^u(p_0) \supset \pi\left\{ x = x_0 + t\alpha' \quad y = y_0 + t\beta' \right\}$

Prueba:

Calculando los valores y vectores propios de A, resulta:
$\frac{\alpha}{\beta} = (1 - \sqrt{5})/2$ y $\frac{\alpha'}{\beta'} = (1 + \sqrt{5})/2$, que son irracionales.
Consideremos un punto (x,y) en la recta de R^2 que pasa por (x_0, y_0) con vector (α, β) (de pendiente irracional).

$f^n(\pi(x,y)) = \pi(A^n(x,y)) = \pi(A^n(x_0, y_0) + \lambda^n t(\alpha, \beta))$ donde λ es el valor propio $\lambda < 1$ de A.

$f^n(\pi(x_0, y_0)) = \pi(A^n(x_0, y_0))$

$$\text{dist}(f^n\pi(x,y), f^n\pi(x_0,y_0)) \leq \|A^n(x,y) - A^n(x_0,y_0)\| =$$
$$= \lambda^n |t| \|(\alpha, \beta)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{porque } \lambda < 1.$$

Entonces $\pi(x,y) \subset W^s(p_0)$ como queríamos probar.

La otra afirmación concerniente a $W^u(p_0)$ se prueba en forma similar.

COROLARIO

1) $W^s(p_0)$ y $W^u(p_0)$ son densas en T^2 para todo punto $p_0 \in T^2$

2) Dados dos puntos cualquiera p y $q \in T$, existe entonces: se cumple: $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$ (porque las rectas con vector (α, β) y con vector (α', β') se cortan en R^2).

COROLARIO

$f: T^2 \longrightarrow T^2$ definida por la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ cumple:

es topológiaamente mixing
tiene puntos periódicos de período arbitrariamente grande
tiene un conjunto residual de órbitas densas.

Comentario

El ejemplo anterior es también un ejemplo de dinámica hiperbólica (hay una dirección en que los vectores se agrandan y otra en la que se achican, hacia el futuro), los conjuntos estables e inestables se cortan transversalmente, y los puntos periódicos son densos. Este tipo de dinámica, caótica, es estructuralmente estable (si se cambia la función f por otra que sea tqambién un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable, y que sea próxima a f, entonces la dinámica presenta la misma complejidad que la de f)

5 EXPANSIVIDAD

Sea M un espacio Métrico y $f: M \to M$ un homeomorfismo.

DEFINICION

f se llama expansivo, si existe una constante $\alpha > 0$ tal que $dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha \quad \forall n$ entero $\Rightarrow x = y$

(es decir: dos trayectorias distintas, siempre se separan para algún n por lo menos una distancia α).

DEFINICION

Una función de Liapunov en $M \times M$, es una función continua $V: U \to \mathbb{R}$, donde U es el abierto de $M \times M$ dado por $U = \{ (x,y) \in M \times M : dist(x,y) < \delta \}$
(U es un "entorno de la diagonal" en $M \times M$).

Una función de Liapunov en $M \times M$ es definida positiva cerca de la diagonal, si $V(x,x) = 0 \ \forall x \in M$; $V(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in U$ con $x \neq y$.

Dada una función de Liapunov en $M \to M$, se puede definir otra de la siguiente forma:

$W(x,y) = V(f(x),f(y)) - V(x,y)$, definida en el abierto: $\{ (x,y) \in M \times M \ ; \ dist(x,y) < \delta \ ; \ dist(f(x),f(y)) < \delta \}$

TEOREMA

Sea M un espacio métrico compacto, y $f: M \to M$ un homeomorfismo.
Si existe una función de Liapunov V en $M \times M$, tal que $V(p,p) = 0 \ \forall p \in M$, y $W(p,q) = V(f(p),f(q)) - V(p,q)$ es definida positiva (en donde está definida), entonces:

f es expansivo.

Prueba

Sea α tal que $\alpha < \delta$; $dist(p,q) \leq \alpha \Rightarrow dist(f(p),f(q)) < \delta$ (existe tal α porque f es continua en el compacto M).

Luego, para todo (p,q) con $dist(p,q) \leq \alpha$, están definidas V(p,q) y W(p,q).

Probemos que con ese número α, la transformación f verifica la definición de expansividad:
Por absurdo, si existen $p \neq q$ tales que

$$dist(f^n(p), f^n(q)) \leq \alpha \quad \forall \text{ n entero},$$

entonces $V(f^n(p),f^n(q))$ y $W(f^n(p),f^n(q))$ están definidas para todo n entero.

Siendo $p \neq q$, $f^n(p) \neq f^n(q)$ para todo n.

$W(f^n(p),f^n(q)) > 0 \quad \forall$ n entero (porque W es def. positiva).

Entonces: $V(f^n(p),f^n(q)) > V(f(p),f(q)) > V(p,q) > V(f^{-n}(p),f^{-n}(q))$

para todo $n \geq 1$.

LLamemos $a = V(p,q)$

CASO 1) Si $a > 0$, entonces $V(f^n(p),f^n(q)) > a$ para todo $n \geq 1$.

Siendo V continua. y $V(s,s)=0 \ \forall s \in M$, entonces, existe δ' tal que $dist(p,q) < \delta' \Rightarrow V(r,s) < a/2$

Entonces: $dist(f^n(p),f^n(q)) \geq \delta'$ para todo $n \geq 1$

Sea $m = \min\{W(r,s) : \delta' \leq dist(r,s) \leq \delta\}$. Como W es definida posit. entonces $m > 0$

De lo anterior : $W(f^n(p),f^n(q)) \geq m \quad \forall n \geq 1$

Luego:

$$V(f^n(p),f^n(q)) = V(f^{n-1}(p), f^{n-1}(q)) + W(f^{n-1}(p),f^{n-1}(q))$$

$$\geq V(f(p),f(q)) + (n-1)\,m \to +\infty \quad \text{cuando } n \to +\infty .$$

Esto es absurdo, porque V toma un máximo en el compacto

$$\{(x,y) \in M \times M \ \ dist(x,y) \leq \alpha\}$$

donde están $f^n(p)$, $f^n(q)$ para todo $n \geq 1$.

CASO 2) si $a = 0$, entonces $a' = V(f(p),f(q)) > 0$. Vale la misma demostración usando a' en lugar de a.

CASO 3) si $a < 0$

Es una demostración similar usando que

$$V(f^n(p),f^n(q)) < a < 0 \quad \text{para todo } n < 0.$$

QED

Ejemplo

El homeomorfismo en el toro dado por la matriz en R^2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ es expansivo.

En efecto, dados p,q en T^2 tales que dist(p,q) $< 1/2$, podemos elegir enn R^2 parejas (x,y) (x',y') en $\pi^{-1}(p)$ y $\pi^{-1}(q)$ respectivamente, tales que

$$\| (x,y)-(x',y') \| < 1/2$$

Definamos $V(p,q) = (y'-y)(y'-x'-y+x)$ donde (x,y), (x',y') son parejas de reales que cumplen lo dicho antes.

(Esta función /V está definida sólo para los puntos p y q del toro T^2 tales que dist(p,q) $< 1/2$).

Véase que para esos puntos está bien definida (es decir no depende de la elección de los reales (x,y) (x',y'), siempre que éstos se elijan de modo que $\|(x,y) -(x',y')\| < 1/2$)

V es continua.

$W(p,q) = V(f(p),f(q))-V(p,q)= V$

$f(p) = f((x,y)) = (2x+y,x+y)$ | $f(q) = (2x'+y',x'+y')$

$V(f(p),f(q)) = (x'-x +y'-y)(-x'+x) = -(y'-y)(x'-x) -(x'-x)^2$

$V(f(p),f(q))-V(p,q) = -(x'-x)^2 - (y'-y)^2$

Entonces W(p,q) es definida negativa, y por el teorema anterior, f es expansiva.

BIBLIOGRAFIA

S. Newhouse: Lectures on Dynamical Systems.

J.Palis: Introduction to Geometric Theory of Dyn. Systems.

J. Lewowicz et al. : Lyapunov functions of two variables and a conjugacy theorem for Dyn. Systems.

TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras.

Octubre de 1998.

CAPITULO V
EJEMPLOS Y FENOMENOS CAOTICOS

EJERCICIOS

1. En la transformación f de herradura de Smale sea $\Lambda = \cap_{n \in Z} f^n(Q)$.

   Probar que Λ es el conjunto de las parejas $(x, y) \in I\!R^2$ con $0 < x < 1, \ \ 0 < y < 1$ tales que los desarrollos de x e y en base 5 tienen sólo las cifras 1 y 3 después de la coma.

2. Sea $f : I\!R^2 \mapsto I\!R^2$ dada por:

Si	$(x, y) \in Q_0 = \{\|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1\}$	entonces	$f(x, y) = ((1/3)x, 3y)$
Si	$(x, y) \in Q_1 = \{\|x\| \leq (1/2), \ \|y - 2\| \leq (1/2)\}$	entonces	$f(x, y) = ((2/3) - (1/3)x, 3(2 - y))$

   (a) Hallar todos los iterados de $(2/3, 0)$ y verificar que $f^n(2/3, 0) \to (0, 0)$ cuando $n \to +\infty$ y cuando $n \to -\infty$.

   (b) Sea $Q = Q_0 \cup Q_1$ dibujar $Q \cap f(Q)$; $\ f^{-1}(Q) \cap Q$; $\ Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ y $\ \cap_{j=-2}^{+2} f^j(Q)$. Demostrar que el conjunto $K = \{p \in I\!R^2 : f^n(p) \in Q \forall n \in Z\}$ es compacto, invariante y no vacío.

   (c) Sea $\{i_n\{_{n \in Z}$ una sucesión bi-infinita de ceros y unos tal que $i_n = 1$ implica $i_{n+1} = 0$. demostrar que exsite un único $p \in K$ tal que $f^n(p) \in Q_{i_n}$ para todo $n \in Z$.

   (d) Demostrar que f tiene minimales no triviales (Sugerencia: elegir una sucesión apropiada de ceros y unos).

3. Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo y $g = f^k$ donde k es entero.

   (a) Probar que $\Omega(g)$ es invariante bajo f y que $\Omega(g) \subset \Omega(f)$.

   (b) Si p es fuertemente recurrente según g, entonces ¿lo es según f?

   (c) Sea Λ minimal compacto de g. Probar que $\cup_{n \in Z} f^n(\Lambda)$ es minimal compacto de f.

   (d) Sea K minimal compacto de f. ¿Existe Λ minimal compacto de g tal que $K = \cup_{n \in Z} f^n(\Lambda)$

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo. un punto $q \in \mathbb{R}^n$ se llama homoclínico de p_0 si $\omega(q) = \alpha(q) = \{p_0\}$ para p_0 diferente de q.

   (a) Probar que p_0 es un punto fijo, y que todo punto de la órbita por q también es homoclínico.

   (b) Sabiendo que existe un entorno Q de p_0 tal que $f(p) = Ap$ para todo $p \in Q$, donde A es una matriz diagonal real, probar que A tiene algún valor propio de módulo mayor que uno, y otro de módulo menor que uno.

   (c) Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, q un punto homoclínico de $(0,0)$, $f(x,y) = (\alpha x, \beta y)$ con $\beta \geq \alpha$, para todo $(x,y) \in Q = \{|x| < 1,\ |y| < 1\}$. Probar que existe N natural arbitrariamente grande, tal que para todo $n > N$ se cumple $f^{-n}(q) = (0, y_n) \in Q$ y $f^n(q) = (x_n, 0) \in Q$.

   (d) Además de la hipótesis de la parte anterior, se sabe que exite un entorno Q_1 de $f^{-N}(q)$ tal que para todo $(x,y) \in Q_1$ se cumple $f^{2N}(x,y) = (x_N, y_{-N}) + H(x,y)$ donde H es una matriz real diagonal. Demostrar que f tiene un minimal no trivial. (Sugerencia: existe un rectángulo U y un entero m tales que $f^m(U) \cap U$ tiene por lo menos dos componentes conexas que son rectángulos con igual altura que U. Probar que f^m tiene un minimal no trivial).

5. Probar que 2^Z con la topología definida por los N-entornos, es un espacio totalmente desconexo, perfecto, compacto, metrizable con la distancia:

$$\text{dist } (\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{n \in Z} |a_n - b_n|/2^{|n|}$$

6. En el espacio del shift, probar que hay un conjunto denso de minimales no triviales.

7. Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo.

   (a) Probar que son equivalentes las afirmaciones siguientes:

      i. f topológicmante transitivo.

      ii. Para todos U y V abiertos no vacíos, existe $n_j \to +\infty$ tal que $f^{n_j}(U) \cap V \neq \emptyset$.

      iii. Para todos U y V abiertos no vacíos, y para todo N natural, existe un entero $n < -N$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

   (b) Encontrar un ejemplo de un homeomorfismo topológicmante transitivo pero no topológicmante mixing.

8. Sea $f : M \mapsto M$ topológicmante transitivo. Probar que:

   (a) $\Omega(f) = M$

   (b) Si U_0 es abierto no vacío, entonces:

$$H_0 = \{p \in M : f^n(p) \in U_0 \text{ para algún natural } n\}$$

   es abierto y denso.

(c) Si M tiene base numerable, entonces hay un residual de puntos cuya semiórbita positiva es densa.

(d) Si M tiene base numerable y todo residual de M es denso en M (espacio de Baire), entonces la condición de la parte anterior es también suficiente para que f sea topológicmante transitivo.

9. Sea A una matriz 2×2 de términos enteros con determinante igual a uno, con un valor propio mayor que uno, y otro menor que uno, y tal que los vectores propios forman con los ejes un ángulo de pendiente irracional. Demostrar que $f(\pi(x, y)) = \pi(A(x, y))$ define en el toro un homeomorfismo f que es topológicmante mixing.