TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras

Diciembre, 1997.

CAPITULO I
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Sea

$$\dot{x} = X(x,t)$$

una ecuación diferencial ordinaria, con $x \in \mathbb{R}^n$. Es de *primer orden,* porque concierne solo a la función desconocida $x(t)$ y a su primera derivada. La varible x es *espacial* tomando valores en un espacio n-dimensional, llamado *espacio de fases.* Es la variable dependiente. Depende de la variable real t, usualmente el *tiempo.* La dependencia de x en función de t es *desconocida.* La ecuación diferencial es una ley dada X que determina, en función del tiempo t y de la posición espacial x, cuál es la velocidad $\dot{x}$ en el espacio de fases.

Observamos que una ecuación diferencial de orden $k \geq 1$, esto es

$$x^{(k)} = F(x, \dot{x}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k-1)}, t)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, puede reducirse a una de primer orden en el espacio de fases $\mathbb{R}^{kn}$, mediante el cambio de variables: $y = (x, \dot{x}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k-1)})$, obteniendo:

$$\dot{y} = \Big(\dot{x}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k-1)}, F(x, \dot{x}, \ldots, x^{(k-1)}, t)\Big) = X(y,t)$$

Resolver la ecuación diferencial es encontrar la función desconocida $x = x(t)$, que da el punto del espacio de fases en función del tiempo. Debe verificar la ley dada por la ecuación diferencial, es decir: $\dot{x}(t) = X(x(t), t)$, para todo t en algún intervalo.

Bajo ciertas condiciones de regularidad, puede demostrarse que existen soluciones. A pesar de la existencia de soluciones, probada teóricamente, no siempre es posible encontrar explícitamente estas soluciones $x = x(t)$. En este curso veremos cómo estudiar la evolución del sistema sin necesidad de tener explícita la variable espacial x en función del tiempo t. Ese es el propósito de la teoría cualitativa.

En las primeras dos secciones enunciaremos los teoremas de Picard, y de la dependencia continua de las soluciones de las condiciones iniciales y de los parámetros. Suponemos conocidos estos teoremas de los cursos anteriores.

1 Existencia y unicidad de soluciones

Definición 1.1 Sea $\dot{x} = X(x,t)$ una ecuación diferencial ordinaria, donde $X : \Omega \mapsto I\!R^n$, Ω es un subconjunto abierto de $I\!R^n \times I\!R$ y $(x,t) \in \Omega$.

Una solución es una función $\varphi : I \mapsto I\!R^n$, definida en *un intervalo abierto* $I \subset I\!R$, tal que:

$$(\varphi(t), t) \in \Omega \text{ para todo } t \in I$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) = X(\varphi(t), t) \text{ para todo } t \in I$$

Nota: Un intervalo es, o bien toda la recta real, o bien una semirrecta, o bien un segmento en la recta real.

Obsérvese que, por definición, la solución está definida en un intervalo abierto. No es solución una función de t que verifica la ecuación diferencial, pero está definida, por ejemplo, en la unión de dos intervalos abiertos disjuntos. Por ejemplo, para la ecuación diferencial $\dot{x} = -x^2$, la función $x(t) = 1/t$, definida para $t \neq 0$, no es solución. Sí son dos soluciones distintas $x(t) = 1/t$, para $t < 0$, y para $t > 0$.

Definición 1.2 Una solución φ *(pasa) por* (x_0, t_0) si $\varphi(t_0) = x_0$. Es decir, la *gráfica* de la solución pasa por el punto (x_0, t_0).

Una solución $\varphi : I \mapsto I\!R^n$ que pasa por (x_0, t_0) es *única* cuando cualquier otra solución $\psi : J \mapsto I\!R^n$ que pasa por (x_0, t_0) verifica $\varphi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in I \cap J$.

Una solución $\varphi : I \mapsto I\!R^n$ que pasa por (x_0, t_0) es *maximal* (e I se llama *intervalo maximal*), si toda solución ψ por (x_0, t_0) definida en un intervalo $J \supset I$, y tal que $\varphi = \psi|_I$, verifica $I = J$.

El teorema de Picard da condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones por cualquier punto de Ω.

Definición 1.3 La función $X : \Omega \mapsto I\!R^n$ es *globalmente lipschitziana en* Ω*, respecto a la variable* x*,* si existe una constante $K > 0$ tal que

$$\|X(x_0,t) - X(x_1,t)\| \leq K\|x_0 - x_1\| \text{ para todo } (x_0,t) \text{ y } (x_1,t) \in \Omega$$

La función $X : \Omega \mapsto I\!R^n$ es *lipschitziana en* Ω*, respecto a la variable* x*,* si cada punto $(x,t) \in \Omega$ está en algún entorno $V \subset \Omega$ tal que $X|_V$ es globalmente lipschitziana en V.

Si X es diferenciable respecto a x con derivada continua, entonces es lipschitziana respecto a x.

Teorema 1.4 (Picard) *Sea* $X : \Omega \mapsto I\!R^n$ *continua y lipschitziana respecto a la primera variable* x*. Entonces la ecuación diferencial* $\dot{x} = X(x,t)$ *tiene, por cualquier* $(x_0,t_0) \in \Omega$*, una única solución.*

Corolario 1.5 *Si* X *es continua y lipschitziana respecto a la variable* x*, entonces la ecuación diferencial* $\dot{x} = X(x,t)$ *tiene, por cualquier* (x_0,t_0)*, una única solución maximal.*

Nota: El intervalo maximal de la solución maximal por (x_0, t_0) se denotará como

$$(a_{x_0,t_0}, b_{x_0,t_0})$$

donde a y b son $-\infty, +\infty$, o números reales.

La solución maximal por (x_0, t_0) se denotará como

$$\varphi_{x_0,t_0}$$

Sus valores para cada $t \in (a_{x_0,t_0}, b_{x_0,t_0})$, serán $\varphi_{x_0,t_0}(t)$ o también $\phi(x_0, t_0, t)$.

Teorema 1.6 (Salida de compactos) *Si X es continua en Ω, y si la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x,t)$ tiene para cada $(x_0, t_0) \in \Omega$ una única solución, entonces, dado cualquier compacto $K \subset \Omega$, existen números a y b tales que $t_0 < b < b_{x_0,t_0}$, $\quad a_{x_0,t_0} < a < t_0$, y, para todo $t > b$ o $t < a$, en el intervalo maximal, se cumple*

$$(\varphi_{x_0,t_0}(t), t) \notin K$$

El teorema anterior asegura que las soluciones se prolongan hacia la izquierda y la derecha de t_0, de tal forma que la gráfica se sale de cualquier compacto contenido en Ω.

Consecuencias:

1. Si $\Omega = I\!R^n \times I\!R$ y si $\phi_{x_0,t_0}(t)$ está acotada para $t \geq t_0$, entonces $b_{x_0,t_0} = \infty$. En forma similar, si está acotada para $t \leq t_0$, entonces $a_{x_0,t_0} = -\infty$.

2. Si Ω es cualquier abierto, y si $b_{x_0,t_0} = b$ finito, entonces:

   - o bien, para toda sucesión $t_n \to b^-$, se cumple $\lim(\varphi_{x_0,t_0}(t_n), t_n)$ existe y está en el borde de Ω,
   - o bien $\lim_{t \to b^-} \|\varphi_{x_0,t_0}(t)\| = \infty$.

   El resultado análogo vale cuando a_{x_0,t_0} es finito.

2 Dependencia de las condiciones iniciales y de los parámetros

Sea $\dot{x} = X(x,t,\mu)$, $\quad x \in I\!R^n, t \in I\!R, \mu \in I\!R^p$, una ecuación diferencial ordinaria que depende del parámetro μ. Para cada valor fijo del parámetro $\mu \in I\!R^p$, se tendrá una ecuación diferencial, que supongamos tiene una única solución maximal por (x_0, t_0). Esta solución maximal, ahora, además de depender de (x_0, t_0), depende del parámetro μ, y es función, como siempre, de la variable t, respecto a la cual verifica la ecuación diferencial. Denotaremos como

$$\phi(x_0, t_0, \mu, t)$$

el valor de la solución maximal en t, por (x_0, t_0), de la ecuación diferencial que se obtiene al fijar el parámetro μ.

Teorema 2.1 *Sea X continua en un conjunto abierto $\Omega \subset I\!R^n \times I\!R \times I\!R^p$, y tal que para cada $(x_0, t_0, \mu) \in \Omega$ existe una única solución maximal $\phi(x_0, t_0, \mu, t)$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x, t, \mu)$.*

Entonces ϕ depende continuamente de x_0, t_0, μ, t en su dominio de definición. Además dicho dominio es abierto.

Ejemplo: Para $x \in I\!R, \lambda \in I\!R, t \in I\!R$ sea $\dot{x} = \lambda x^2$. Se tiene

$$\phi(x_0, t_0, \lambda, t) = \frac{x_0}{1 - \lambda(t - t_0)x_0}$$

El intervalo maximal es:
Cuando $\lambda x_0 < 0 : I_{x_0,t_0,\lambda} = (t_0 + 1/\lambda x_0, +\infty)$
Cuando $\lambda x_0 > 0 : I_{x_0,t_0,\lambda} = (-\infty, t_0 + 1/\lambda x_0)$
Cuando $\lambda x_0 = 0 : I_{x_0,t_0,\lambda} = (-\infty, +\infty)$
El dominio de definición de ϕ es $\{(x_0, t_0, \lambda, t) \in I\!R^4 : t \in I_{x_0,t_0,\lambda}\}$.

3 Lema de Gronwall

El lema de Gronwall, que enunciaremos y demostraremos a continuación, además de ser útil para demostrar el teorema 2.1, permite acotar las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales, y por ese medio, estudiar, en muchos casos, los intervalos maximales.

Lema 3.1 (Gronwall) *Si una función continua real u definida en un intervalo $[t_0, t_1]$ verifica*

$$0 \leq u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s) \; ds$$

con $\alpha \geq 0$ y $k(s) \geq 0$ continua para todo $s \in [t_0, t_1]$, entonces

$$u(t) \leq \alpha \exp \int_{t_0}^{t} k(s) \; ds \text{ para todo } t \in [t_0, t_1]$$

En particular, si $\alpha = 0$ entonces $u \equiv 0$, y si $k(s)$ es constante $u(t) \leq \alpha e^{k(t-t_0)}$.

Prueba: Supongamos primero que $\alpha \neq 0$. Entonces se tiene $0 < \alpha \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s) \; \mathrm{d}s$, y por hipótesis:

$$0 \leq \frac{u(t)k(t)}{\alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s) \; \mathrm{d}s} \leq k(t)$$

Integrando ambos miembros entre t_0 y t resulta:

$$\log\left(\alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s) \; \mathrm{d}s\right) - \log\alpha \leq \int_{t_0}^{t} k(s) \; \mathrm{d}s$$

de donde

$$\alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s) \; \mathrm{d}s \leq \alpha \exp \int_{t_0}^{t} k(s) \; \mathrm{d}s$$

Como $u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s$, resulta la tesis.

Veamos ahora el caso $\alpha = 0$. Sea $\epsilon_n \to 0$, $\epsilon_n > 0$. Por hipótesis se tiene:

$$0 \leq u(t) \leq \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s < \epsilon_n + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_1]$$

Por lo demostrado antes:

$$u(t) \leq \epsilon_n \exp \int_{t_0}^{t} k(s)\ \mathrm{d}s$$

Fijando t y haciendo $n \to \infty$ resulta $u(t) \leq 0$ ■

4 Ejemplo de estudio cualitativo

Veremos cómo, sin resolver la ecuación diferencial, pueden croquizarse las gráficas de las soluciones:

Sea la ecuación diferencial

$$\dot{x} = t - x^2$$

para $x \in I\!R, t \in I\!R$.

Dibujaremos esquemáticamente en $I\!R^2$ las gráficas de las soluciones maximales $\varphi_{x,0}(t)$ para $x \in I\!R$, y t en el intervalo maximal $I_{x,0}$.

Primero, analicemos el signo de $\dot{x}$. Si $t < x(t)^2$ entonces la gráfica de la solución $x(t)$ es decreciente, porque $\dot{x}(t) < 0$. Si $t > x(t)^2$, la gráfica es creciente. En el punto donde la gráfica corta a la parábola $t = x^2$, hay un mínimo relativo. No toda solución tiene que cortar a esa parábola, pero si lo hace, en el punto de intersección presenta un mínimo relativo, y solo en la intersección con la parábola puede anularse la derivada. Luego, si la corta, no lo puede hacer mas de una vez. Entonces, las soluciones que cortan a la parábola, tienen intervalo maximal infinito hacia la derecha (ya que tiene que salir de cualquier compacto, son crecientes, y no pueden tener asíntota vertical porque están por abajo de la parábola).

Puede demostrarse, a partir de la ecuación diferencial, que todas las soluciones tienen intervalo de definición acotado por la izquierda. También puede probarse que existe una única solución que queda entre el lugar de los mínimos y el lugar de los puntos de inflexión. Y finalmente que todas las soluciones que no cortan la parábola lugar de mínimos, pero que cortan el lugar de los puntos de inflexión tienen intervalo de definición acotado. Para hacer esas demostraciones se compara el segundo miembro de la ecuación diferencial con una función mayor (o menor) que ella, que tenga soluciones fácilmente calculables. Se observa que eso implica que la solución de la ecuación dada, para $t > t_0$ está por abajo (por arriba) de las solución de la otra ecuación diferencial, con mismo dato inicial. Si la de esta otra ecuación tiene asíntota vertical hacia abajo, y la de la ecuación dada está por abajo de ella, entonces la solución buscada también tiene asíntota vertical.

5 Sistemas lineales

Sea en $I\!R^n$ la ecuación

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad t \in I\!R, \ \ x \in I\!R^n$$

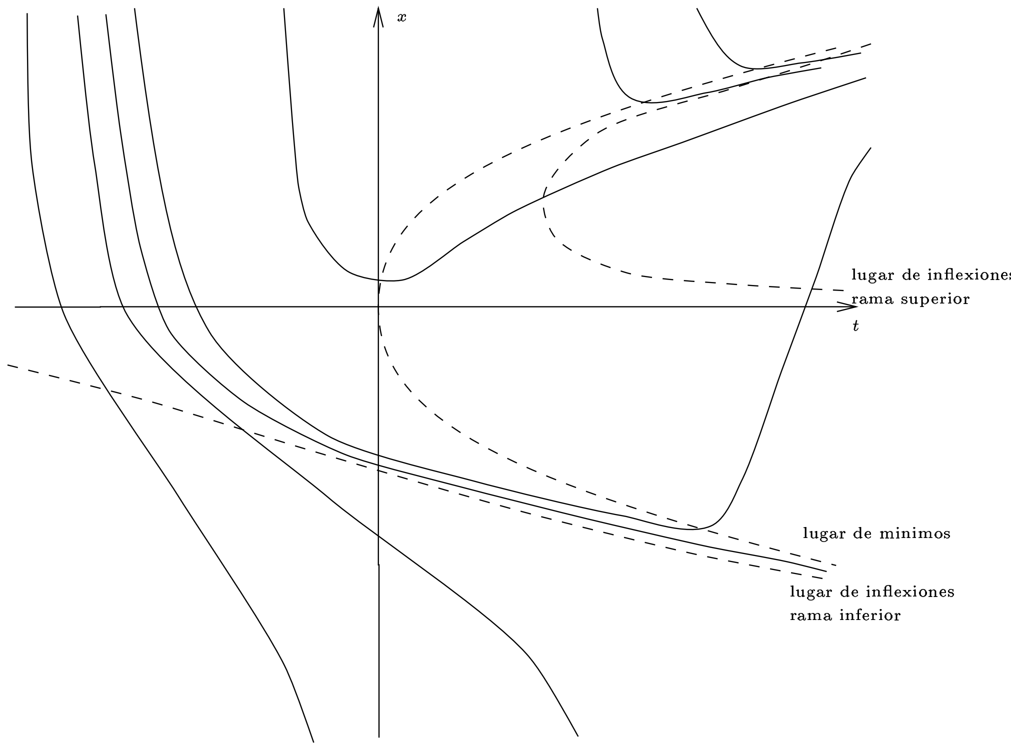

Figura 1: Soluciones de $\dot{x} = t - x^2$

donde $A(t)$ es, para cada $t \in I\!R$, una matriz real $n \times n$, que depende continuamente de t, y $b(t)$ es para cada $t \in I\!R$ un vector de $I\!R^n$ que también depende continuamente de t.

La ecuación anterior se llama *lineal.* Si $A(t)$ es independiente de t, entonces es *a coeficientes constantes.* Si $b(t)$ es nulo para todo t, la ecuación se llama *homogénea.*

Se observa que $A(t)x + b(t)$ es lipschitziana en x, pues

$$\|A(t)x_1 - A(t)x_2\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq \|A(t)\|\|x_1 - x_2\|$$

donde la norma de una matriz A se define como

$$\|A\| = \max\{\|Au\| : u \in I\!R^n, \quad \|u\| = 1\}$$

Entonces, si $v \neq 0$ en $I\!R^n$, se cumple

$$\|Av\| = \|v\| \left\| A\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \leq \|v\|\|A\|$$

Luego, para todo $v \in I\!R^n$ se cumple $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$.

Proposición 5.1 *Las soluciones maximales de la ecuación lineal homogénea (que existen y son únicas para cada condición inicial), están definidas para todo $t \in I\!R$.*

Prueba: La existencia y unicidad de la solución maximal$\varphi_{x_0,t_0}(t)$ por cada punto $(x_0, t_0) \in I\!R^{n+1}$, definida en el intervalo maximal I_{x_0,t_0}. es una consecuencia del teorema de Picard.

Supongamos, por absurdo, que el extremo derecho del intervalo I_{x_0,t_0} sea el número real h. Sea

$$M = \max\{\|A(t)\| : t_0 \leq t \leq h\}, \quad B = \max\{\|b(t)\| : t_0 \leq t \leq h\}$$

Los números reales M y B existen porque $A(t)$ y $b(t)$ dependen continuamente de t, y los máximos se calculan en un intervalo compacto.

Para abreviar llamaremos $x(t) = \varphi_{x_0,t_0}(t)$.

Como $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$, integrando respecto a t, entre t_0 y $t \in [t_0, h)$, se obtiene

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t)x(t) + b(t) \ \mathrm{d}t$$

Luego, para todo $t \in [t_0, b)$:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} M\|x(t)\| \ \mathrm{d}t$$

Por el lema de Gronwall se tiene

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\|e^{M(t-t_0)}, \quad \text{para todo } t \in [t_0, b)$$

Luego, $\|x(t)\| \leq \|x_0\|e^{M(b-t_0)}$
tomando en $I\!R^{n+1}$ el compacto

$$K = \{(x,t) \in I\!R^{n+1} : \|x\| \leq \|x_1\|e^{M(b-t_0)}, \ t_0 \leq t \leq b\}$$

la gráfica de la solución maximal, a la derecha de t_0 no se saldría del compacto K, contradiciendo el teorema de salida de compactos.

Para probar que el extremo izquierdo es $-\infty$ nótese que $x(t)$ definida en (a,h) es solución de $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, solo si $x(-t)$ definida en $(-h,-a)$ es solución de $\dot{y} = -A(-t)y - b(-t)$, que también es una ecuación lineal. Por lo demostrado antes $-a = \infty$. ■

Definición 5.2 Se llama *matriz fundamental* de la ecuación lineal $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ a una matriz $\Phi(t)$, invertible para todo $t \in \mathbb{R}$ y tal que

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

La igualdad anterior es entre matrices cuadradas $n \times n$, y la matriz $\dot{\Phi}(t)$ es la que se obtiene derivando respecto a t todos los términos de la matriz $\Phi(t)$.

Proposición 5.3 *Si $\Phi(t)$ verifica $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, entonces es fundamental si y solo si*

$$\det \Phi(t_0) \neq 0$$

para algún $t_0 \in \mathbb{R}$.

Prueba: Basta demostrar que si $\det \Phi(t_0) \neq 0$ entonces $\det \Phi(t) \neq 0$ para todo t. Esto es una consecuencia inmediata del siguiente teorema. ■

Teorema 5.4 (Liouville) *Si $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\det \Phi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \textit{traza } A(s)\ ds\right) \det \Phi(t_0)$$

Prueba:

Indicaremos con A_i a la i-ésima fila de la matriz A, con Φ_i a la i-ésima fila de la matriz $\Phi(t)$, y a dichas matrices como

$$A = (A_1, \ldots, A_n), \quad \Phi(t) = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$$

El determinante de una matriz se calcula sumando con signo apropiado, todos los productos que se obtienen de elegir un y solo un término de cada columna y cada fila de la matriz. Si estos términos dependen de t, la derivada del determinante respecto de t se obtiene, por la regla de derivación de un producto, como

$$(\det \Phi(t))^{\cdot} = \det(\dot{\Phi}_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) + \det(\Phi_1, \dot{\Phi}_2, \ldots, \Phi_n) + \ldots + \det(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \dot{\Phi}_n)$$

$$(\det \Phi(t))^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \det(\Phi_1, \ldots, \dot{\Phi}_i, \ldots, \Phi_n)$$

Como, por hipótesis, $\dot{\Phi}_i = A_i\Phi(t)$, resulta que $\dot{\Phi}_i$ es combinación lineal de las filas de $\Phi(t)$. Más precisamente

$$\dot{\Phi}_i = a_{i1}\Phi_1 + \ldots + a_{ii}\Phi_i + \ldots a_{in}\Phi_n$$

donde la fila A_i es $a_{i1}, \ldots, a_{in}$.

Como el determinante de una matriz no cambia al restar de una fila cualquier combinación lineal de las demás, resulta:

$$(\det \Phi(t))^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \det(\Phi_1, \ldots, a_{ii}\Phi_i, \ldots, \Phi_n) = \text{ traza } A(t) \det \Phi(t)$$

Sea

$$f(t) = (\det \Phi(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \text{ traza } A(s) \text{ d}s\right)$$

Derivando respecto a t se tiene

$$\dot{f}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \text{ traza } A(s) \text{ d}s\right)((\det \Phi(t)^{\cdot} - (\text{traza} A(t))(\det \Phi(t))) = 0$$

Luego $f(t) = f(t_0)$, es decir

$$\det \Phi(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \text{ traza } A(s) \text{ d}s\right) = \det \Phi(t_0)$$

como se quería demostrar. ■

Teorema 5.5 *Las soluciones maximales de una ecuación diferencial lineal homogénea $\dot{x} = A(t)x$ forman un espacio vectorial de dimensión n.*

Una matriz $\Phi(t)$ es fundamental si y solo si sus columnas son una base del espacio de soluciones.

La solución que pasa por (x_0, t_0) es $\phi(x_0, t_0, t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$.

Prueba: Si $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación, entonces $\alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ también verifica la ecuación, y es maximal porque está definida para todo t. Luego, las soluciones maximales forman un espacio vectorial. Veamos que tiene dimensión n. Para ello probaremos que las columnas de cualquier matriz fundamental $\Phi(t)$ forman una base del espacio de soluciones.

Sea $\varphi_i(t)$ la columna i-ésima de la matriz $\Phi(t)$. Como $\det \Phi(t) \neq 0$, sus columnas son linealmente independientes para todo t.

Además $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, si y solo si cada columna $\varphi_i(t)$ verifica la ecuación diferencial $\dot{x} = A(t)x$.

Lo anterior prueba que $\varphi_i(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. Falta ver que $\varphi_i(t)$ generan el espacio de soluciones.

Llamemos $x_i = \varphi_i(t_0)$. Como $\det \Phi(t_0) \neq 0$, los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son una base de $\mathbb{R}^n$.

Sea $\phi(x_0, t_0, t)$ una solución. El vector x_0 es combinación lineal de la base de $\mathbb{R}^n$: $x_1, \ldots, x_n$. Es decir: $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Consideremos la función $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t)$ definida para todo t. Es solución de la ecuación diferencial porque las φ_i lo son. En $t = t_0$ toma el valor x_0 porque $\varphi_i(t_0) = x_i$. Por la unicidad, es entonces la solución maximal por (x_0, t_0), es decir

$$\phi(x_0, t_0, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t)$$

Con lo anterior probamos que las columnas de $\Phi(t)$ son una base del espacio de soluciones. Entonces este espacio tiene dimensión n.

Recíprocamente, si una matriz $\Phi(t)$ tiene sus n columnas que son una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea, entonces la matriz verifica $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ (pues sus columnas lo verifican), y su determinante es no nulo (pues sus columnas son linealmente independientes). Es decir, la matriz es fundamental.

Finalmente falta probar que la solución $\phi(x_0, t_0, t)$ es $\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$ En efecto, como $\Phi(t)$ es matriz fundamental, derivando respecto de t a la función $x(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$ se obtiene $\dot{x}(t) = A(t)\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 = A(t)x(t)$. Luego $x(t)$ es solución. Además $x(t_0) = x_0$. Por la unicidad $x(t) = \phi(x_0, t_0, t)$ como queríamos probar. ∎

Definición 5.6 Una matriz fundamental $\Phi(t)$ se llama *principal,* si $\Phi(0)$ es la identidad.

Es fácil ver que la matriz principal existe y es única.

En la última parte del teorema anterior se enuncia como resolver totalmente la ecuación lineal homogénea, teniendo una matriz fundamental. En particular, si la metriz fundamental es la principal, entonces cualquier solución $x(t)$ se obtiene como $\Phi(t)x(0)$.

Resolvamos ahora la ecuación lineal no homogénea.

Teorema 5.7 (Variación de constantes) *Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental.*

La solución de la ecuación

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

que en $t = t_0$ toma el valor x_0 es

$$\phi(x_0, t_0, t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}b(s)\ ds$$

Prueba: La solución de la homogénea, por el teorema anterior es $\Phi(t)C$ donde C es un vector de $\mathbb{R}^n$ independiente de t.

Busquemos ahora soluciones de la ecuación no homogénea, sustituyendo el vector constante C por un vector $u(t)$ a determinar. Es decir probemos con

$$x(t) = \Phi(t)u(t)$$

Derivando respecto a t y sustituyendo en la ecuación diferencial no homogénea, se tiene:

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t)u(t) + \Phi(t)\dot{u}(t) = A(t)\Phi(t)u(t) + \Phi(t)\dot{u}(t) = A(t)x(t) + \Phi(t)\dot{u}(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

Luego

$$\dot{u}(t) = \Phi(t)^{-1}b(t)$$

Integrando respecto de t entre t_0 y t, se obtiene:

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}b(s)\ \mathrm{d}s$$

Como $u(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}x_0$, se tiene:

$$x(t) = \Phi(t)\left(\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)\ \mathrm{d}s\right)$$

■

6 Sistemas lineales a coeficientes constantes.

Matriz exponencial.

En los cursos de ecuaciones diferenciales básicos se demuestra que la matriz principal de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = Ax$$

donde A es una matriz $k \times k$ de términos constantes (independientes de t), es la matriz exponencial e^{At}, donde

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

(En esta serie A^0 es por definición la matriz identidad).

Esta serie converge absolutamente (es decir converge la serie de la normas, porque está mayorada por la serie de términos positivos $\|A\|^n/n!$), y por lo tanto converge en el espacio normado de matrices $k \times k$, cualquiera sea la matriz A.

Consideremos

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

Por lo anterior, converge (y lo hace absolutamente) cualquiera sea la matriz A y cualquiera sea el número real t. Además, usando el criterio de la mayorante de Weierstrass, no es complicado demostrar que la serie de las derivadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{(n-1)!} = A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = Ae^{At}$$

converge uniformemente en cualquier intervalo $[-K, K]$, cualquiera sea $K > 0$. Entonces, su suma es igual a la derivada de la matriz $e^A t$, y esto vale para cualquier t real (ya que dado t puede elegirse K de modo que $t \in [-K, K]$).

Entonces $(e^{At})^{\cdot} = Ae^{At}$, para todo t real. Teniendo en cuenta que e^{A0} es la identidad, se deduce que:

Teorema 6.1 *e^{At} es la matriz principal de la ecuación $\dot{x} = Ax$.*

Cálculo de la matriz exponencial.

Es fácil verficar, a partir de la definición de matriz exponencial, que si Λ es una matriz diagonal con valores propios λ_i, entonces $e^{\Lambda t}$ es también una matriz diagonal, formada por las funciones $e^{\lambda_i t}$ en la diagonal principal.

También es fácil verificar que si N es una matriz nilpotente de orden p (esto es, N^p es la matriz nula, siendo p el mínimo natural para el cual esto ocurre), esntonces e^{Nt} es una matriz polinómica en t de grado $p-1$ (todos los términos son polinomios en t de grado máximo $p-1$).

Dada una matriz cuadrada A, existe un cambio de base, tal que A es semejante a la forma canónica de Jordan J, es decir $A = PJP^{-1}$. Esto implica que $(At)^n = P(Jt)^n P^{-1}$, y aplicando la definición de matriz exponencial

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

La forma canónica de Jordan J está compuesta por bloques cuadrados $B_1, B_2, \dots, B_m$, ubicados a lo largo de la diagonal, siendo los demás términos nulos. Se observa que entonces J^n también está formada por bloques cuadrados, del mismo tamaño que los de J, que son $B_1^n, B_2^n, \dots, B_m^n$, y aplicando la definición de matriz exponencial, resulta que:

La matriz e^{Jt} está formada por los bloques cuadrados $e^{B_1 t}, e^{B_2 t}, \dots, e^{B_m t}$.

Cada bloque B_i de la forma canónica de Jordan es igual a $\lambda_i I + N_i$, siendo λ_i un valor propio de A (real o complejo), I la matriz identidad y N_i una matriz nilpotente de orden p_i (igual al tamaño del bloque).

Se observa que tanto la matriz $e^{(\lambda I + N)t}$ como la matriz $e^{\lambda t}e^{Nt}$ son matrices principales de la ecuación $\dot{x} = (\lambda I + N)x$. Por la unicidad de la matriz principal, se obtiene entonces que:

Descomponiendo cada bloque B en $\lambda I + N$, se cumple $e^{Bt} = e^{\lambda t}e^{Nt}$ siendo e^{Nt} una matriz polinómica en t de grado igual al tamaño del bloque menos uno.

Sistemas lineales no homogéneos, a coeficientes constantes

Sea el sistema

$$\dot{x} = At + b(t)$$

donde A es una matriz de términos constantes (independientes de t).

Por lo visto en la sección anterior, se tiene la solución general

$$\phi(x_0, t_0, t) = e^{At}(e^{At_0})^{-1}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t}(e^{As})^{-1}b(s)\,ds$$

Por un lado se tiene que la identidad I es la matriz principal de la ecuación $\dot{x} = 0$. Por otro, se verifica que también las matrices $e^{At}e{-}At$ y $e^{-At}e^{At}$ son la matriz principal. Entonces la inversa de e^{At} es $e^{-At} = e^{A(-t)}$. Es decir para invertir la matriz exponencial e^{At} basta sustituir t por $-t$.

Repitiendo el razonamiento, las matrices $e^{A(t-t_0)}$ y $e^{At}e^{-At_0}$ verifican la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ y en $t = t_0$ coinciden. Por la unicidad de la solución deben coincidir.

Reuniendo lo anterior se tiene:

La solución de $\dot{x} = Ax + b(t)$, con dato inicial (t_0, x_0) es

$$\phi(x_0, t_0, t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{A(-s)} b(s)\, ds$$

Estabilidad de los sistemas lineales

Dada una ecuación diferencial $\dot{x} = X(x, t)$ tal que existe solución única por (t_0, x_0), llamemos $x(t)$ a esa solución, y supongamos que está definida por lo menos para todo $t \geq t_0$.

Definición 6.2 Se dice que la solución $x(t)$ es *estable* (en el futuro, en el sentido de Liapunov), si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta$ implica que existe solución única $y(t)$ por t_0, y_0, definida por lo menos para $t \geq t_0$, y se cumple $\|y(t) - x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Se dice que la solución $x(t)$ es *inestable* si no es estable.

Se dice que la solución $x(t)$ es *asintóticamente estable* (en el futuro, en el sentido de Liapunov), si es estable y además existe $\rho > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \rho$ implica que $\|y(t) - x(t)\| \to_{t\to\infty} 0$.

Estas definiciones se pueden aplicar en particular a los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial (es decir, a las soluciones constantes $x(t) = x_0$ para todo t real).

Teorema 6.3 *Todas las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax + b(t)$ tienen la misma estabilidad. (Es decir, o bien son todas estables, o bien son todas inestables, y si son estables, entonces o bien son todas asintóticamente estables, o bien no lo es ninguna).*

Prueba:

Basta demostrar que la estabilidad de una solución $x(t)$ cualquiera es la misma que la del punto de equilibrio 0 del sistema homogéneo $\dot{x} = Ax$. Para ello basta observar que dada la solución $x(t)$ de la ecuación $\dot{x} = Ax + b(t)$, una segunda función $y(t)$ es también solución si y solo si $z(t) = y(t) - x(t)$ es solución de $\dot{x} = Ax$. Como la norma de $y(t) - x(t)$ es igual a la norma de $z(t) - 0$, basta aplicar las definiciones para obtener que $x(t)$ es solución estable (asintóticamente estable, inestable) de la ecuación $\dot{x} = At + b(t)$, si y solo si 0 lo es de la ecuación $\dot{x} = Ax$. ■

Ahora veamos cómo la estabilidad del sistema lineal se puede deducir de los valores propios de A:

Teorema 6.4 *Sea la ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes: $\dot{x} = Ax + b(t)$.*

Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, entonces las soluciones son asintóticamente estables (hacia el futuro, según Liapunov).

Si alguno de los valores propios de A tiene parte real positiva, entonces las soluciones son inestables (hacia el futuro según Liapunov).

En el caso que resta, es decir, si todos los valores propios de A tienen parte real menor o igual que cero, y alguno tiene parte real 0, entonces las soluciones son estables pero no asintóticamente (en el futuro, según Liapunov), si la multiplicidad geométrica de todos los valores propios con parte real nula, es igual a la multiplicidad algebraica respectiva. En caso contrario, es decir, si para algún valor propio con parte real nula, las multiplicidades geométrica y algebraica son diferentes, entonces la soluciones son inestables.

Prueba:

Basta estudiar la estabilidad de 0 en el sistema homogéneo $\dot{x} = Ax$, siendo $A = PJP^{-1}$, con J (quizás matriz compleja) la forma canónica de Jordan de A. Haciendo el cambio de variables $x = Py$, se obtiene el sistema equivalente $\dot{y} = Jy$. Como un sistema se obtiene del otro mediante un cambio de variables que deja fijo al punto de equilibrio 0, la estabilidad de ambos sistemas es la misma. Como las matrices A y J son semejantes, sus valores propios, y sus multiplicidades geométricas y algebraicas son la misma. Entonces basta demostrar el teorema para la matriz J en lugar de A.

La solución de $\dot{x} = Jx$ es $x(t) = e^{Jt}x_0$. Si la norma de la matriz e^{Jt} está acotada para todo $t \geq 0$, entonces $\|x(t)\| \leq K\|x_0\|$ para todo $t \geq 0$, donde K es una constante positiva. Dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta = \epsilon/K$ para verificar que se cumple la definición de estabilidad del 0.

Sabiendo que 0 es estable, como $x(t) = e^{Jt}x_0$, entonces 0 es asintóticamente estable si y solo si la matriz e^{Jt} tiende a la matriz nula, cuando t tiende a $+\infty$.

Por otro lado, si existe algún término (en la fila i y columna j) de la matriz e^{Jt}, que en módulo tiende a $+\infty$, podemos elegir un vector x_0 con su componente j-ésima no nula (que puede elegirse con norma tan pequeña como se desee). Se obtiene que el producto $x(t) = e^{Jt}x_0$ tiene su término i-ésimo que tiende, en módulo, a infinito. Entonces no se cumple que $\|x(t)\|$ es menor que ϵ para todo $t > 0$, a pesar que x_0 pudo elegirse con norma menor que cualquier δ. Esto implica que 0 es inestable (hacia el futuro).

Resumiendo, si todos los términos de la matriz e^{Jt} están acotados para $t \geq 0$, entonces 0 es estable (en el futuro). Siendo 0 estable, entonces es asintóticamente estable si y solo si todos los términos de e^{Jt} tienden a cero cuando t tiende a infinito. Por otro lado si algún término de e^{Jt} tiende en módulo a infinito, cuando t tiende a infinito, entonces 0 es inestable.

Ahora analicemos la matriz e^{Jt} calculada más arriba. Todos los términos de ella son de la forma $e^{\lambda_i t}p_{i,j}(t)$ donde λ_i es un valor propio de J, y $p_{i,j}(t)$ es un polinomio de grado máximo igual al tamaño del bloque de Jordan al que pertence, menos uno.

Entonces, si todos los valores propios de J tienen parte real negativa, todos los términos de la matriz e^{Jt} tienden a cero cuando t tiende a infinito, y por lo tanto están acotados para $t \geq 0$. Por lo visto antes esto implica la estabilidad asintótica del 0.

Si algún valor propio de J tiene parte real positiva, existe un término de e^{Jt} que tiende, en módulo, a infinito, cuando t tiende a infinito. Por lo visto antes, esto implica la inestabilidad del punto de equilibrio.

Finalmente, en los casos que quedan, observemos que los términos de la matriz e^{Jt} que corresponden a valores propios con parte real negativa (si los hubiera), están acotados para $t \geq 0$, y que los términos que corresponden a valores propios con parte real nula, no tienden nunca a cero, y están acotados si y solo si los polinomios $p_{i,j}$ tienen todos grado cero. En caso contrario tienden a infinito. Como el grado máximo de esos polinomios es igual al tamaño del bloque menos uno, obtenemos que 0 es estable, pero no asintóticamente, si todos los bloques de Jordan de los valores propios con parte real nula tienen tamaño uno. Si alguno tiene tamaño mayor que uno, entonces el 0 es inestable.

Pero, la cantidad de bloques de Jordan para cada valor propio es igual a la multiplicidad geométrica del valor propio (porque para cada bloque hay una sola dirección de vectores propios). Además la multiplicidad algebraica es igual a la cantidad de veces que aparece el valor propio en la diagonal de J. Entonces los bloques asociados a un valor propio, tienen todos tamaño uno si y solo si la multiplicidad geométrica es igual a la algebraica, para ese valor propio. ■

Bibliografía:

J.SOTOMAYOR Licoes de equacoes diferenciais ordinarias. IMPA Río de Janeiro.

CODDINGTON-LEVINSON Theory of ordinary differential equations.

EJERCICIOS

1. Encontrar ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias con soluciones maximales en intervalos del tipo $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, b)$ y $(a, +\infty)$.

2. Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x,t)$ con X de clase C^1 (es decir, continua, diferenciable y con derivada primera continua), definida en $\Omega \subset I\!R^n \times I\!R$, con valores en $I\!R^n$. La única solución maximal por (x_0, t_0) se denota como $\varphi(x_0, t_0, t)$. La derivada respecto a x_0 se denota como $\varphi'(x_0, t_0, t)$. Es una matriz $n \times n$, cuyo término general $a_{i,j}$ depende de x_0, t_0, t, y es la derivada parcial de la i-ésima componente de φ respecto a la $j$ésima componente de x_0.

   Demostrar que la matriz $\varphi'(x_0, t_0, t)$ verifica:

   a La ecuación diferencial $\dot{Y} = J(t)Y$, donde $J(t)$ es la matriz jacobiana de X, es decir $J(t) = X'(x,t)|_{x=\varphi(x_0,t_0,t)}$, $X'(x,t)$ indica la matriz $n \times n$ derivada de X respecto a x, con t fijo.

   b La condición inicial $\varphi'(x_0, t_0, t_0) = Id$.

3. Con la notación del ejercicio anterior:

   Probar que la función real $f(x_0, t_0, t) = \det(\varphi'(x_0, t_0, t))$, verifica

   a La ecuación diferencial $\dot{f} = a(t)f$, donde $a(t) =$ traza $J(t)$.

   b La condición inicial $f(x_0, t_0, t_0) = 1$

   Sugerencia: Si $A(t)$ es una matriz cuadrada cuyos términos son funciones derivables de t, entonces $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det A(t))$ es la suma de los determinanates de las matrices que se obtienen sustituyendo cada columna de A por su derivada. Si $A(t)$ verifica la ecuación diferencial $\dot{Y} = JY$, entonces cada columna de $A(t)$ verifica $\dot{y} = Jy$.

4. En $I\!R$ sean las ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x,t), \quad \dot{y} = g(y,t)$$

   con f y g continuas y lipchitzianas definidas en un mismo abierto $\Omega \subset I\!R \times I\!R$.

   Sean $\varphi(x_0, t_0, t)$ y $\psi(x_0, t_0, t)$ sus respectivas soluciones maximales.

a) Probar que si $f(x,t) > g(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega$, entonces

$$\varphi(x_0,t_0,t) > \psi(x_0,t_0,t) \quad \text{para todo } t > t_0$$
$$\varphi(x_0,t_0,t) < \psi(x_0,t_0,t) \quad \text{para todo } t < t_0$$

t tal que ambas soluciones estén definidas.

b) Probar que si $f(x,t) \geq g(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega$, entonces

$$\varphi(x_0,t_0,t) \geq \psi(x_0,t_0,t) \quad \text{para todo } t > t_0$$
$$\varphi(x_0,t_0,t) \leq \psi(x_0,t_0,t) \quad \text{para todo } t < t_0$$

t tal que ambas soluciones estén definidas.

(Sugerencia: Elegir $f_\lambda \to f$ tal que $f_\lambda > f$).

5. Investigar si es cierta la proposición siguiente:

Sea $u(t)$ una función real continua definida para $t \in [t_0, t_1]$ tal que:

$$u(t) \geq \alpha + \int_{t_0}^{t} k(s)u(s)\ \mathrm{d}s \geq 0$$

donde $k(s) \geq 0$ es continua para todo $s \in [t_0, t_1]$.

Entonces

$$u(t) \geq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} k(s)\ \mathrm{d}s\right), \qquad \text{para todo } t \in [t_0, t_1]$$

6. Sea $A(t)$ una matriz $n \times n$ que está definida para todo t real y depende continuamente de t. Sabiendo que $A(t)$ y $A(s)$ conmutan para todos t y s reales, probar que

$$e^{\int_0^t A(s)\,ds}$$

es la matriz principal del sistema $\dot{x} = A(t)x$. Sugerencia: Si $\dot{B}(t)B(t) = B(t)\dot{B}(t)$ para todo t, entonces la derivada de $e^{B(t)}$ es $\dot{B}e^{B(t)}$.

7. Sea $A(t)$ una matriz $n \times n$ que está definida para todo t real y depende continuamente de t.

a) Se define $\|A(t)\| = \sup\{\|Ax\| : x \in R^n, \|x\| = 1\}$. Demostrar que $\|A(.)\| : r \mapsto R$ es continua.

Sea $\dot{x} = A(t)x$.

b) Verificar que $\|x(t)\| \leq \|x(0)\| + \int_0^t \|A(s)\|\|x(s)\|\,ds$ para todo $t > 0$.

c) Probar que

$$\|x(t\| \leq \|x(0)\| e^{\int_0^t \|A(s)\|\,ds}$$

8. Se da $\dot{x} = A(t)x$, con $A : (a,b) \subset R \mapsto M^{n\times n}$. ¿Cuál es el intervalo maximal de las soluciones?

9. Demostrar que la matriz principal en t_0 de un sistema lineal $\dot{x} = A(t)x$ es única. (Se define por las condiciones $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ y $\Phi(t_0)$ igual a la identidad.