TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras.

Octubre de 1998.

CAPITULO V
EJEMPLOS Y FENOMENOS CAOTICOS

EJERCICIOS

1. En la transformación f de herradura de Smale sea $\Lambda = \cap_{n\in Z} f^n(Q)$.

   Probar que Λ es el conjunto de las parejas $(x, y) \in I\!R^2$ con $0 < x < 1,\ \ 0 < y < 1$ tales que los desarrollos de x e y en base 5 tienen sólo las cifras 1 y 3 después de la coma.

2. Sea $f : I\!R^2 \mapsto I\!R^2$ dada por:

   Si $(x, y) \in Q_0 = \{|x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$ entonces $f(x, y) = ((1/3)x, 3y)$
   Si $(x, y) \in Q_1 = \{|x| \leq (1/2),\ |y - 2| \leq (1/2)\}$ entonces $f(x, y) = ((2/3) - (1/3)x, 3(2 - y))$

   (a) Hallar todos los iterados de $(2/3, 0)$ y verificar que $f^n(2/3, 0) \to (0, 0)$ cuando $n \to +\infty$ y cuando $n \to -\infty$.

   (b) Sea $Q = Q_0 \cup Q_1$ dibujar $Q \cap f(Q)$; $f^{-1}(Q) \cap Q$; $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ y $\cap_{j=-2}^{+2} f^j(Q)$. Demostrar que el conjunto $K = \{p \in I\!R^2 : f^n(p) \in Q \forall n \in Z\}$ es compacto, invariante y no vacío.

   (c) Sea $\{i_n\{_{n\in Z}$ una sucesión bi-infinita de ceros y unos tal que $i_n = 1$ implica $i_{n+1} = 0$. demostrar que exsite un único $p \in K$ tal que $f^n(p) \in Q_{i_n}$ para todo $n \in Z$.

   (d) Demostrar que f tiene minimales no triviales (Sugerencia: elegir una sucesión apropiada de ceros y unos).

3. Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo y $g = f^k$ donde k es entero.

   (a) Probar que $\Omega(g)$ es invariante bajo f y que $\Omega(g) \subset \Omega(f)$.

   (b) Si p es fuertemente recurrente según g, entonces ¿lo es según f?

   (c) Sea Λ minimal compacto de g. Probar que $\cup_{n\in Z} f^n(\Lambda)$ es minimal compacto de f.

   (d) Sea K minimal compacto de f. ¿Existe Λ minimal compacto de g tal que $K = \cup_{n\in Z} f^n(\Lambda)$

4. Sea $f : I\!R^n \mapsto I\!R^n$ un homeomorfismo. un punto $q \in I\!R^n$ se llama homoclínico de p_0 si $\omega(q) = \alpha(q) = \{p_0\}$ para p_0 diferente de q.

   (a) Probar que p_0 es un punto fijo, y que todo punto de la órbita por q también es homoclínico.

   (b) Sabiendo que existe un entorno Q de p_0 tal que $f(p) = Ap$ para todo $p \in Q$, donde A es una matriz diagonal real, probar que A tiene algún valor propio de módulo mayor que uno, y otro de módulo menor que uno.

   (c) Sea $f : I\!R^2 \mapsto I\!R^2$, q un punto homoclínico de $(0,0)$, $f(x,y) = (\alpha x, \beta y)$ con $\beta \geq \alpha$, para todo $(x,y) \in Q = \{|x| < 1,\ |y| < 1\}$. Probar que existe N natural arbitrariamente grande, tal que para todo $n > N$ se cumple $f^{-n}(q) = (0, y_n) \in Q$ y $f^n(q) = (x_n, 0) \in Q$.

   (d) Además de la hipótesis de la parte anterior, se sabe que exite un entorno Q_1 de $f^{-N}(q)$ tal que para todo $(x,y) \in Q_1$ se cumple $f^{2N}(x,y) = (x_N, y_{-N}) + H(x,y)$ donde H es una matriz real diagonal. Demostrar que f tiene un minimal no trivial. (Sugerencia: existe un rectángulo U y un entero m tales que $f^m(U) \cap U$ tiene por lo menos dos componentes conexas que son rectángulos con igual altura que U. Probar que f^m tiene un minimal no trivial).

5. Probar que 2^Z con la topología definida por los N-entornos, es un espacio totalmente desconexo, perfecto, compacto, metrizable con la distancia:

$$\text{dist}\ (\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{n \in Z} |a_n - b_n| / 2^{|n|}$$

6. En el espacio del shift, probar que hay un conjunto denso de minimales no triviales.

7. Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo.

   (a) Probar que son equivalentes las afirmaciones siguientes:

      i. f topológicmante transitivo.

      ii. Para todos U y V abiertos no vacíos, existe $n_j \to +\infty$ tal que $f^{n_j}(U) \cap V \neq \emptyset$.

      iii. Para todos U y V abiertos no vacíos, y para todo N natural, existe un entero $n < -N$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

   (b) Encontrar un ejemplo de un homeomorfismo topológicmante transitivo pero no topológicmante mixing.

8. Sea $f : M \mapsto M$ topológicmante transitivo. Probar que:

   (a) $\Omega(f) = M$

   (b) Si U_0 es abierto no vacío, entonces:

$$H_0 = \{p \in M : f^n(p) \in U_0 \text{ para algún natural } n\}$$

   es abierto y denso.

(c) Si M tiene base numerable, entonces hay un residual de puntos cuya semiórbita positiva es densa.

(d) Si M tiene base numerable y todo residual de M es denso en M (espacio de Baire), entonces la condición de la parte anterior es también suficiente para que f sea topológicmante transitivo.

9. Sea A una matriz 2×2 de términos enteros con determinante igual a uno, con un valor propio mayor que uno, y otro menor que uno, y tal que los vectores propios forman con los ejes un ángulo de pendiente irracional. Demostrar que $f(\pi(x, y)) = \pi(A(x, y))$ define en el toro un homeomorfismo f que es topológicmante mixing.