$b = 0,000\dots$ donde en el lugar 1 al 10 después de la coma hay un cero, en el lugar 11 está la primera cifra decimal de $y_1 + 1$. En los lugares 12 al 100 después de la coma hay ceros. En el lugar 101 está la primera cifra decimal de $x_1 + 1$. En los lugares 102 hasta 1000 hay ceros. En los lugares 1001 y 1002 están las dos primeras cifras de $y_2 + 1$, en los lugares 1003 hasta el 10^6 incluidos hay ceros. En los lugares $10^6 + 1$ y $10^6 + 2$ están las dos primeras cifras de $x_2 + 1$, etc. Veamos cómo seguir: se toma la sucesión siguiente:

$$h_1 = 1, h_2 = 3, \dots, h_{j+1} = 2h_j + 1, \dots$$

Las cifras de b después de la coma de las que no se diga nada son ceros.

La cifra en el lugar $10^{h_1} + 1$ es la primera cifra decimal de $y_1 + 1$. La cifra en el lugar $10^{2h_1} + 1$ es la primera cifra decimal de $x_1 + 1$.

Las dos cifras en los lugares $10^{h_2} + 1$ y el siguiente son las dos primeras cifras decimales de $y_2 + 1$. Las dos cifras en los lugares $10^{2h_2} + 1$ y el siguiente son las dos primeras cifras decimales de $x_2 + 1$.

Las tres cifras en los lugares del $10^{h_3} + 1$ al $10^{h_3} + 3$ son las tres primeras cifras decimales de $y_3 + 1$. Las tres cifras en los lugares del $10^{2h_3} + 1$ al $10^{2h_3} + 3$ son las tres primeras cifras decimales de $x_3 + 1$.

En general: Las j cifras en los lugares del $10^{h_j} + 1$ al $10^{h_j} + j$ son las j primeras cifras decimales de $y_j + 1$. Las j cifras en los lugares del $10^{2h_j} + 1$ al $10^{2h_j} + j$ son las j primeras cifras decimales de $x_j + 1$.

Dado $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ y dado $\delta > 0$, elijamos $N > 1$ tal que $1/10^N < \delta/8$, y luego elijamos (x_j, y_j) con $j > N$ tal que $|x - x_j| < \delta/4$ y también $|y - y_j| < \delta/4$.

Basta probar que existen n, h, k enteros tales que $|n^2b - x_j + h| < \delta/4$ y $|nb - y_j + k| < \delta/4$.

Sea $n = 10^{h_j}$. Se cumple $nb - y_j = b10^{h_j} - y_j$ tiene parte decimal con todos ceros en las primeras $j - 1$ cifras. A continuación hay o bien un cero, o bien un uno:

$$\text{dec}(nb - y_j) < \frac{2}{10^j} < \frac{2}{10^N} < \frac{\delta}{4}$$

Además $n^2b - x_j = 10^{2h_j}b - x_j$ tiene ceros en las primeras $j - 1$ cifras, y a continuación tiene un cero o un uno:

$$\text{dec}(n^2b - x_j) < \frac{2}{10^j} < \frac{2}{10^N} < \frac{\delta}{4}$$

como se quería.

Elijamos (b, b) tal que $\{f^n(0, 0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sea densa en T^2 .

ii) Probemos que $o(\phi(a, 0))$ es densa en T^2 . El número a es real cualquiera.

$$f^n(\pi(a, 0)) = \pi(A^n(a, 0) + \sum_{i=0}^{n-1} A^i(b, b)) = \pi \begin{bmatrix} a + n^2b \\ nb \end{bmatrix}$$

TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras.

Octubre de 1998.

CAPITULO IV DINAMICA TOPOLOGICA

EJERCICIOS

1. Probar que p es recurrente positivamente si y solo si para todo entorno U de p , existe $t > 1$ tal que $\phi(p, t) \in U$ (sugerencia: considerar entorno de p que no corte al arco $\{\phi(p, t) : 1 \leq t \leq T\}$).

Demostrar que el conjunto de los puntos recurrentes es invariante.

2. (a) Demostrar que si a es irracional el grupo

$$G = \{an + m \in \mathbb{R} : n, m \text{ enteros}\}$$

es denso en $\mathbb{R}$ y que el conjunto

$$H = \{an + m \in \mathbb{R} : n, m \text{ enteros con } n \geq N\}$$

es denso en $\mathbb{R}$ con N entero fijo.

- (b) Probar que el flujo irracional en el toro T^2 tiene todas las semiórbitas positivas y negativas densas.
 - (c) Probar que en el flujo irracional del toro todos los puntos son recurrentes.
3. Demostrar que los puntos recurrentes negativamente o positivamente son no errantes.
Sea en $\mathbb{R}^2$ el sistema dinámico ψ del ejercicio 10 del capítulo intermedio entre el II y III, parte b). Ver que tiene puntos no errantes que no son recurrentes.

4. Probar que el conjunto no errante es invariante.

Probar que los alfa y omega-límites de todos los puntos están contenidos en el no errante.

Buscar un ejemplo en que haya puntos no errantes que no estén en el alfa límite ni en el omega límite de ningún punto.

5. Sea $\dot{u} = F(u, v)$, $\dot{v} = F(u, v)a$ $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, con a irracional constante y $F(u, v) = \sin^2 2\pi u + \sin^2 2\pi v$.

Esa ecuación diferencial induce un sistema dinámico en el toro T^2 a través de la proyección $\pi : \mathbb{R}^2 \mapsto T^2$ como se vio en la sección 1 de este capítulo.

Sea $P^+ = \{p_0 \in T^2 : p_0 \text{ es recurrente positivamente}\}$

y sea $P^- = \{p_0 \in T^2 : p_0 \text{ es recurrente negativamente}\}$

Verificar que hay puntos en P^+ que no están en P^- y viceversa.

Probar que $P^+ \cap P^-$ es denso en el toro.

Probar que el conjunto no errante es todo el toro.

6. Sea K un compacto no vacío. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- K es minimal
 - $\omega(p) = K, \forall p \in K$
 - $\alpha(p) = K, \forall p \in K$

Probar que si K es minimal compacto, entonces todo punto de K es recurrente.

Encontrar un ejemplo en que haya un punto recurrente que no esté contenido en ningún minimal.

7. Dar ejemplos de:
- punto no errante que no esté en ningún alfa ni omega límite.
 - punto que esté en un omega-límite pero que no sea recurrente ni positivamente ni negativamente.
 - Punto que sea recurrente positivamente pero no negativamente.
 - Punto recurrente que no esté contenido en ningún minimal (ver ejercicio anterior).
8. Sea M un espacio topológico con base numerable $\{V_i\}$ de abiertos (esto significa que todo abierto del espacio se puede escribir como unión de algunos de los V_i , y que la familia de los V_i es numerable).

Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo.

Para cada V_i se define $V_i^* = V_i - \cup_{n \geq 0} f^{-n}(V_i)$.

Demostrar que $\cup_i V_i^*$ es el conjunto de los puntos que no son recurrentes positivamente.

9. Sea M un espacio topológico y ϕ un flujo en él. Se dice que un conjunto A es recurrente positivamente si dado T existe $t > T$ tal que $A \cap \phi(A, t) \neq \emptyset$. En forma similar se define conjunto recurrente negativamente.

(a) Probar que A es recurrente positivamente si y solo si lo es negativamente.

(b) Esta parte del ejercicio requiere conocer de teoría de la medida:

En M se define una σ -álgebra $\mathcal{A}$ y una medida μ . La medida es invariante si para todo $A \in \mathcal{A}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, se cumple $\phi(A, t) \in \mathcal{A}$ y $\mu(\phi(A, t)) = \mu(A)$.

Probar que si μ es una medida finita, entonces todo medible con medida positiva es recurrente (Teorema de recurrencia de Poincaré). si la medida es de Borel, ¿cómo es el conjunto no errante?

10. Demostrar que el conjunto de los puntos fuertemente recurrentes y el conjunto de los puntos uniformemente fuertemente recurrentes son invariantes.
11. demostrar que si $\overline{o(p)}$ es compacto, entonces p es fuertemente recurrente si y solo si p es uniformemente fuertemente recurrente. (Ver sugerencia en la sección 5 de este capítulo).
12. (a) Probar que si p es uniformemente fuertemente recurrente entonces $o(p)$ es totalmente acotado (Esto es: Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe una cantidad N finita de puntos $q_i \in o(p)$ tal que $o(p) \subset \cup_{i=1}^N B_\epsilon(q_i)$). Sugerencia: Si $q \in o(p)$ entonces la distancia de q a un cierto arco compacto es menor que ϵ .
- (b) Deducir que en un espacio métrico completo, si p es uniformemente fuertemente recurrente entonces la adherencia de la órbita por p es compacta. (Sugerencia: recordar que en espacios métricos, K es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado).
- (c) Demostrar la siguiente versión del teorema de birkhoff en espacios métricos completos: $\overline{o(p)}$ es minimal compacto si y solo si p es uniformemente fuertemente recurrente.

13. Demostrar que en un espacio métrico completo, si p es casi-periódico entonces $\overline{o(p)}$ es minimal compacto. (Sugerencia: usar el ejercicio anterior).

14. En el flujo irracional del toro (con pendiente a irracional) se probó que para todo $\epsilon > 0$ existen M y N enteros tales que $0 < aM + N < \epsilon$. Demostrar que para todo p_0 del toro el conjunto

$$\{\tau \in \mathbb{R} : \text{dist}(\phi(p_0, t + \tau), \phi(p_0, t)) < \epsilon\}$$

es N -denso. Deducir que todas las órbitas son casi periódicas.

15. En un espacio métrico M , sea $f : M \mapsto M$ homeomorfismo.

- Definir recurrencia, recurrencia fuerte, minimal, y casi periodicidad, para el sistema dinámico por iterados de f .
- demostrar que si $\overline{o(p)}$ es compacta entonces es minimal si y solo si p es fuertemente recurrente.
- Demostrar que un minimal compacto tiene todas sus órbitas casi periódicas si y solo si es estable Liapunov.

16. En $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ sea

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2} \left(-2by - axzr^{-1} - xr^{-1}(r-1)(w - \frac{1}{4}) \right) \\ \dot{y} &= \frac{1}{2} \left(2bx - ayzr^{-1} - yr^{-1}(r-1)(w - \frac{1}{4}) \right) \\ \dot{z} &= a(r-1) - z(w - \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

donde $r = x^2 + y^2$ y $w = (r-1)^2 + z^2$, y a y b son constantes reales tales que b/a es irracional.

Demostrar que la superficie $w = 1/4$ (que es homeomorfa a un toro T^2) es un invariante minimal, con flujo casi periódico. (Sugerencia: con el cambio $x = \sqrt{r} \cos \varphi$, $y = \sqrt{r} \sin \varphi$ queda $\dot{\varphi} = b$ y luego con el cambio $r-1 = \sqrt{w} \cos \theta$, $z = \sqrt{w} \sin \theta$ queda $\dot{\theta} = a$, $\dot{\varphi} = b$, $\dot{w} = (-1/2)(w - 1/4)w$).

17. Demostrar que en un espacio métrico los puntos estables Liapunov en el futuro y recurrentes fuertemente son casi periódicos.

Sugerencia: Dado $\epsilon > 0$ sea δ de la definición de estabilidad. Si $\phi(p, \tau) \in B_{\delta/2}(p)$ elíjase $t_n \rightarrow -\infty$ tal que $\phi(p, t_n) \in \phi_{-\tau}(B_{\delta/2}(\phi_\tau(p)))$ y pruébese que para todo $t > t_n$ la distancia entre $\phi(p, t + \tau)$ y $\phi(p, t)$ es menor que ϵ .

18. Sea M un minimal compacto.

¿Puede ser M estable Liapunov en el futuro y no serlo en el pasado?

19. Se considera en C^2 el conjunto

$$Q = \{(z, w) \in C^2 : |z| = 1, |w| < 1\}$$

llamado toro sólido. Es el producto cartesiano de la circunferencia $S^1 = \{|z| = 1\}$ por el disco $D^2 = \{|w| < 1\}$ y es homeomorfo a la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^3$ que queda en el interior de la superficie de un toro.

Sea $f : C^2 \mapsto C^2$ un homeomorfismo tal que $f|_Q(z, w) = (z^2, (1/2)z + (1/4)w)$

- Verificar que $f(Q) \subset Q$
- Dibujar la sección plana $\{z = z_0\} \cap f(Q)$ y $\{z = z_0\} \cap f^2(Q)$.
- Probar que $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(Q)$ es compacto, invariante y no vacío. Demostrar que para todo $p \in Q$ el conjunto omega-límite de p es no vacío y está contenido en Λ .