**TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES**

**Eleonora Catsigeras.**

**Octubre de 1998.**

# CAPITULO INTERMEDIO ENTRE II Y III
# SISTEMAS DINAMICOS

En este capítulo consideraremos propiedades topológicas generales de los sistemas dinámicos continuos. Estas propiedades serán, en particular, aplicables a la solución general $\phi(x,t)$ de una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$, con $X$ lipschitziana y continua, definida para cada $x$ en una variedad $M$ (que puede ser un abierto de $R^n$), después de una adecuada reparametrización. (Ver ejercicio 3)

## 1 Sistemas dinámicos en espacios topológicos

De ahora en adelante $M$ será un espacio topológico de Haussdorf con bases locales numerables.

Para quien no conozca qué es eso, digamos que es una generalización (mucho más general) abstracta de cualquier subconjunto $M$ del espacio euclídeo $R^n$, munido de la "topología" heredada de $R^n$. (Una topología en un conjunto $M$ es la familia de todos los subconjuntos abiertos en $M$.

Un subconjunto de $M$ es abierto en $M$ si es la intersección de un abierto de $R^n$ con $M$. Un entorno en $M$ de un punto $x$ de $M$ es un abierto en $M$ que contiene al punto $x$.

Que el espacio $M$ es topológico, quiere decir que está definida la familia de abiertos en $M$. Que es de Haussdorf quiere decir que dados dos puntos distintos de $M$ existen entornos de ellos disjuntos.

Que el espacio $M$ tiene bases locales numerables, quiere decir que dado un punto $p$ de $M$ existe una colección numerable de entornos de $p$ en $M$, $V_1(x) \supset V_2(x) \supset \ldots \supset V_i(x) \supset \ldots$ tales que cualquier otro entorno de $p$ en $M$ contiene a algún $V_i(p)$ de la colección. Si $M$ es un subconjunto de $R^n$, una base local numerable de entornos del punto $p$, en $M$ es la colección de bolas abiertas de centro $p$ y radio $1/n$, intersectadas con $M$, para todo $p$ natural mayor que cero.

Como caso particular $M$ puede ser una variedad de dimensión $k$ encajada en $R^n$, aunque su estructura diferenciable no será necesaria para desarrollar la teoría topológica de este capítulo.

**Definición 1.1** Una función $\phi : M \times R \mapsto M$ continua, es un *sistema dinámico de variable real,* o también *flujo* en $M$, si $\phi(p,0) = p$ para todo $p \in M$ y $\phi(p, t_1 + t_2) = \phi(\phi(p,t_1), t_2)$ para todos $t_1$ y $t_2$ reales, para todo $x \in M$.

**Observaciones**

1. Sea $t_1 \in M$ cualquiera.La función $\phi_{t_1} : M \mapsto M$ que se obtiene fijando $t = t_1$ en $\phi(p, t)$, *es un homeomorfismo* (esto es, es continua, invertible, y con inversa continua). En efecto $\phi_{t_1} \circ \phi_{-t_1} = \phi_{t_1 - t_1} = \phi_0 = Id$ y análogamente $\phi_{-t_1} \circ \phi_{t_1} = id$. La inversa de $\phi_{t_1}$ es $\phi_{-t_1}$.

2. Sea $p_0$ cualquiera. La función $\phi(p_0, \cdot) : R \mapsto M$ que se obtiene fijando $p = p_0$ en $\phi(p, t)$, es la parametrización de una curva continua orientada (según $t$ creciente), que se llama *órbita o trayectoria* de $p_0$. A veces también se llama *órbita* o *trayectoria* a la traza de esa curva, o sea al conjunto imagen de la función $\phi(p_0, \cdot)$, que denotaremos como $o(p_0)$.

$$o(p_0) = \{\phi(p_0, t) : t \in R\}$$

3. *Dos órbitas distintas no se intersectan,* pues si lo hicieran existiría $p_2 \in o(p_0 \cap o(p_1)$. Luego $p_2 = \phi(p_0, t_0) = \phi(p_1, t_1)$. Para todo $t$ real se cumple $\phi(p_0, t) = \phi(p_0, t_0 + t - t_0) = \phi(\phi(p_0, t_0), t - t_0) = \phi(p_2, t - t_0) = \phi((\phi(p_1, t_1), t - t_0) = \phi(p_1, t + t_1 - t_0)$. Entonces $o(p_0) \subset o(p_1)$. Simétricamente se cumple la inclusión opuesta, y entonces las órbitas coinciden.

4. *Si un punto $p_0$ es tal que existen $t_0 \neq t_1$ tales que $\phi(p_0, t_0) = \phi(p_0, t_1)$ entonces, o bien $p_0$ es un punto fijo del flujo* (es decir $\phi(p_0, t) = p_0$ para todo $t$, y $o(p_0) = \{p_0\}$), *o bien $p_0$ es periódico de período $T > 0$* (es decir $\phi(p_0, t + T) = \phi(p_0, t)$ para todo $t$ real, y $\phi(p_0, t) \neq p_0$ para todo $t$ que no sea múltiplo entero de $T$). En el caso que $p_0$ sea periódico la órbita por $p_0$ es una curva cerrada y recíprocamente.

   **Prueba:**

   Para demostrar la afirmación, (tomando $t_0 - t_1 \neq 0$ en lugar de $t_0$ y 0 en lugar de $t_1$), basta probar que si $\phi(p_0, t_0) = p_0$, con $t_0 \neq 0$ y $p_0$ no es un punto fijo, entonces es peródico con período $T > 0$. Sea
   $$G(t) = \{t \in R : \phi(p_0, t) = p_0\}$$

   (a) $0 \in G$

   (b) Si $t_1$ y $t_2$ pertenecen a $G$ entonces $t_1 + t_2$ también.
   Esto es porque $\phi(p_0, t_1 + t_2) = \phi(\phi(p_0, t_1), t_2) = \phi(p_0, t_2) = p_0$.

   (c) Si $t_1 \in G$ entonces $-t_1 \in G$.
   Esto es porque $p_0 = \phi(p_0, t_1 - t_1) = \phi(\phi(p_0, t_1), -t_1) = \phi(p_0, -t_1)$.
   Un subconjunto $G$ de reales que cumpla las propiedades a),b) y c), se llama *subgrupo* de reales.

   (d) Además $G$ es un conjunto *cerrado* de reales, pues si $t_n \in G$ es una sucesión de reales tal que $t_n \to \bar{t} \in R$, entonces $\bar{t} \in G$. En efecto, $\phi(p_0, t_n) = p_0$ para todo $n$. Haciendo $n \to \infty$, como la función $\phi$ es continua, se obtiene $\phi(p_0, \bar{t}) = p_0$.

   (e) El subgrupo $G$ es *no trivial,* (esto es: $G$ no es todo $R$ y no se reduce a $\{0\}$). En efecto, $G$ no es todo $R$ porque $p_0$ no es punto fijo. Además, por hipótesis $t_0 \neq 0$ y $\phi(p_0, t_0) = p_0$, lo que significa que $t_0 \in G$.

Todo lo anterior se resume en que $G$ es un subgrupo cerrado y no trivial de reales. Para terminar la prueba basta demostrar la siguiente afirmación:

*Todo subgrupo $G$ cerrado y no trivial de reales es el conjunto de múltiplos enteros de un cierto real $T > 0$.*

En efecto, sea $G^+ = \{T \in G : t > 0\}$. Como $G$ es no trivial, existe algún $g \in G$, con $g \neq 0$. Entonces $|g| \in G^+$ y $G^+$ es no vacío.

Sea $T = \inf G^+$.

$T > 0$ pues si fuera $T = 0$, existiría, para todo natural $n \geq 1$ un real $t_n \in G^+$ tal que $0 < t_n < 1/n$ (por definición de ínfimo). Sea para cada $x \in R$ y para cada $n \geq 1$ el número entero $\text{ent}(x/t_n)$ (parte entera de $x/t_n$). Se cumple que $0 \leq x/x_n - \text{ent}(x/t_n) < 1$. Multiplicando por $t_n$ se tiene $0 \leq x - t_n\text{ent}(x/t_n) < T_n < 1/n$. Entonces $t_n\text{ent}(x/t_n) \to_{n\to\infty} x$. Pero $t_n \in G$ siendo $G$ un subgrupo de reales, y $\text{ent}(x/t_n)$ es un número entero. Multiplicar por un número entero es sumar una cantidad natural de veces y eventualemtne tomar el opuesto del resultado. Entonces $\text{ent}(x/t_n) \in G$, y como tiende a $x$ y $G$ es cerrado, entonces $x \in G$. Luego, suponiendo que $T$ fuera igual a cero hemos llegado a que $G$ contiene a todo $x$ real, y $G$ sería trivial. Hemos probado que $T > 0$.

Por definición de ínfimo, existe $t_n \to T$ con $t_n \in G^+$. Pero $G$ es cerrado. entonces $T \in G$. Como $T > 0$, se tiene $T \in G^+$. Es decir $T$ es el m9́nimo de $G^+$.

Es inmediato que todos los múltiplos enteros de $T$ están en $G$, porque $T$ está en $G$ y $G$ es un subgrupo de reales. Veamos que $G$ no contiene otros reales. Sea $t \in G$. Tomando la parte entera de $t/T$, se obtiene $0 \leq T((t/T) - \text{ent}(t/T) < T$. Pero entonces tenemos el real $t - T\text{ent}(t/T)$ que es mayor o igual que cero, está en $G$ y es menor que el m9́nimo $T$ de $G^+$. Esto significa que ese real debe ser cero, o sea, $t$ es múltiplo de $T$. ∎

En lo que sigue $Z$ es el conjunto de los números enteros.

**Definición 1.2** Un *sistema dinámico de variable entera,* en $M$ es una sucesión bi-infinita de funciones $f_n : M \mapsto M$ continuas, una para cada $n \in Z$, tales que $f_0 = Id$ y $f_n \circ f_m = f_{n+m}$ para todos $n$ y $m$ enteros.

Dado un flujo, o sistema dinámico $\phi(p, t)$ en $M$ de variable real, se tiene un sistema dinámico de variable entera tomando $f_n(p) = \phi(p, n)$ para todo $n \in Z$. Sin embargo, no todo sistema dinámico de variable entera proviene de un flujo en el mismo espacio $M$ tomando los tiempos $t$ enteros.

**Observaciones:**

1. *$f_n$ es un homeomorfismo con inversa $f_{-n}$.*

2. Fijado $p_0$, la sucesión de puntos de $M$ definida como $p_n = f_n(p_0)$, para $n \in Z$ se llama *trayectoria* , u *órbita* de $p_0$. A veces también se llama trayectoria u órbita al conjunto de todos los puntos $p_n$.

$$o(p_0) = \{p \in M : p = f_n(p_0) \text{ para algún entero } n\}$$

3. *Dos trayectorias distintas no se intersectan.*

4. *Si para cierto punto $p_0$ existen enteros $n_0$ y $n_1$ diferentes tales que $f_{n_0}(p_0) = f_{n_1}(p_0)$, entonces, o bien $p_0$ es un punto fijo del sistema* (es decir, $f_n(p_0) = p_0$ para todo $n$ entero, y$o(p_0) = \{p_0\}$), *o bien $p_0$ es un punto peródico de período natural $N > 1$* (es decir, $f_{n+N}(p_0) = p_0$ para todo $n$ entero, y $f_n(p_0) \neq p_0$ si $n$ no es múltiplo entero de $N$).

   **Prueba:**

   $f_{n_0}(p_0) = f_{n_1}(p_0)$ implica que $f_{n_0-n_1}(p_0) = f{n_1}^{-1} \circ f_{n_0}(p_0) = p_0$. Como $n_1 \neq n_0$, y $p_0$ no es punto fijo, el conjunto $G = \{n \in Z : f_n(p_0) = p_0\}$ es no vacío, y diferente de todo $Z$. Tiene un mínimo natural positivo $N$ que no es uno.

   Se cumple $f_N(p_0) = p_0$, y para todo $n$ entero $f_{n+N}(p_0) = f_n \circ f_N(p_0) = f_n(p_0)$.

   Es inmediato que $G$ contiene a todos los múltiplos enteros de $N$. Ahora veamos que coincide con el conjunto de los múltiplos enteros de $N$. Dado $n\ inG$, haciendo la división entera entre $N$, se tiene $n = mN + r$ con $0 \leq r < N$. Siendo $p_0 = f_n(p_0) = f_r \circ f_{mN}(p_0) = f_r(p_0)$ se tiene que $r \in G$ y es no negativo, menor que el mínimo natural positivo $N$ de $G$. Esto implica que $r = 0$. ■

**Definición 1.3** Dado un homeomorfismo $f : M \in M$, se llama *sistema dinámico por iterados de $f$* al definido mediante

$$\begin{array}{lcll} f_n & = & f \circ f \circ \ldots \circ f & n \text{ veces}, \quad \text{si } n > 0 \\ f_n & = & f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1} & |n| \text{ veces}, \quad \text{si } n < 0 \\ f_0 & = & Id & \end{array}$$

Se usa la notación $f^n$ para indicar la composición de $f$ consigo misma $n$ veces, si $n$ es natural, y la inversa de la compuesta de $f$ consigo misma $|n|$ veces, si $n$ es entero negativo.

**Observaciones**

Todo sistema dinámico con parámetro entero es obtenido por iterados de un homeomorfismo $f$ (ver ejercicio 4). Por eso se identifica el sistema dando simplemente la transformación $f : M \mapsto M$ continua, invertible y con inversa continua.

Si $\phi(p,t)$ es un flujo, entonces tiene asociado un sistema dinámico de variable entera, por iterados de $\phi(\cdot, 1)$ (la transformación de tiempo uno). El recíproco no es cierto: no todo sistema dinámico de variable entera, es obtendio por iterados de la transformación de tiempo uno de un flujo, *en el mismo espacio $M$* (ver ejercicio 5). Pero sí puede darse una versión que requiere agrandar el espacio (ver ejercicio 6): todo sistema dinámico de variable entera es el sistema dinámico por iterados de la transformación de tiempo uno de un flujo, en un espacio $M'$ que contiene a $M$, llamado *suspensión.*

Dada una ecuación diferencial autónoma $\dot{p} = X(p)$ en, por ejemplo una variedad $M$ de dimensión tres, (que puede ser un abierto de $R^3$), considérese su flujo asociado $\phi(p,t)$. Supóngase que existe, contenida en $M$, una superficie compacta $S$ tal que para todo $p \in S$ hay un tiempo $T_p > 0$ en que la órbita por $p$ vuelve a estar en $S$, es decir $\phi(p, T_p) \in S$. Considérese la función $f : S \mapsto S$ definida por $f(p) = \phi(p, T_p)$. Bajo ciertas condiciones hipotéticas, $f$ resulta continua. (Por ejemplo si el campo $X$ de la ecuación diferencial autónoma es transversal a la superficie $S$

en todos los puntos de $S$). La superficie $S$ se llama, en ese caso *sección de Poincaré del flujo,* y la transformación $f$ es el *mapa de Poncaré.* El mapa de Poncaré no tiene en general, nada que ver con la tranformación de tiempo uno del flujo, pero mejor que ella refleja propiedades topológicas del flujo. El sistema dinámico por iteradas del mapa de Poincaré $f$ tiene órbitas que son subconjuntos de puntos de las órbitas del flujo dado. Los puntos periódicos de $f$ (incluyendo los puntos fijos de $f$), corresponden a las órbitas periódicas del flujo que intersectan a la superficie $S$, y recíprocamente. En general, toda la teoría cualitativa topológica que desarrollaremos, es aplicable al flujo, pero pueden sacarse conclusiones estudiándolas solo referidas la mapa de Poncaré $f$. La estabilidad de las órbitas del flujo que intersectan a $S$ puede estudiarse trabajando con las trayectorias del mapa de Poincaré. Este tiene la ventaja frente a la transformación de tiempo uno, y frente al flujo mismo, que es una transformación en un espacio $S$ de dimensión menor que la del espacio $M$ donde está definido el flujo.

# 2 Omega y Alfa límites

Sea $\Phi(p,t)$ un sistema dinámico de variable real en el espacio $M$. (Sea $f$ un sistema dinámico de variable entera en el espacio $M$).

**Definición 2.1** Un subconjunto $A \subset M$ es *invariante* si $\phi(A,t) \subset A$ para todo $t \in R$ (respectivamente $f^n(A) \subset A$ para todo $n$ entero).

Se observa que $A \subset M$ es invariante si y solo si $\phi(A,t) = A$ para todo $t$ real (respectivamente $f(A) = A$ ). En efecto: $\phi(A,-t) \subset A$ para todo $t$ real, implica que $\phi(\phi(A,-t),t) \subset \phi(A,t)$ para todo $t$ real. Entonces $A = \phi(A,0) = \phi(\phi(A,-t),t) \subset \phi(A,t) \subset A$. Entonces $A = \phi(A,t)$ para todo $t$ real.

Los subconjuntos invariantes son aquellos que se mantienen incambiados en el tiempo. Se caracterizan porque, por definición, si contienen a un punto $p_0$ entonces contienen a toda la órbita de $p_0$

**Definición 2.2** Se llama *semiórbita positiva de $p_0$, o semitrayectoria positiva de $p_0$,* a la curva paramétrica orientada, dada por la función $\phi(p_0,\cdot) : [0,+\infty) \mapsto M$. A veces también se llama semiórbita positiva a la traza de esa curva, es decir al conjunto de puntos en $M$ dado por

$$o^+(p_0) = \{\phi(p_0,t) \text{ para algún } t \geq 0\}$$

En forma similar, para los sistemas dinámicos de variable entera, asociado a los iterados de $f : M \mapsto M$, se llama semitrayectoria positiva de $p_0$ a la sucesión de puntos $f^n(p_0)$ para $n \geq 0$ natural. A veces se llama semitrayectoria positiva al conjunto de puntos en $M$ dado por

$$o^+(p_0) = \{f^n(p_0) \text{ para algún natural } n \geq 0\}$$

Se define *semiórbita o semitrayectoria negativa* de $p_0$ de manera análoga, sustituyendo $t \geq 0$ por $t \leq 0$ (respectivamente $n \geq 0$ natural, por $n \leq 0$ entero). La semiórbita negativa de $p_0$ se denota como $o^-(p_0)$.

Sea ahora $\phi(p, t)$ un flujo en $M$, y $p_0$ un punto de $M$.

**Definición 2.3** Se llama $\omega-$*límite (omega-límite) de* $p_0$ al conjunto de puntos dado por:

$$\omega(p_0) = \{q \in M : \text{ Existe alguna sucesión de reales } t_n \to +\infty \text{ que cumple } \phi(p_0, t_n) \to_{n\to\infty} q\}$$

Se llama $\alpha-$*límite ( alfa-límite) de* $p_0$ al conjunto de puntos dado por:

$$\alpha(p_0) = \{q \in M : \text{ Existe alguna sucesión de reales } t_n \to -\infty \text{ que cumple } \phi(p_0, t_n) \to_{n\to\infty} q\}$$

El conjunto omega-límite de un punto tiene interés porque en sistemas provenientes de distintas ramas de la ciencia, puede interesar tanto el comportamiento transitorio (la órbita), como el comportamiento asintótico cuando el tiempo tiende a infinito. El conjunto omega-límite es el conjunto a donde se acerca, (lo alcance o no), la semiórbita positiva del punto. Digamos que es donde muere la órbita, si tiene algún sentido decir esto aún cuando la órbita dé infinitas vueltas, y no exista un punto límite de $\phi(p_0, t)$ cuando $t \to \infty$.

Puede suceder que alguna semiórbita positiva (y también alguna negativa) sea *densa* en el espacio (es decir se acerque tanto como se quiera, a cualquier punto del espacio). Esto significaría que el conjunto omega-límite correspondiente es todo el espacio.

Por ejemplo esto sucede en el llamado *flujo irracional del toro* . El toro es una superficie que se obtiene, por ejemplo girando una circunferencia generatriz alrededor de un eje que no la corta y que está en el mismo plano de la circunferencia generatriz (el toro es la superficie de una rueda de sección circular). Todo el toro menos la circunferencia generatriz y menos la circunferencia ortogonal con la generatriz de radio máximo, es homeomorfo a un cuadrado plano. (Dos conjuntos son homeomorfos cuando existe un homeomorfismo $h$ que lleva uno en el otro, es decir una tranformación $h$ continua, invertible con inversa continua).

Considérese en el cuadrado la función $\psi(x, t) = x + vt$, donde $v$ es un vector fijo cualquiera de pendiente irracional (tomando como ejes los lados del cuadrado), $x$ es un punto cualquiera del cuadrado y $t$ es un número real (tal que $\psi(x, t)$ pertenezca al cuadrado). Llévese por el homeomorfismo $h$ esta función $\psi$ a la superficie del toro. (Es decir dado $p$ en el toro, considérese $\phi(p, t) = h^{-1}(\psi(h(p), t))$. La función así definida puede extenderse continuamente para todo $t$ real y para todo $p$ del toro, y constituye un flujo, llamado flujo irracional (porque la pendiente del vector $v$ es irracional).

Las órbitas del flujo irracional son curvas que dan infinitas vueltas enrollándose por la superficie del toro, sin cerrarse nunca. Puede demostrarse que las semiórbitas positivas (y también las negativas) son densas en la superficie del toro. Por lo tanto, los conjuntos omega y alfa límites son toda la superficie del toro (ver ejercicio 12). Sin embargo cada órbita no es todo el toro.

**Observaciones**

1. Si la órbita por $p_0$ es peródica, o si $p_0$ es un punto fijo, entonces $\omega(p_0) = \alpha(p_0) = o(p_0) = o^+(p_0) = o^-(p_0)$.

2. $\omega(p_0) \subset \overline{o^+(p_0)} \subset \overline{\o(p_0)}$.

   $\alpha(p_0) \subset \overline{o^-(p_0)} \subset \overline{\o(p_0)}$.

   ($\overline{A}$ indica el conjunto clausura o adherencia de $A$, esto es la unión de $A$ con el conjunto de sus puntos de acumulación).

3. $\omega(\phi(p_0), t)) = \omega(p_0)$ para todo $t$ real.

   $\alpha(\phi(p_0), t)) = \alpha(p_0)$ para todo $t$ real.

   **Prueba** Si $q \in \omega(p_0)$ existe $t_n \to +\infty$ tal que $q = \lim_{n\to\infty} \phi(p_0, t_n)$. Fijado $t$ real, la sucesión $t_n - t$ también tiende a $+\infty$. Luego, $q = \lim_{n\to\infty} \phi(\phi(p_0, t), t_n - t) \in \omega(\phi(p_0, t))$.

   Lo anterior prueba que $\omega(p_0) \subset \omega(\phi(p_0, t))$ para todo resl $t$, y para todo punto $p_0$. En particular vale para $-t$ en lugar de $t$ y y para $\phi(p_0, t)$ en lugar de $p_0$. Se obtiene así la inclusión opuesta.

   En forma similar se demuestra la afirmación referente al conjunto $\alpha$- límite. ■

   Lo anterior dice que los conjuntos $\omega-$ límite y $\alpha-$ límite son inherentes a las órbitas, más que a los puntos. Es decir todos los puntos de una misma órbita tienen los mismos $\omega$-límite y $\alpha-$límite.

**Teorema 2.4** *Los conjuntos $\omega(p_0)$ y $\alpha(p_0)$ son invariantes y cerrados.*

**Prueba:** La invariancia de $\omega(p_0)$ se demuestra verificando que si $q \in \omega(p_0)$ entonces $\phi(q, t) \in \omega(p_0)$ para todo $t$ real. En efecto si $q = \lim_{n\to\infty} \phi(p_0, t_n)$ con $t_n \to +\infty$, entonces fijado $t$ real cualquiera $\phi(q, t) = \lim_{n\to\infty} \phi(\phi(p_0, t_n), t) = \lim \phi(p_0, t_n + t)$ con $t + t_n \to +\infty$. Luego $\phi(q, t) \in \omega(p_0)$ como se quería demostrar.

Para demostrar que $\omega(p_0)$ es cerrado, tomemos un punto de acumulación $r$ de $\omega(p_0)$ y probemos que $r \in \omega(p_0)$. En todo entorno $V$ de $r$ existe algún punto $q \in \omega(p_0)$, siendo entonces $q = \lim \phi(p_0, t_n)$ con $t_n \to +\infty$.

Como $q \in V$, y por la definición de límite, existe algún $T = t_n$ (para cierto $n$), que puede elegirse tan grande como se desee porque $t_n \to +\infty$, tal que $\phi(p_0, T) \in V$.

Sea $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_j \supset \ldots$ una base local numerable de entornos del punto $r$. Para cada uno de ellos elijamos $T_j$ de modo que $T_{j+1} > T_j$ y $\phi(p_0, T_j) \in V_j$. Entonces $\phi(p_0, T_j) \to_{j\to\infty} r$ con $T_j \to +\infty$. Es decir $r \in \omega(p_0)$.

Las afirmaciones para el conjunto alfa-límite se demuestran en forma similar. ■

**Definición 2.5** Sea un sistema dinámico con variable entera, definido por iterados de un homeomorfismo $f : M \mapsto M$. Sea $p_0$ un punto de $M$. Se llama *$\omega$-límite de $p_0$ (omega-límite de $p_0$)* al conjunto

$$\omega(p_0) = \{q \in M : \text{ Existe alguna sucesión de naturales } n_j \to \infty \text{ tal que } f^{n_j}(p_0) \to q\}$$

Se llama *$\alpha$-límite de $p_0$ (alfa-límite de $p_0$)* al conjunto

$$\alpha(p_0) = \{q \in M : \text{ Existe alguna sucesión de naturales } n_j \to \infty \text{ tal que } f^{-n_j}(p_0) \to q\}$$

Las observaciones y el teorema anteriores valen también para los conjuntos $\omega$ y $\alpha$- límite en sistemas dinámicos con variable entera (ver ejercicio 8).

En cambio, en el siguiente teorema, la afirmación sobre conexión vale exclusivamente para flujos, y no para la dinámica de iterados de $f$.

**Teorema 2.6** *Sea $\phi : M \times R \mapsto M$ un flujo en $M$. Sea $p_0$ un punto de $M$. Si la semiórbita positiva de $p_0$ tiene adherencia compacta, entonces el conjunto $\omega$-límite de $p_0$ es no vacío, compacto y conexo.*

*Análogamente si la semiórbita negativa de $p_0$ tiene adherencia compacta, entonces el conjunto $\alpha$-límite de $p_0$ es no vacío, compacto y conexo.*

**Prueba:** Recordemos las siguientes propiedades de los conjuntos compactos:

1. Una sucesión de puntos contenida en un conjunto compacto tiene siempre alguna subsucesión convergente a un punto del compacto.

2. Todo subconjunto cerrado contenido en uno compacto, es también compacto.

Se tiene $\phi(p_0, n) \in o^+(p_0) \subset \overline{o^+(p_0)}$ para todo $n$ natural. Tiene una subsucesión convergente: $\phi(p_0, n_j) \to_{j\to\infty} q$, con $n_j \to +\infty$. Por definición $q \in \omega(p_0)$, es decir, $\omega(p_0)$ es no vacío.

Como $\omega(p_0)$ es un conjunto cerrado contenido en $\overline{o^+(p_0)}$ que por hipótesis es compacto, es también compacto.

Recordemos la definición de conjunto conexo: un conjunto es *conexo* si no puede cubrirse con dos abiertos disjuntos que lo intersecten. Supongamos por absurdo que $A$ y $B$ son dos abiertos en $M$ disjuntos que intersectan a $\omega(p_0)$: $A \cup B \supset \omega(p_0)$, y existen puntos $q_1 \in A \cap \omega(p_0)$ y $q_2 \in B \cap \omega(p_0)$. Por lo tanto existen sucesiones de reales $t_n \to +\infty$ y $s_n \to +\infty$, tales que $q_1 = \lim \phi(p_0, t_n)$ y $q_2 = \lim \phi(p_0, s_n)$.

Tomando subsucesiones adecuadas de $t_n$ y $s_n$, puede suponerse que $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \ldots < t_n < s_n < t_{n+1} < s_{n+1} < \ldots$. Para todo $n \geq N$ se cumple que $\phi(p_0, t_n) \in A$ porque $A$ es un entorno del punto límite $q$. Análogamente $\phi(p_0, s_n) \in B$.

El arco de curva $\phi(p_0, t)$ con $t_n \leq t \leq s_n$ es conexo, entonces los abiertos disjuntos $A$ y $B$ que cortan a ese arco respectivamente en $\phi(p_0, t_n)$ y $\phi(p_0, s_n)$ no pueden cubrir al arco. Esto dice que existe algún punto $\phi(p_0, u_n)$ en el arco, que no está ni en $A$ ni en $B$.

Como $t_n < u_n < s_n$, tenemos que $u_n \to +\infty$.

Siendo $\phi(p_0, u_n)$ una sucesión de puntos contenida en el conjunto compacto $\overline{o^+(p_0)}$, existe una subsucesión convergente $\phi(p_0, u_{n_j}) \to_{j\to\infty} q$. Entonces $q \in \omega(p_0)$.

Por otro lado $\phi(p_0, u_{n_j})$ no pertenece a $A \cup B$, es decir pertenece al complemento de $A \cup B$. Como $A \cup B$ es abierto, su complemento es cerrado. El límite de una sucesión de puntos de un cerrado pertenece al mismo cerrado. Entonces $q$ está en el complemento de $A \cup B$. Es decir encontramos un punto de $\omega(p_0)$ que no está en $A \cup B$, y por lo tanto $A \cup B$ no cubre a $\omega(p_0)$ contra lo supuesto. ■

**Notas:**

1. El teorema, excepto la afirmación de que $\omega(p_0)$ es conexo, es cierto también para sistemas dinámicos de variable entera, con prácticamente la misma demostración.

2. La tesis de conexión del conjunto omega-límite no es cierta para sistemas dinámicos de variable entera (ver ejercicio 9).

3. Si $o^+(p_0)$ no es compacto, entonces $\omega(p_0)$ puede ser vacío, o ser no vacío pero no conexo (ver ejercicio 10).

4. En algunos espacios topológicos particulares (por ejemplo en subconjuntos de $R^n$), vale una especie de recíproco de este teorema: si $\omega(p_0)$ es compacto y no vacío, entonces $\overline{o^+(p_0)}$ es compacto, y además resulta ser $\omega(p_0)$ conexo (ver ejercicio 11).

**Bibliografía para este capítulo:**

J. SOTOMAYOR: Licoes de equacoes diferenciais ordinarias. Projeto Euclides. IMPA Rio de Janeiro.

NEMITSKII-STEPANOV: Qualitative theory of differential equations.

**EJERCICIOS**

1. Sea la ecuación diferencial no autónoma en $\Omega \subset R^n \times R$, abierto,

$$\dot{x} = X(x,t) \tag{1}$$

con $X$ continua y lipschitziana respecto a la variable $x$. Sea $\phi(x_0,t_0,t)$ la solución general. Considérese la función $Y : \Omega \mapsto R^{n+1}$ dada por $Y(x,\lambda) = (X(x,\lambda),1)$ para todo $(x,\lambda) \in \Omega$. Sea la ecuación diferencial autónoma $\dot{y} = Y(y)$ definida para $y \in \Omega$.

   (a) Probar que $Y$ es continua y lipschitziana. Sea $\psi(y_0,t)$ la solución de $\dot{y} = Y(y)$ tal que en $t = 0$ vale $y_0$. Siendo $y_0 = (x_0,\lambda_0) \in Omega \in R^n \times R$, probar que $\psi(y_0,t) = (\phi(x_0,\lambda_0,t+\lambda_0),t+\lambda_0)$

   (b) Probar que las gráficas en $\Omega$ de las soluciones $\phi(x_0,t_0,\lambda)$ de la ecuación diferencial no autónoma dada, son las órbitas de la ecuación diferencial autónoma en $y$.

2. (a) Sea $\dot{x} = X(x)$ con $X : \Omega \subset R^n \mapsto R^n$ continua y lipschitziana, $\Omega$ abierto de $R^n$, una ecuación diferencial autónoma. Sea $\varphi(x_0,t_0,t)$ la solución por $(t_0,x_0)$ para $t$ en su intervalo maximal. Probar que $\varphi(x_0,t_0,t) = \varphi(x_0,0,t-t_0)$ (para $t$ donde estén definidas). Se denotará como $\phi(p,t)$ a $\varphi(p,0,t)$.

   (b) Probar que si $\Omega = R^n$ y si $X$ es continua, lipschitziana, y acotada, entonces el intervalo maximal de las soluciones es $(-\infty,\infty)$ y que $\phi(p,t)$ es un sistema dinámico en $R^n$.

3. (a) Sea $a : \Omega \subset R^n \mapsto R$ una función siempre positiva, continua y lipschitziana, definida en el abierto $\Omega$ de $R^n$, y sea $X : \Omega \mapsto R^n$ un campo también continuo y lipschitziano, definido en el mismo $\Omega$. Se consideran las ecuaciones diferenciales autónomas $\dot{x} = X(x)$ y $\dot{y} = a(y)X(y)$. Probar que las órbitas de ambas, como conjuntos, coinciden. Sugerencia: Si $\phi(p,t)$ es la solución de la primera, y $\psi(p,s)$ la de la segunda, entonces tomar $t(p,u) = \int_0^u a(\psi(p,s))\, ds$ y verificar que es una reparametrización que hace $\psi(p,u) = \phi(p, t(p,u))$.

   (b) Demostrar que las órbitas de cualquier ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = X(x)$ con $X$ continua y lipschitziana en todo $I\!R^n$, coinciden como conjuntos, (y como curvas orientadas) con las órbitas de un sistema dinámico de variable real en $R^n$. (Sugerencia: considerar la ecuación $\dot{x} = X(x)/(1 + \|X(x)\|)$ y el ejercicio 2 parte b).

   (c) Demostrar lo mismo que en la parte anterior pero cuando $X$ está definida solo en un abierto $\Omega \subset R^n$ diferente de todo $R^n$. Sugerencia: Considerar $a(x) =$ distancia de $x$ al complemento de $\Omega$, y la ecuación diferencial $\dot{x} = a(x)X(x)/(1 + a(x)\|X(x)\|)$ que tiene soluciones definidas en el intervalo maximal $(-\infty, +\infty)$.

4. Probar que todo sistema dinámico de variable entera es un sistema dinámico por iterados de un homeomorfismo $f$.

5. (a) Probar que si $\phi(p,t)$ es un sistema dinámico de parámetro real, entonces $f_n = \phi(p,n)$ es un sistema dinámico por iterados de la transformación $f$ de tiempo uno, definida por $f(p) = \phi(p,1)$.

   (b) Mostrar que existe algún sistema dinámico de variable entera, en algún espacio $M$, que no se obtiene por iteración de la transformación de tiempo uno de ningún flujo en $M$.(Sugerencia: simetría axial en $R^2$).

6. Sea $f$ un homeomorfismo en un espacio $M$. Se considera el espacio producto $M \times R$, y en él la siguiente relación de equivalencia: Dados $(p,s)$ y $(p',s')$ en $M \times R$: diremos que $(p,s)$ es equivalente a $(p',s')$ si $s' - s$ es un número entero, y si $f^{s'-s}(p) = p'$.

   (a) Probar que es una relación de equivalencia

   (b) Sea $\tilde{M}$ el espacio cociente de $M$ por la relación de equivalencia dada. (Los elementos de $\tilde{M}$ son las clases de euivalencia en $M \times R$, que se indican como $[p,s]$, siendo $(p,s)$ un representante de la clase. Es entorno de $[p_0, s_0]$ entre otros, por definición, el conjunto de todos los $[p,s]$ obtenidos de tomar $p$ en un entorno de $p_0$ en $M$, y $s$ en un entorno de $s_0$ en $R$.

   $\tilde{M}$ se llama *espacio suspensión* de $M$ en realción al homeomorfismo $f$. Sea en $\tilde{M}$ el siguiente flujo: $\phi([p,s],t) = [p, t+s]$.

   Demostrar que está bien definido, y que es un flujo en $\tilde{M}$.

   (c) Sea $[p,s] \in \tilde{M}$. Probar que si $s$ es entero, entonces existe un único $p' \in M$ tal que $[p',0] = [p,s]$ en $\tilde{M}$. Probar que para todo $[p,s]$ en $\tilde{M}$, existe una única pareja $(p',s') \in M \times R$ con $0 \leq s' < 1$ y tal que $[p,s] = [p'.s']$ en $\tilde{M}$.

(d) Sea $M_{s_0} = \{[p,s] \in \tilde{M} : s - s_0$ es entero $\}$ definido para cada $s_0$ fijo de $[0, 10 \subset R$. Sea $\Pi : M_0 \mapsto M$ definida por $\Pi([p,0]) = p$. Probar que $\Pi$ es un homeomorfismo. Probar que $f : M \mapsto M$ se obtiene como $f(p) = \pi \circ \phi([p,0], 1)$ para todo $p \in M$.

(e) Concluir que todo sistema dinámico de variable entera en $M$ se obtiene, a menos de homeomorfismo, como la transformación de tiempo uno de un flujo, definido en otro espacio $tildeM$ que contiene a $M$ (mejor dicho, a una copia homeomorfa $M_0$ de $M$).

(f) Sea $M$ un intervalo de $R$, $f : M \mapsto M$ la simetría central respecto al punto medio del intervalo. Describir la suspensión $\tilde{M}$ de $M$ respecto a $f$. Describir $M_0$, y el flujo $\phi$ en $\tilde{M}$. Sugerencia: es un flujo en una banda de Moebius).

(g) Idem parte anterior para $M$ una circunferencia, con $f$ la simetría axial respecto a un diámetro. (Sugerencia: $tildeM$ es la botella de Klein).

7. Sea $M$ un espacio métrico (dotado de una distancia $d$ entre dos puntos cualesquiera).

   (a) Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo. Probar que dados $p_0 \in M$, $\epsilon > 0$, y dados $k \leq N$, números enteros, existe $\delta > 0$ tal que si $d(p_0, p) < \delta$ y si $k \leq n \leq N$, entonces $d(f^n(p_0), f^n(p)) < \epsilon$.

   (b) Sea $\phi(p,t)$ un flujo en $M$. Probar que dados $p_0 \in M$, $\epsilon > 0$, y dados $T \leq S$ reales, existe $\delta$ tal que, si $d(p_0, p) < \delta$ y si $T \leq t \leq S$ entonces $d(\phi(p,t), \phi(p_0,t)) < \epsilon$.

   (c) Probar que si $M$ es compacto, se puede elegir $\delta$ en las partes anteriores, independiente de $p_0$.

8. Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo y $p_0 \in M$.

   (a) Probar que $\alpha(p_0)$ y $\omega(p_0)$ son invariantes por $f$.

   (b) Probar que $\alpha(p_0) = \alpha(f^n(p_0))$ y que $\omega(p_o) = \omega(f^n(p_0))$ para todo $n$ entero.

   (c) Probar que los conjuntos omega y alfa-límites son cerrados en $M$.

9. Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo y $p_0 \in M$.

   (a) Probar que si la adherencia de la semiórbita positiva por $p_0$ es compacta entonces el conjunto omega-límite de $p_0$ es no vacío y compacto.

   (b) Probar que en las hipótesis de la parte anterior, el conjunto omega-límite no puede descomponerse en dos partes disjuntas, compactas, no vacías e invariantes.

   (c) encontrar algún ejemplo en que $\overline{o^+(p_0)}$ sea compacto y $\omega(p_0)$ sea no conexo.

10. (a) Dibujar esquemáticamente las órbitas y los conjuntos omega y alfa límites del sistema dinámico asociado a la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

      i. $\dot{p} = X(p)$ donde $X : R^2 \mapsto R^2$ está dada por

$$X(x,y) = (-y + (1-\rho)x, x + (1-\rho)y) \quad \text{donde } \rho(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

      Sugerencia: en coordenadas polares queda $\dot{\rho} = (1-\rho)\rho$, $\dot{\varphi} = 1$.

ii. En $M = \{(x,y) \in R^2 : |y| < 1\}$ sea la ecuación diferencial $(\dot{x}, \dot{y}) = (1-y^2)X(x,y)$, donde $X$ es la función definida en la parte anterior.

(b) Sea $h : M \mapsto R^2$, donde $M$ es el cuadrado de la última parte anterior, y $h(x,y) = (x, y/(1-y^2))$. Probar que es un homeomorfismo. Sea $\psi(x_0, y_0, t) = h(\phi(h^{-1}(x_0, y_0), t)$, donde $phi(p_0, t)$ es la solución general de la última ecuación de la parte a). Verificar que $\psi$ es un sistema dinámico en $R^2$. Dibujar esquemáticamente las órbitas, ylos conjuntos alfa y omega-límites.

11. (a) En $R^m$ sea $\phi(p,t)$ un sistema dinámico de variable real $t$ y sea $p_0 \in R^m$. Probar que $\omega(p_0)$ es compacto y no vacío si y solo si la semiórbita positiva de $p_0$ tiene adherencia compacta. (sugerencia: $\omega(p_0)$ compacto y no vacío, está contenido en algún abierto $U$ acotado, con adherencia compacta. Si la semiórbita no tuviera adherencia compacta, existiría $t_n \to +\infty$ tal que $\phi(p_0, t_n)$ tiende a un punto del borde de $U$.

    (b) Probar lo mismo que en la parte anterior para un sistema dinámcio por iterados de un hoemomorfismo $f$ en $R^m$.

12. Probar que las órbitas del flujo irracional del toro no son curvas cerradas, y que las semiórbitas positivas y negativas son densas en el toro. Deducir que los conjuntos omega y alfa-límite son todo el toro. (Sugerencia: tomar como sección de Poincaré una circunferencia generatriz del toro, ver que la tranformación de Poincaré es una rotación de ángulo irracional. Identificar cada punto de la circunferencia con un número complejo $e^{2\pi i x}$ de módulo 1 y observar que el mapa de Poincaré se puede traducir como $f(x) = x + a$ con $a$ real fijo irracional. Ver que si se demuestra lo que se pide para la órbita por el punto que corresponde a $x = 0$, entonces vale para cualquier otra órbita. No existen $n$ y $m$ enteros tales que $f^n(0) = m$, entonces la órbita por 0 no es cerrada. Además, el conjunto de complejos $\{e^{2n\pi i a} : n \text{ natural }\}$ es denso en la circunferencia y entonces la semiórbita positiva es densa en el toro.)

13. Sean $M$ y $N$ dos espacios topológicos homeomorfos entre sí. Y sean $f : M \mapsto M$ y $g : N \mapsto N$ dos homeomorfismos. Se dice que $f$ y $g$ son *conjugados* si existe un homeomorfismo $h : N \mapsto M$, llamada *conjugación* , tal que $h \circ g = f \circ h$.

    (a) Verificar que $h(o_g(p_0)) = o_f(h(p_0))$, $h(\omega(p_0)) = \omega(h(p_0))$, y que $p_0$ es periódico sefún $g$ si y solo si $h(p_0)$ lo es según $f$.

    (b) Verificar que la conjugación es una relación de equivalencia en el conjunto de los homeomorfismos de $M$ en $M$.

14. Sean $M$ y $N$ espacios topológicos y sean $f : M \mapsto M$ y $G : N \mapsto N$ homeomorfismos. Se dice que $f$ es *semiconjugado* con $g$ si existe una función $h : N \mapsto M$ llamada *semiconjugación* , tal que es continua, sobreyectiva, y cumple $f \circ h = h \circ g$

    (a) Verificar que $h(o_g(p_0)) = o_f(h(p_0))$, que $h(\omega(p_0)) \subset \omega(h(p_0))$ (¿vale la igualdad?), y que $p_0$ es periódico según $g$ implica que $h(p_0)$ es periódico según $f$.

(b) Se considera en $N$ la relación de equivalencia $p$ es equivalente a $q$ si $h(p) = h(q)$. Sea $\tilde{N}$ el espacio cociente (cuyos elementos son las clases de equivalencia $[p]$ cada una representada por algún $p$ de $N$). Sea $\tilde{g} : \tilde{N} \mapsto \tilde{N}$, definida por $\tilde{g}([p]) = [g(p)]$. Verificar que $\tilde{g}$ está bien definida (es decir no depende de la elección del representante $p$ en la clase de equivalencia $[p]$). ¿ Es $\tilde{h}$ un homeomorfismo en $\tilde{N}$. ¿Es $\tilde{h}$ conjugado a $f$? (Sugerencia: ver si $\tilde{h} : \tilde{N} \mapsto M$ dada por $\tilde{h}([p]) = h(p)$ es una conjugación).

15. Sean $M$ y $N$ espacios topológicos homeomorfos, y sean $\phi : M \times R \mapsto M$ y $\psi : N \times R \mapsto N$ sistemas dinámicos. Se dice que son conjugados si existe un homeomorfismo $h : N \mapsto M$ llamado conjugación, tal que

$$h \circ \psi(p_0, t) = \phi(h(p_0), t) \qquad \text{para todos } p_0 \in N,\ t \in R$$

Se dice que son equivalentes topológicamente si existe un homeomorfismo : $N \mapsto M$ y una función continua $s : N \times R \mapsto R$, llamada reparametrización, tales que:

$$s(p_0, \cdot) : R \mapsto R \quad \text{es biyectiva y monótona creciente}$$

$$\phi(h(p_0), t) = h(\psi(p_0), s(p_0, t)) \quad \text{para todos } p_0 \in N, t \in R$$

(a) Probar que si son conjugados, entonces son equivalentes topológicamente, y que si son equivalentes entonces $o_\phi(h(p_0)) = h(o_\psi(p_0))$, y $\omega(h(p_0)) = h(\omega(p_0))$, para todo $p_0 \in N$.

(b) Probar que dado un sistema dinámico $\phi$ en $M$, siempre existe uno $\psi$ que sea conjugado con $\phi$, en un espacio homeomorfo a $M$.

(c) Probar que dado un sistema dinámico $\phi$ en $M$, dado un esapcio $N$ homeomorfo a $M$, y dada una función $t : M \times R \mapsto R$, continua, biyectiva y creciente en $t$, y tal que

$$t(q_0, s_1 + s_2) = t(q_0, s_1) + t(\phi(q_0, t(q_0, s_1), s_2)$$

para todos $s_1$ y $s_2$ en $R$, y para todo $q_0 \in M$, entonces existe un sistema dinámico $\psi$ en $N$ que es equivalente topológicamente con $\phi$ con reparametrización $t$.

(d) Probar que las reparametrizaciones uniformes, (esto es, que no dependen de $p_0$) de sistemas dinámicos que tienen algún punto no fijo ni periódico, son las lineales $s(p_0, t) = kt$.