TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras.

Diciembre de 1997.

CAPITULO II
ECUACIONES DIFERENCIALES AUTONOMAS

Una ecuación diferencial ordinaria es *autónoma* si el segundo miembro es independiente de t, es decir, la ecuación es de la forma:

$$\dot{x} = X(x)$$

Dicho de otra forma, la velocidad $\dot{x}$ depende de la posición x, (y esta posición, aunque en forma desconocida, va variando en cada instante), pero la ley conocida X que da la velocidad en función de la posición, es la misma en todo instante t. La ley que gobierna el sistema es invariante en el tiempo.

Cualquier ecuación no autónoma $\dot{x} = X(x,t)$ puede llevarse a una ecuación autónoma en otro espacio. En efecto, haciendo el cambio de variables $y = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, se obtiene $\dot{y} = (X(y), 1) = Y(y)$.

1 Trayectorias u órbitas

Sea la ecuación autónoma

$$\dot{x} = X(x) \qquad X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

Ahora Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Si X es continua y lipschitziana, indicamos con I_{x_0,t_0} al intervalo maximal de la solución por (x_0, t_0), y, como antes, $\varphi_{x_0,t_0}(t)$ al valor en t de la solución maximal por (x_0, t_0), para cualquier $t \in I_{x_0,t_0}$. Se tiene $\varphi_{x_0,t_0}(t_0) = x_0$.

Proposición 1.1 *Cuando la ecuación es autónoma, se cumple*

$$I_{x_0,t_0} = t_0 + I_{x_0,0}$$

y para todo t en ese intervalo

$$\varphi_{x_0,t_0}(t) = \varphi_{x_0,0}(t - t_0)$$

Prueba: Sea $t \in t_0 + I_{x_0,0}$. Se cumple

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{x_0,0}(t-t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\varphi_{x_0,0}(t')\right|_{t'=t-t_0} = X\left(\varphi_{x_0,0}(t-t_0)\right)$$

porque $\varphi_{x_0,0}$ es solución de la ecuación diferencial.

Luego $\varphi_{x_0,0}(t-t_0)$, definida para $t \in t_0 + I_{x_0,0}$, verifica la ecuación diferencial. Además, en $t = t_0$ toma el valor $\varphi_{x_0,0}(0) = x_0$. Por la unicidad de la solución por (x_0, t_0) se tiene

$$\varphi_{x_0,0}(t-t_0) = \varphi_{x_0,t_0}(t)$$

y por definición de intervalo maximal $t_0 + I_{x_0,0} \subset I_{x_0,t_0}$.

Por otra parte $I_{x_0,0}$ es el intervalo maximal de $\varphi_{x_0,0}$. Para todo $t' \in -t_0 + I_{x_0,t_0}$, la función $\varphi_{x_0,t_0}(t'+t_0)$ verifica la ecuación diferencial y para $t' = 0$ toma el valor x_0. Por la definición de intervalo maximal $-t_0 + I_{x_0,t_0} \subset I_{x_0,0}$

■

Consecuencia:

La gráfica de la solución maximal por (x_0, t_0) se obtiene trasladando horizontalmente según t_0, la gráfica de la solución maximal por $(x_0, 0)$. Ver figura 1.

Denotamos con $\phi(x_0, t)$ a la solución maximal $\varphi_{x_0,0}(t)$ por $(x_0, 0)$, para todo $x \in \Omega, t \in I_{x_0,0}$, y a este intervalo maximal lo escribimos como $I_{x_0} = I_{x_0,0}$. Obsérvese que $\phi(x_0, 0) = x_0$.

En virtud de la proposición anterior, conociendo $\phi(x_0, t)$, es decir la solución maximal por $(x_0, 0)$ para cualquier $x_0 \in \Omega$, se conocen todas las soluciones maximales, ya que la que pasa por (x_0, t_0) es $\phi(x_0, t - t_0)$.

Proposición 1.2

$$\phi(x_0, t + t_0) = \phi\left(\phi(x_0, t_0), t\right)$$

para todo $x_0 \in \Omega$, para todo $t_0 \in I_{x_0}$ y para todo t tal que $t + t_0 \in I_{x_0}$.

Prueba: $\phi(x_0, t + t_0)$ es solución de la ecuación diferencial y para $t = 0$ toma el valor $\phi(x_0, t_0)$. Por la unicidad de la solución maximal es $\phi(\phi(x_0, t_0), t)$. ■

La solución maximal por $(x_0, 0)$ es $\phi(x_0, t)$. Hasta ahora nos referimos a la gráfica de la solución, es decir, a los puntos $(\phi(x_0, t), t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ para $t \in I_{x_0}$. Cuando el sistema es autónomo, suele representarse gráficamente la solución omitiendo la variable t, en lo que se llama trayectoria, u órbita.

Definición 1.3 Dado $x_0 \in \Omega$, se llama *trayectoria u órbita por x_0* a la curva paramétrica en $\mathbb{R}^n: \quad \phi(x_0, t), \quad t \in I_{x_0}$, con x_0 fijo, y t parámetro.

Mientras en la gráfica una coordenada indica el valor de la variable t, en la órbita esta variable no aparece. La órbita es una curva que se orienta según valores crecientes de t, pero del punto de la curva no puede deducirse en qué tiempo t se obtuvo.

También se llama trayectoria u órbita, por simplicidad, al conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ recorrido de la función $\phi(x_0, t)$ al variar t, con x_0 fijo.

La órbita es la proyección sobre $\mathbb{R}^n$ de la gráfica que está en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, proyectándola según el eje de los t.

La órbita por x_0 se denota como $o(x_0)$.

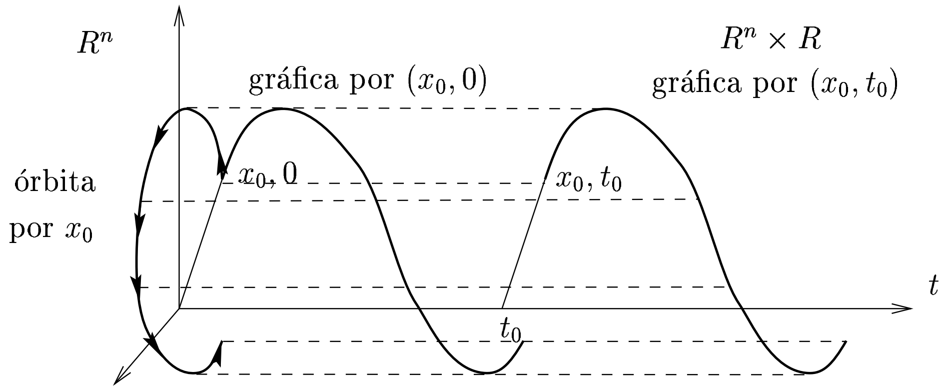

Figura 1: Gráficas de dos soluciones que se proyectan sobre la misma órbita

Teorema 1.4 *Si el sistema es autónomo, dos órbitas cualesquiera o bien son disjuntas o bien coinciden.*

Prueba: Si no son disjuntas, existen x_0, t_0, x_1, t_1 tales que $\phi(x_0, t_0) = \phi(x_1, t_1)$.

Debido a la proposición 1.2, se tiene

$$\phi(x_0, t) = \phi(\phi(x_0, t_0), t - t_0) = \phi(\phi(x_1, t_1), t - t_0) = \phi(x_1, t_1 - t_0 + t)$$

Luego, todo punto de la órbita por x_0 es punto de la órbita por x_1. Simétricamente, todo punto de la órbita por x_1 es punto de la órbita por x_0. ■

Definición 1.5 Se llama *flujo, o sistema dinámico* asociado a la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$, $\quad X : \Omega$ abierto de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, a la familia de órbitas por los puntos $x_0 \in \Omega$.

Nota: Dada la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$, la velocidad $\dot{x}$, es el vector tangente a la órbita $x = x(t)$. Es decir, sin resolver la ecuación, conocemos, por cada punto del espacio x, el vector tangente $X(x)$ a las órbita. Resolver la ecuación equivale a encontrar las órbitas, o sea, a encontrar las curvas en el espacio que son tangentes al vector dado $X(x)$ por cada punto x por donde pasan.

Muchas veces esta observación permite, sin resolver la ecuación diferencial, tener los datos cualitativos sobre el comportamiento de sus soluciones. Por ejemplo, sin resolver la ecuación, dibújense las órbitas de la ecuación diferencial $\dot{x} = -x$ en $\mathbb{R}^2$. (Ver figura 2).

Por otro lado, dada una familia de curvas paramétricas diferenciables, tales que por cada punto x_0 de Ω pasa una y solo una curva de esta familia, existe una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$ que tiene a esa familia como sistema dinámico asociado. Basta elegir en cada $x \in \Omega$ un vector $X(x)$, tangente en x a la curva que pasa por x, orientado según el parámetro t creciente. (No resulta necesariamente $X(x)$ continua y menos lipschitziana). Algunas veces, para suministrar ejemplos, en vez de dar explicitamente la ecuación diferencial, daremos el "dibujo"de su flujo asociado.

Nota: Debido al teorema de Picard, por todo punto de Ω pasa alguna órbita. Debido al teorema 1.4, pasa una sola órbita por cada punto. El flujo es tal que dos órbitas distintas no se cortan.

Nótese que si $\phi(x_0, t) =$ constante, para todo t, entonces la órbita por x_0 se reduce al punto x_0. Por ejemplo la ecuación diferencial $\dot{x} = -x$, en $\mathbb{R}^2$, tiene como flujo asociado, el sistema de órbitas formado por el punto $(0, 0)$, y las semirrectas *abiertas* , con extremo en $(0, 0)$, que se recorren, para t creciente, acercándose a $(0, 0)$ sin alcanzarlo nunca.

2 Ecuaciones diferenciales en superficies

Vimos que dar la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es dar en cada punto $x \in \Omega$ el vector $X(x) \in \mathbb{R}^n$. Esta función X se llama *campo* en Ω. El flujo asociado es el sistema de curvas (órbitas) tangentes al campo dado X en cada punto x por donde pasan.

Veamos cómo este concepto se puede extender a superficies S contenidas en $\mathbb{R}^n$, en lugar de abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. En muchos ejemplos de aplicación práctica, el espacio de fases no es todo R^n, ni un abierto Ω de R^n, sino ciertos subconjuntos de R^n, no abiertos, con una estructura geométrica. Por ejemplo: una superficie esférica, o cilíndrica, o un toro, u otros objetos geométricos de dimensión $k \leq n$ contenidos en $\mathbb{R}^n$, llamados *variedades* .

Primero veamos la definición de superficie encajada en $\mathbb{R}^n$. Nos basaremos en la existencia de ciertas transformaciones (parametrizaciones de dos parámetros) diferenciables. Recordemos que para definir diferenciabilidad de una transformación de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, en un punto $x \in \mathbb{R}^n$, se requiere poder calcular incrementos de la transformación al variar x según cualquier dirección en $\mathbb{R}^n$. Para ello se necesita que la transformación *esté definida en un entorno abierto alrededor de x en $\mathbb{R}^n$.*

En la definición de superficie que daremos a continuación se pedirá que una transformación h^{-1} definida en un subconjunto $S \cap H$ de $\mathbb{R}^n$ sea diferenciable. Pero $S \cap H$ no es abierto en $\mathbb{R}^n$. ¿Cómo se entiende entonces la diferenciabilidad de h^{-1}? Convenimos en que es diferenciable si existe un abierto V de $\mathbb{R}^n$ que contiene a $S \cap H$, y una función g definida en V, diferenciable, que coincide con h^{-1} cuando se la restringe a $S \cap H$.

Definición 2.1 Un *superficie* S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, tal que cada punto $x_0 \in S$ está contenido en un *abierto* $H \subset \mathbb{R}^n$, que intersectado con S es *difeomorfo* a un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$. ($H \cap S$ es difeomorfo a Ω si existe una función $h : \Omega \mapsto H \cap S$ diferenciable, invertible y con inversa diferenciable).

Nótese que h está definido en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$. Es entonces una función de dos variables reales, que asigna, a cada valor de estas variables, un punto de la superficie. Al mover las dos variables reales en Ω se recorren todos los puntos de la superficie S que están en un entorno H de x_0.

La función h se llama *parametrización para el punto x_0*. Puede suceder que alcance una sola parametrización para cubrir toda la superficie S, pero lo común es que se necesiten varios entornos H, y por lo tanto varias parametrizaciones.

Por ejemplo, la esfera y el toro son superficies en $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.2 Una superficie S es de clase C^r si existe, para cada punto de la superficie, alguna parametrización h tal que h y su inversa h^{-1} tienen derivadas continuas hasta orden r.

Subespacio tangente: Sea una curva paramétrica $x = x(t), \quad t \in I$, intervalo abierto de $\mathbb{R}$, contenida en la superficie, es decir $x(t) \in S$ para todo $t \in I$. Sea $t_0 \in I$. El vector $\dot{x}(t_0)$ de $\mathbb{R}^n$ es tangente a la curva en el punto $x_0 = x(t_0)$. Decimos que un vector de $\mathbb{R}^n$ es *tangente* a la superficie S en el punto x_0 si es tangente en x_0 a alguna curva contenida en la superficie. Se puede demostrar que *el conjunto de todos los vectores tangentes a la superficie S en el punto $x_0 \in S$ forman un subespacio vectorial de dimensión dos en $\mathbb{R}^n$.* Este espacio vectorial se denota como $T_{x_0}S$ y se llama *espacio tangente a S en el punto x_0.*

Por definición, para cada curva $x = x(t)$ contenida en S, se cumple $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}S$.

Definición 2.3 Se llama *campo en S* a una función X que a cada punto $x \in S$ le asigna un vector $X(x)$ del subespacio tangente a S en x. Es decir:

$$X(x) \in T_xS, \quad \text{para todo } x \in S$$

Definición 2.4 Una ecuación diferencial ordinaria autónoma en la superficie S es $\dot{x} = X(x)$, donde X es un campo en S.

Resolver la ecuación es hallar las funciones $x = x(t)$, definidas en intervalos abiertos $I \subset \mathbb{R}$, y que toma valores $x(t) \in S$, tales que $\dot{x}(t) = X(x(t))$ para todo $t \in I$. Esto es equivalente a hallar las curvas contenidas en S que son tangentes al campo dado X. Estas curvas son las *trayectorias u órbitas.* Ahora las trayectorias están contenidas en la superficie S. La familia de todas las trayectorias forman el *flujo* , o *sistema dinámico* , asociado a la ecuación diferencial en la superficie.

La unicidad y maximalidad de soluciones de la ecuación diferencial en la superficie S se definen como en el capítulo I.

Para poder enunciar el teorema de Picard en superficies, recordemos que el campo X en S, es, en particular, una función definida en $S \subset \mathbb{R}^n$ que toma valores en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.5 Se dice que X es lipchitziano globalmente en S si existe una constante $K > 0$ tal que

$$\|X(x_0) - X(x_1)\| \leq K\|x_0 - x_1\|, \quad \text{para todos } x_0, x_1 \in S$$

Se dice que X es lipschitziano en S, si para cada punto $x \in S$ existe un entorno $H \subset \mathbb{R}^n$ tal que X es lipschitziano globalmente en $S \cap H$.

Teorema 2.6 (Picard en superficies) *Si X es un campo continuo y lipschitziano en la superficie S de clase C^2, entonces existe, para cada $x_0 \in S$, y cada $t_0 \in \mathbb{R}$, una única solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x)$ que pasa por x_0 en $t = t_0$.*

Nota: El teorema es válido también si la superficie es sólo C^1.

Prueba: Consideremos una parametrización $h : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto S \cap H \subset \mathbb{R}^n$ de la superficie, en un entorno del punto $x_0 \in S$. A partir de una curva paramétrica $\beta(t)$ en Ω, puede definirse la curva contenida en la superficie $x(t) = h \circ \beta(t)$. Se cumple $\dot{x}(t) = \; \mathrm{d}h(\beta(t)) \cdot \beta'(t)$.

Entonces, $x(t)$ verifica la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x)$ en S, si y solo si $\beta(t)$ verifica la ecuación diferencial en $\Omega \subset I\!R^2$:

$$\beta'(t) = \mathrm{d}h(\beta(t))^{-1} \cdot X(h \circ \beta(t))$$

Esta es una ecuación de la forma $y' = Y(y)$ con $y \in \Omega$, $Y(y) = \mathrm{d}h(y)^{-1} \cdot X(h(y))$. Como h y $\mathrm{d}h^{-1}$ tienen derivadas continuas, porque S es de clase C^2, son lipschitzianas. La composición y el producto de funciones continuas y lipschitzianas son también continuas y lipschitzianas. Luego, la función Y es continua y lipschitziana.

Por el teorema de Picard en el abierto $\Omega \subset I\!R^2$, existe única solución de $\dot{y} = Y(y)$ por cada punto $y \in \Omega$. Aplicando h^{-1} se concluye que existe única solución de la ecuación diferencial dada en S, por cada punto $x_0 \in S$. ■

3 Ejemplos

Flujo polo norte-polo sur en la esfera

Sea S^2 la esfera de centro (0,0,0) y radio 1 en R^3. Para cada $p \in S^2$ sea $X(p)$ el vector tangente a la esfera en el punto p dado por

$$X(x, y, z) = (xz, yz, -(x^2 + y^2))$$

Obsérvese que $X(p)$ es ortogonal a $p - (0, 0, 0) = (x, y, z)$, y por eso es vector tangente a la esfera. Además la proyección de $X(p)$ sobre el plano $z = 0$ es $(xz, yz, 0) = z(x, y, 0)$. Esa proyección es radial, es decir, colineal con la proyección $(x, y, 0)$ de $p - (0, 0, 0) = (x, y, z)$ sobre el plano $z = 0$.

Entonces $X(p)$ es un vector tangente al meridiano de la esfera que pasa por el punto p (si $x^2 + y^2 \neq 0$). Las órbitas de la ecuación $\dot{p} = X(p)$ son el polo norte $(x = 0, y = 0, z = 1)$, el polo sur $(x = 0, y = 0, z = -1)$, y los meridianos de la esfera, orientados desde el polo norte hacia el polo sur.

Péndulo sin rozamiento

Sea la ecuación del péndulo sin rozamiento:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \sin\theta$$

con $\theta \in (-\pi, \pi]$ ángulo de desplazamiento del péndulo respecto a la vertical, y ω^2 constante positiva, que depende de la aceleración gravitatoria y de la longitud del péndulo.

Pasando a una ecuación de primer orden, queda:

$$\dot{\theta} = z, \quad \dot{z} = -\omega^2 \sin\theta$$

que es de la forma $\dot{p} = X(p)$ donde $p = (\theta, z)$, $X(p) = (z, -\omega^2 \sin\theta)$.

Tomemos en el espacio $(x, y, z) \in I\!R^3$ el cilindro $\mathcal{C}$, con sección la circunferencia del plano $z = 0$, de radio 1, y centro $(0, 0, 0)$, y generatrices verticales (paralelas al eje de las z). Cada punto del cilindro está identificado por dos coordenadas: z, y θ (el ángulo que forma el eje de las x con

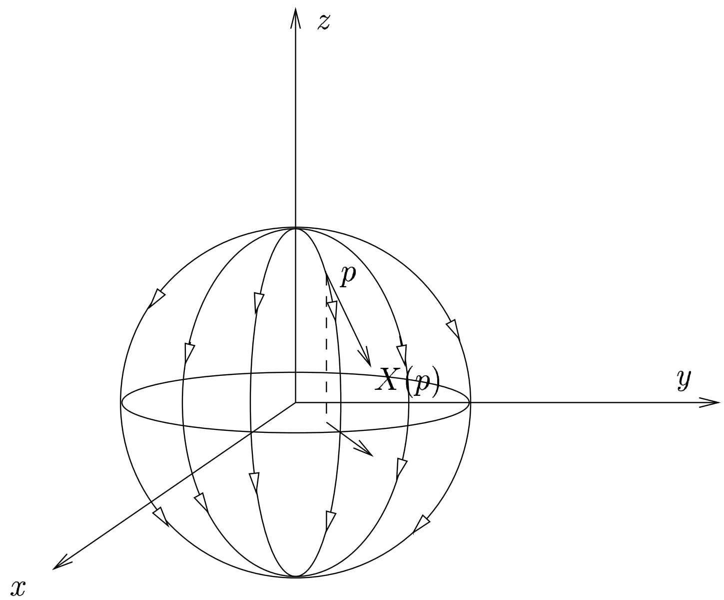

Figura 2: Flujo polo norte-polo sur en la esfera

el plano vertical que contiene a p), y recíprocamente, cada pareja (θ, z) da un punto de $\mathcal{C}$. Dicho de otra forma, el espacio de fases del péndulo es el cilindro $\mathcal{C}$.

Las órbitas de la ecuación diferencial $\dot{p} = X(p)$, son curvas contenidas en el cilindro $\mathcal{C}$. La componente $\dot{\theta}$ es la componente del campo X tangente a la sección circular del cilindro, y la componente $\dot{z}$ es según la generatriz vertical del cilindro.

Los puntos fijos en el cilindro, son las órbitas $p = p(t)$ constantes para todo t. Esto es $\dot{p} = 0$, o sea, $z = 0, \sin\theta = 0$. Esto da dos puntos fijos: $z = 0, \theta = 0$ y $z = 0, \theta = \pi$.

Estudiando el signo de $\dot{z}$ y de $\dot{\theta}$, y usando las simetrías de las ecuaciones respecto a z y a θ, pueden croquizarse las trayectorias sobre la superficie del cilindro, obteniendose el flujo según la figura.

Para ver que las órbitas cercanas al punto de equilibrio $\theta = 0, z = 0$ son curvas cerradas, basta observar que la cantidad $V(\theta, z) = z^2 - 2\omega^2 \cos\theta$ se conserva sobre las órbitas, y cuando el valor conservado es cercano a $-2\omega^2$, corresponde a la ecuación de una curva cerrada.

4 Ecuaciones diferenciales en variedades

Así como se han estudiado las ecuaciones diferenciales en superficies contenidas en $\mathbb{R}^n$, pueden definirse y estudiarse en otros objetos geométricos de dimensión $k \leq n$ contenidos en $\mathbb{R}^n$. Esto es útil cuando el espacio de fases tiene dimensión k y es un subconjunto del espacio euclideo n-dimensional.

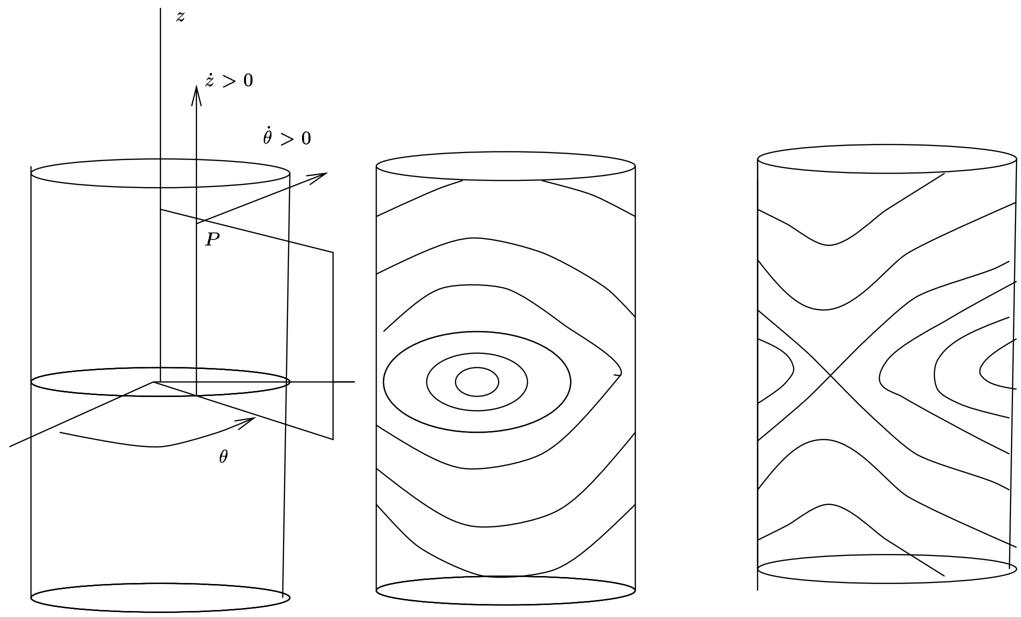

Figura 3: Espacio de fases para el péndulo sin rozamiento.

Definición 4.1 Una *variedad* encajada en $\mathbb{R}^n$, *de dimensión* $k \leq n$, es un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ tal que cada punto $x_0 \in S$ está contenido en un abierto H de $\mathbb{R}^n$, tal que $H \cap S$ es *difeomorfo* a un abierto $\Omega \in \mathbb{R}^k$. Es decir, existe $h : \Omega \subset \mathbb{R}^k \mapsto S \cap H \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable, invertible y con inversa diferenciable.

Las superficies son las variedades de dimensión dos.

Subespacio tangente:

Sea $x = x(t)$ una curva paramétrica contenida en la variedad S. El vector $\dot{x}(t)$ es tangente a la curva en el punto $x(t)$. Puede demostrarse que todos los vectores tangentes en x_0 a las curvas paramétricas contenidas en S que pasan por x_0, forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k. Este espacio vectorial se llama *espacio tangente a S en x_0*, y se denota como $T_{x_0}S$. Por construcción, si $x(t)$ está contenida en la variedad S, entonces $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}S$.

Definición 4.2 Un *campo* en la variedad S es una función que a cada punto x de S le hace corresponder un vector $X(x)$ del espacio tangente en x a S.

Dado un campo X en la variedad S, resolver la ecuación diferencial ordinaria $\dot{x} = X(x)$, es hallar todas las funciones $x = x(t)$, con $t \in I$, I intervalo abierto de $\mathbb{R}$, tales que $x(t) \in S$ y $\dot{x}(t) = X(x(t))$, para todo $t \in I$. Esto equivale a hallar todas las curvas contenidas en S que son tangentes, en cada punto x por donde pasan, al campo dado $X(x)$. Estas curvas son las *trayectorias u órbitas.* La familia de todas las órbitas es el *flujo, o sistema dinámico,* asociado a la ecuación diferencial.

El teorema de Picard vale para variedades S, con los mismos enunciado y prueba que en 2.6, sustituyendo la palabra superficie, por variedad.

EJERCICIOS

1. Sea en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < C_1, 0 < y < C_2\}$, el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1(C_1 - x)y - b_1 x \\ \dot{y} &= a_2(C_2 - y)x - b_2 y \end{aligned}$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, C_1, C_2$ son constantes reales positivas.

a) Graficar las órbitas en Ω, discutiendo según las constantes dadas.

b) Estas ecuaciones corresponden a un modelo de evolución de la gonorrea en una población de C_1 hombres y C_2 mujeres, con una tasa a_1 de contagio de hombres, una tasa a_2 de contagio de mujeres, una tasa b_1 de cura de hombres, y una tasa de cura b_2 de mujeres.

Según las gráficas de la parte a), ¿es posible erradicar la enfermedad?

2. Graficar las órbitas (orientándolas para t creciente) de la ecuación diferencial en $\mathbb{R}^2$:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (ax, by)$$

discutiendo según el signo de a y b.

3. Graficar las órbitas de la ecuación diferencial en $\mathbb{R}^2$:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (ax + y, ay)$$

discutiendo según el signo de a.

4. Graficar las órbitas en $\mathbb{R}^2$ de la ecuación diferencial:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (ax - by, bx + ay)$$

con $b \neq 0$, discutiendo según el signo de a.

5. Sea $\dot{x} = Ax$, donde $x \in \mathbb{R}^2$, y A es una matriz 2×2, de términos constantes reales.

Ver que existe un cambio de variables en $\mathbb{R}^2$, que lleva la ecuación dada a otra $\dot{z} = Bz$, comprendido en alguno de los casos de los tres ejercicios anteriores.