Soluciones a algunos ejercicios de Matemática Discreta 1.

Eleonora Catsigeras *

23 de agosto de 2005

Práctico 1.- Ejercicio 5

¿Cuántos números naturales pares de tres dígitos (en base 10) tienen todos sus dígitos distintos entre sí?

Solución:

Llamemos n_1, n_2 y n_3 a los dígitos de n (n_1 son las centenas, n_2 las decenas y n_3 las unidades).

1er. caso) n_1 y n_2 son ambos pares: $n_1 = 2,4,6,8,\ n_2 = 0,2,4,6,8,\ n_2 \neq n_1,\ n_3 = 0,2,4,6,8,\ n_3 \neq n_1,\ n_3 \neq n_2$

Hay 4 maneras de elegir n_1, hay después 4 maneras de elegir n_2 (todos los dígitos pares menos el que se eligió para n_1), y después hay 3 maneras de elegir n_3 (todos los dígitos pares menos los dos que ya se eligieron para n_1 y n_2). Por la regla del producto hay $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ números posibles en el 1er. caso.

2do. caso) n_1 es par y n_2 es impar: $n_1 = 2,4,6,8,\ n_2 = 1,3,5,7,9\ n_3 = 0,2,4,6,8,\ n_3 \neq n_1$

Hay 4 maneras de elegir n_1, hay después 5 maneras de elegir n_2 (todos los dígitos impares), y después hay 4 maneras de elegir n_3 (todos los dígitos pares menos el que ya se eligió para n_1). Por la regla del producto hay $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ números posibles en el 2do. caso.

3er. caso) n_1 es impar y n_2 es par: $n_1 = 1,3,5,7,9\ n_2 = 0,2,4,6,8\ n_3 = 0,2,4,6,8,\ n_3 \neq n_2$

Hay 5 maneras de elegir n_1, hay después 5 maneras de elegir n_2 (todos los dígitos pares), y después hay 4 maneras de elegir n_3 (todos los dígitos pares menos el que ya se eligió para n_2). Por la regla del producto hay $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ números posibles en el 3er. caso.

4to. caso) n_1 y n_2 son impares: $n_1 = 1,3,5,7,9\ n_2 = 1,3,5,7,9,\ n_2 \neq n_1,\ n_3 = 0,2,4,6,8.$

Hay 5 maneras de elegir n_1, hay después 4 maneras de elegir n_2 (todos los dígitos impares menos el que ya se eligió para n_1), y después hay 5 maneras de elegir n_3 (todos los dígitos pares). Por la regla del producto hay $5 \cdot 4 \cdot 5 = 100$ números posibles en el 4to. caso.

Finalmente, por la regla de la suma hay tantas maneras de elegir el número n como la suma de cantidades en los casos 1,2,3 y 4to. Luego hay $48 + 80 + 100 + 100 = 328$ números n posibles.

*Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingenieria. Universidad de la República. Uruguay. Address: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

Práctico 2.- Ejercicio 15.

Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ *debe contener dos elementos cuya suma sea 10.*

Solución:

Hay 4 maneras para que dos elementos (diferentes) de S sumen 10: $1 + 9 = 10,\ 2 + 8 = 10,\ 3 + 7 = 10,\ 4 + 6 = 10$.

Consideremos los siguientes subconjuntos de S: $S_1 = \{1, 9\}, S_2 = \{2, 8\},\ S_3 = \{3, 7\},\ S_4 = \{4, 6\},\ S_5 = \{5\}$. Serán los nidos. Todo elemento de S está en algún nido.

Sea A un subconjunto de S con seis elementos. Los elementos de A serán las palomas. Hay seis palomas. Toda paloma está en algún nido. Hay cinco nidos. Por el principio del palomar, como hay más palomas que nidos, existe algún nido con dos o más palomas. Eso significa que existe algún S_i con dos o más elementos de A.

Como los S_j tienen dos o un elemento, el subconjunto S_i que tiene dos o más elementos de A contiene exactamente dos elementos de A, entonces no es S_5 y es S_1, S_2, S_3 o S_4. Luego, hay dos elementos de A que suman 10, como queríamos demostrar.

Práctico 3.- Ejercicio 5.

Expresar a_n *en función de los términos anteriores (*a_k *con* $1 \leq k \leq n - 1$*), y dar la condición inicial, siendo* a_n*:*

1. La cantidad de saludos que se dieron los primeros n *invitados de una reunión, si cada vez que llegó uno, éste saludó al resto.*

2. El número de secuencias de ceros y unos, de largo n*, en las cuales no aparecen dos o más ceros seguidos.*

3. El número de secuencias de largo n *formadas por símbolos que son* A *o* B *o* C*, en las cuales no aparecen dos* A *seguidas.*

4. La cantidad de formas de subir una escalera de n *escalones si se puede a veces saltar uno o más escalones.*

5. lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

6. El número de formas en que una sucesión de unos y dos-s suman n*. Por ejemplo para* $n = 3$ *son las sucesiones 111,12 y 21.*

7. El determinante de la matriz A *de tamaño* $n \times n$ *que tiene 2 en la diagonal principal, 1 en la subdiagonal principal (términos que están inmediatamente abajo de la diagonal principal), 1 en la superdiagonal principal (términos que están inmediatamente arriba de la diagonal principal), y 0 en el resto de las entradas.*

Solución:

1. La cantidad a_n de saludos (acumulados) que se dieron entre sí los invitados después que entró el n-ésimo es igual a la cantidad a_{n-1} de saludos que se habían dado antes que llegara el n-ésimo invitado, más la cantidad $n-1$ de saludos que da el n-ésimo al entrar. O sea $a_n = a_{n-1} + n - 1$.

La condición inicial es $a_1 = 0$, ya que al entrar el primer invitado no da ningún saludo porque no hay otros.

2. Por la ley de la suma $a_n = b_n + c_n$ donde b_n es la cantidad de secuencias que cumplen las condiciones pedidas y terminan en uno, y c_n es la cantidad de las que terminan en cero.

$b_n = a_{n-1}$ ya que el último símbolo está fijo en UNO, por lo que b_n es la cantidad de formas de elegir las secuencias de largo $n-1$ (hasta el penúltimo término incluido).

$c_n = a_{n-2}$ ya que el último símbolo está fijo en CERO, por lo que el penúltimo está fijo en UNO (no puede haber dos ceros consecutivos), por lo que c_n es la cantidad de formas de elegir las secuencias de largo $n-2$ (hasta el antepenúltimo término incluido).

Luego $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Se obtuvo la ecuación de Fibonacci nuevamente. Como es una relación de recurrencia de segundo orden, la condición inicial debe estar dada para dos términos. $a_1 = 2$ porque hay dos secuencias de largo 1: cero y uno respectivamente. Ninguna de las dos tiene dos CEROS consecutivos. $a_2 = 3$ porque hay tres secuencias de largo 2 en las que no aparecen dos o más ceros consecutivos, que son $[0,1], [1,0]$ y $[1,1]$.

3. Por la ley de la suma $a_n = u_n + v_n + w_n$ donde u_n, v_n y w_n son las cantidades de secuencias que cumplen las condiciones pedidas y además terminan en A, B o C respectivamente.

v_n: La cantidad de secuencias de largo n que terminan en B es igual a la cantidad de formas de elegir las secuencias de largo $n-1$ (hasta el penúltimo término incluido), ya que el último término está fijo. Luego $v_n = a_{n-1}$.

Análogamente $w_n = a_{n-1}$

u_n. Si una secuencia de largo n termina en A, como no puede haber dos o más A consecutivas, el penúltimo término debe ser B o C. Si es B la cantidad de secuencias de largo n es la cantidad de elecciones de secuencias de largo $n-2$ (hasta el antepenúltimo término incluido) porque el penúltimo y último términos están fijos en B y A respectivamente. Luego la cantidad de secuencias pedidas que terminan en BA es igual a a_{n-2}. Análogamente la cantidad de las que terminan en CA también es a_{n-2}. Luego $u_n = 2a_{n-2}$.

Sumando se tiene $a_n = 2a_{n-2} + 2a_{n-1}$. Se obtuvo la ecuación de Fibonacci nuevamente.

La condición inicial es de dos términos ya que la ecuación de recurrencia es de segundo orden. $a_1 = 3$ porque las secuencias de largo 1 son A, B o C. $a_2 = 8$ porque las secuencias de largo 2 son todas las $(3^2 = 9)$ posibles excepto una (la secuencia AA).

4. Para subir la escalera de n escalones, todos menos el n-ésimo pueden saltearse. Por la ley de la suma $a_n = b_n + c_n$ donde b_n y c_n son las formas de subir la escalera de n escalones habiendo respectivamente no salteado o salteado el escalón $n-1$. b_n es la cantidad de formas de subir una escalera de $n-1$ escalones. Luego: $a_n = a_{n-1} + c_n$.

Ahora c_n es la suma de la cantidad de formas de subir una escalera de n escalones salteando el escalón $n-1$ y salteando o no salteando el escalón $n-2$. Si no se saltea el escalón n_2 eso es que se subió una escalera de $n-2$ escalones. Luego $c_n = a_{n-2} + d_n$ donde d_n es la cantidad de formas de subir la escalera total salteándose los escalones $n-2$ y $n-1$.

Tenemos $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + d_n$. Análogamente d_n es la cantidad a_{n-3} de formas de subir una escalera de $n-3$ escalones más la cantidad de formas de subir la de n escalones salteando los escalones $n-3$, $n-2$ y $n-1$.

Se tiene en definitiva $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_1 + r_n$, donde r_n es la cantidad de formas que se tiene de subir una escalera de n escalones salteando todos los escalones excepto el último.

$r_n = 1$.

En definitiva queda $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 1$. Escribiendo la misma ecuación para $n-1$ en lugar de n resulta: $a_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + {}_n - 2 + 1$. Restando miembro a miembro ambas ecuaciones resulta: $a_n - a_{n-1} = a_{n-1}$, de donde

$$a_n = 2a_{n-1}$$

La condición inicial es $a_1 = 1$ ya que hay una única forma de subir una escalera de un escalón sin saltearse el último escalón.

5. Pongamos un CERO si se saltea un escalón y un UNO si no se saltea. Entonces a_n es la cantidad de secuencias de Ceros y Unos de longitud n tales que el último término es Uno (el último escalón no se saltea para efectivamente subir la escalera), y que no tiene dos ceros consecutivos. En la parte 2. de este ejercicio se probó que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Se obtuvo la ecuación de Fibonacci nuevamente. La condición inicial está dada por $a_1 = 1, a_2 = 3$. (Observar que la condición inicial en esta parte 5. es diferente a la de la parte 2. aunque la ecuación en recurrencia es la misma. Esto implica que la solución es diferente.)

6. $a_n = b_n + c_n$ donde b_n y c_n son las cantidades de sucesiones que suman n y terminan en 1 o en 2 respectivamente. $b_n = a_{n-1}$ ya que el último sumando es 1, y todos suman n por lo que todos hasta el penúltimo incluido suman $n-1$. Por otro lado $c_n = a_{n-2}$ ya que el último sumando es 2, por lo que todos hasta el penúltimo incluido suman $n-2$.

Resulta $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, otra vez la ecuación de Fibonacci. La condición inicial es $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$ ya que para que sume 1 solo hay un caso $1 = 1$, y para que sume dos hay dos casos $1 + 1 = 2$ o $2 = 2$.

7. El determinante de la matriz A_n, de tamaño $n \times n$, es al desarrollar por la primera fila:

$$detA_n = 2 \cdot detA_{n-1} - 1 \cdot detB_{n-1}$$

donde B_{n-1} es una matriz $(n-1) \times (n-1)$ que tiene como primera columna y primera fila $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ y como submatriz (sacando la primera columna y la primera fila de B_{n-1}) se tiene la matriz de tamaño $(n-2) \times (n-2)$ igual a A_{n-2}. Entonces, desarrollando por la primera fila el determinante de B_{n-1} resulta:

$$detB_{n-1} = 1 \cdot detA_{n-2}$$

Sustituyendo en la ecuación de arriba queda:

$$detA_n = 2detA_{n-1} - detA_{n-2}, \quad \text{o sea} \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

Es una ecuación de segundo orden, por lo que la condición inicial está dada por sus dos primeros términos: $a_1 = 2$ ya que la matriz A_1 es igual al número 2. Además $a_2 = 3$ ya que la matriz $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Práctico 4.- Ejercicio 5.

Encontrar una fórmula para la convolución c_n de las siguientes sucesiones a_n y b_n:

1. $a_n = 1$ *si* $0 \leq n \leq 4$, $a_n = 0$ *si* $n \geq 5$, $b_n = 1 \, \forall \, n \in I\!N$.
2. $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n \, \forall \, n \in I\!N$
3. $a_n = 1$ *si* $0 \leq n \leq 3$, $a_n = 0$ *si* $n \geq 4$, $b_n = n$ *si* $0 \leq n \leq 3$, $b_n = 0$ *si* $n \geq 4$.

Solución:

1. $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$. Si $n \leq 4$ entonces $a_j = 1$ para $0 \leq j \leq n$, luego sustituyendo en la sumatoria resulta $c_n = \sum_{j=0}^{n} 1 \cdot 1 = n+1$.

Si $n \geq 5$ entonces para todo $j \geq 4 : a_j = 0$ y por lo tanto en la sumatoria de c_n solo aparecen los términos con $0 \leq j \leq 4$. Luego: $c_n = \sum_{j=0}^{4} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0} 1 \cdot 1 = 5$. En definitiva resulta $c_n = n+1$ si $0 \leq n \leq 4$ y $c_n = 5$ si $n \geq 5$, o lo que es lo mismo $c_n = \text{máx}\{n+1, 5\}$.

2. $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (-1)^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^n = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} = (-1)^n (n+1)$.

3. $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ es la suma de la diagonal (de izquierda abajo hacia derecha arriba) n-ésima de la siguiente tabla, en la que cada término en la fila i columna j es el producto $b_i a_j$:

$b_i \setminus a_j$	$a_0 = 1$	$a_1 = 1$	$a_2 = 1$	$a_3 = 1$	$a_4 = 1$	$a_5 = 1$	$\ldots$
$b_0 = 0$	0	0	0	0	0	0	$\ldots$
$b_1 = 1$	1	1	1	1	1	1	$\ldots$
$b_2 = 2$	2	2	2	2	2	2	$\ldots$
$b_3 = 3$	3	3	3	3	3	3	$\ldots$
$b_4 = 4$	4	4	4	4	4	4	$\ldots$
$b_5 = 5$	5	5	5	5	5	5	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Luego c_0 es la suma de la 0-ésima diagonal formada solo por el 0. Así $c_0 = 0$. c_1 es la suma de la siguiente diagonal formada por un 1 y un 0. Así $c_1 = 1 + 0 = 1$. Después c_2 es la suma de la siguiente diagonal formada por un 2, un 1 y un 0. Así $c_2 = 2 + 1 + 0 = 3$. Análogamente $c_3 = 3 + 2 + 1 + 0 = 6$, $c_4 = 0 + 3 + 3 + 1 + 0 = 6$, $c_5 = 0 + 0 + 3 + 2 + 0 + 0 = 5$, $c_6 = 0+0+0+3+0+0+0 = 3$, $c_4 = 0$ y $c_n = 0$ para todo $n \geq 4$ ya que toda las siguientes diagonales están formadas solo por ceros.

Práctico 5.- Ejercicio 8.

Para cada natural $n \geq 0$ *sea* R_n *la cantidad de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto dado con* n *elementos. Para cada* $n, i \in I\!N$, $n, i \geq 1$ *sea* $S(n,i)$ *el número de Stirling de segundo tipo. Probar que:*

(a) $\forall \, n \in I\!N, n \geq 0$ *se cumple*

$$R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + C_2^n R_{n-2} + \ldots + C_n^n R_0$$

(b) $forall \, n \in I\!N, n \geq 1$ *se cumple*

$$R_n = S(n,1) + S(n,2) + \ldots + S(n,n)$$

Solución:

Parte (a). Sea x_0 un elemento fijo del conjunto A con $n+1$ elementos. El conjunto $B = A \setminus \{x_0\}$ tiene n elementos. Para cada elección $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ de r elementos diferentes de los n elementos que tiene B (hay C_r^n de tales elecciones), el conjunto que resulta de retirar $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de B tiene $n-r$ elementos.

Por la ley de la suma

$$R_{n+1} = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots X_{n-1} + X_n$$

donde X_r es la cantidad de relaciones de equivalencia en A tales que la clase de equivalencia $[x_0]$ está formada por x_0 y por r elementos más de B que llamamos $(x_1, \ldots, x_r)$. Se observa que $0 \leq r \leq n$. Estos r elementos se pueden elegir de C_r^n formas diferentes. Para cada una de las elecciones de esos r elementos, tenemos determinada una clase de equivalencia, la del elemento x_0. Falta elegir la partición en las clases de equivalencia restantes, es decir con los $n-r$ elementos restantes. La cantidad de formas de elegir esta partición es la cantidad de relaciones de equivalencia existentes en un conjunto con $n-r$ elementos, es decir R_{n-r}. En definitiva tenemos que

$$X_r = C_r^n R_{n-r}, \quad \forall\, 0 \leq r \leq n$$

Sustituyendo en la suma de más arriba resulta

$$R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + C_2^n R_{n-2} + \ldots + C_n^n R_0$$

como queríamos demostrar.

Parte (b). La cantidad de clases de equivalencia R_n en un conjunto A con n elementos es igual a la cantidad de particiones de A en subconjuntos no vacíos, dos a dos disjuntos, y tales que la unión de todos es A. (Estos subconjuntos son las clases de equivalencia de la relación.) Por la ley de la suma

$$R_n = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n$$

donde Y_j es la cantidad de particiones en exactamente j clases de equivalencia $(1 \leq j \leq n)$.

Cada clase de equivalencia puede mirarse como una caja que no es vacía. La partición en j clases de equivalencia del conjunto A con n elementos, es una distribución de n objetos diferentes en j cajas indistintas de modo que ninguna caja quede vacía. Por definición de número de Stirling de segundo tipo, $S(n, j)$ es la cantidad de formas de distribuir n objetos diferentes en j cajas indistintas de modo que ninguna quede vacía. Por lo tanto tenemos

$$Y_j = S(n, j) \quad \forall\, 1 \leq j \leq n$$

Sustituyendo en la suma de arriba resulta

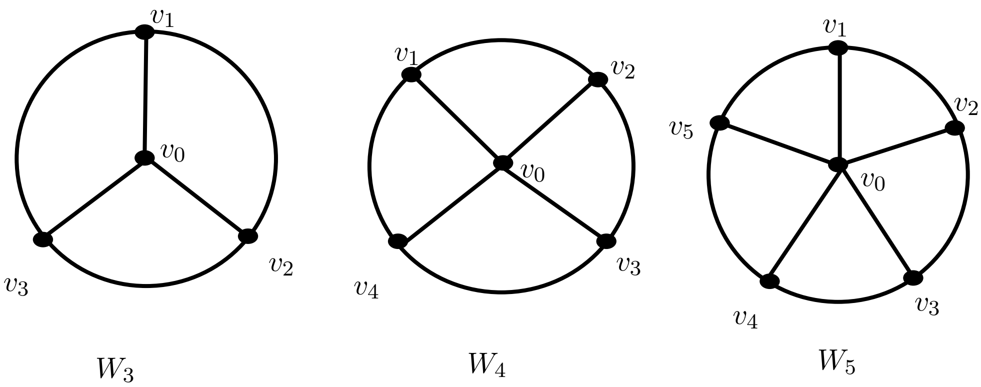
$$Y_j = S(n, 1) + S(n, 2) + \ldots + S(n, n)$$

como queríamos demostrar.

Práctico 6. [1].)- Ejercicio 8.

Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo rueda de n rayos como el grafo W_n con $n+1$ vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que v_0 es el centro de una circunferencia y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son n puntos diferentes de la circunferencia, ordenados según el sentido horario. Las aristas del grafo son únicamente las del ciclo $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ y las aristas rayos: es decir las incidentes en v_0 que lo unen con cada uno de los vértices del ciclo. (Ver dibujos de W_3, W_4 y W_5 en la figura 1.)

Figura 1: Los grafos rueda con 3, 4 y 5 rayos.



(a) ¿Cuántas aristas tiene W_n?
(b) ¿ Cuántos ciclos de longitud 3 tienen W_3, W_4 y W_5?
(c) ¿ Cuántos ciclos de longitud 4 tienen W_3, W_4 y W_5?
(d)¿ Cuántos ciclos de longitud 5 tienen W_3, W_4 y W_5?
(e) ¿ Cuántos ciclos de longitud 6 tienen W_3, W_4 y W_5?
(f) Determinar cuántos ciclos de longitud k ($k \geq 3$) tiene W_n. (Discutir según k y n.)

Solución:

Parte (a): Hay n aristas rayos (las que unen v_0 con cada uno de los vértices $v_1, \ldots, v_n$). Además hay n aristas en el ciclo $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$. Luego hay $2n$ aristas.

Parte (b): Ciclos de longitud 3:
W_3: El ciclo en la circunferencia y los tres ciclos (v_0, v_1, v_2, v_0), (v_0, v_2, v_3, v_0), (v_0, v_3, v_1, v_0). Luego W_3 tiene 4 ciclos de longitud 3.

W_4: Los cuatro ciclos (v_0, v_1, v_2, v_0), (v_0, v_2, v_3, v_0), (v_0, v_3, v_4, v_0), (v_0, v_4, v_1, v_0). Luego W_4 tiene 4 ciclos de longitud 3.

W_5: Los cinco ciclos (v_0, v_1, v_2, v_0), (v_0, v_2, v_3, v_0), (v_0, v_3, v_4, v_0), (v_0, v_4, v_5, v_0), (v_0, v_5, v_1, v_0). Luego W_5 tiene 5 ciclos de longitud 3.

Parte (c): Ciclos de longitud 4:

[1] Ver práctico 6 del curso de Matemática Discreta 1 del año 2005 de la Facultad de Ingeniería en http://www.fing.edu.uy/ webimerl/discreta1/practicos/practicos2005.htm

W_3: Los tres ciclos $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$, $(v_0, v_2, v_3, v_1, v_0)$, $(v_0, v_3, v_1, v_2, v_0)$. Luego W_3 tiene 3 ciclos de longitud 4.

W_4: El ciclo en la circunferencia y los cuatro ciclos $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$, $(v_0, v_2, v_3, v_4, v_0)$, $(v_0, v_3, v_4, v_1, v_0)$, $(v_0, v_4, v_1, v_2 v_0)$. Luego W_4 tiene 5 ciclos de longitud 4.

W_5: Los cinco ciclos $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$, $(v_0, v_2, v_3, v_4, v_0)$, $(v_0, v_3, v_4, v_5, v_0)$, $(v_0, v_4, v_5, v_1, v_0)$, $(v_0, v_5, v_1, v_2, v_0)$. Luego W_5 tiene 5 ciclos de longitud 4.

Parte (d): Ciclos de longitud 5:

W_3: Hágase la figura de W_3. Todos los ciclos de W_3 tienen longitud a lo sumo longitud 4 (es decir no se pueden elegir más de 4 aristas consecutivas de forma que cierren un ciclo). Luego W_3 tiene 0 ciclo de longitud 5.

W_4: Los cuatro ciclos $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_0)$, $(v_0, v_2, v_3, v_4, v_1, v_0)$, $(v_0, v_3, v_4, v_1, v_2, v_0)$, $(v_0, v_4, v_1, v_2, v_3, v_0)$. Luego W_4 tiene 4 ciclos de longitud 5.

W_5: El ciclo en la circunferencia y los cinco ciclos $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_0)$, $(v_0, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0)$, $(v_0, v_3, v_4, v_5, v_1, v_0)$, $(v_0, v_4, v_5, v_1, v_2, v_0)$, $(v_0, v_5, v_1, v_2, v_3, v_0)$. Luego W_5 tiene 6 ciclos de longitud 5.

Parte (e): Ciclos de longitud 6:

W_3: Todos los ciclos de W_3 tienen longitud a lo sumo longitud 4 como se vio en la parte anterior. Luego W_3 tiene 0 ciclo de longitud 6.

W_4: Hágase la figura de W_4. Todos los ciclos de W_4 tienen longitud a lo sumo longitud 5 (es decir no se pueden elegir más de 5 aristas consecutivas de forma que cierren un ciclo). Luego W_4 tiene 0 ciclo de longitud 6.

W_5: Los cinco ciclos $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0)$, $(v_0, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1, v_0)$, $(v_0, v_3, v_4, v_5, v_1, v_2, v_0)$, $(v_0, v_4, v_5, v_1, v_2, v_3, v_0)$, $(v_0, v_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_0)$. Luego W_5 tiene 5 ciclos de longitud 6.

Parte (f): Ciclos de longitud k:

Un ciclo con k elementos es de dos tipos posibles:

Tipo I) O bien es el ciclo $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ en la circunferencia del grafo. Esto solo se puede dar cuando $k = n$.

Tipo II) O bien es un ciclo que comienza y termina en v_0 y es de la forma $(v_0, v_i, \ldots, v_{j(i)}, v_0)$ donde $v_i, \ldots, v_{j(i)}$ son los $k-1$ vértices consecutivos en la circunferencia (recorridos en sentido horario) comenzando en v_i con $1 \leq i \leq n$. Estos ciclos tienen k aristas, de las cuales 2 aristas son adyacentes en v_0 (la primera y la última aristas) y las restantes $k-2$ aristas son consecutivas en la circunferencia. Esto solo se puede dar cuando $k - 2 < n$ ya que para que no se cierre el ciclo antes de volver a v_0 no se pueden recorrer todas las aristas de la circunferencia. Luego solo existen ciclos del tipo II) si $k < n + 2$.

De lo anterior se deduce que:

Si $k \geq n + 2$ entonces la cantidad de ciclos de longitud k en W_n es 0.

Si $k = n + 1$ entonces la cantidad de ciclos de longitud k en W_n es n (un ciclo de tipo II) para cada elección de v_i con $1 \leq i \leq n$).

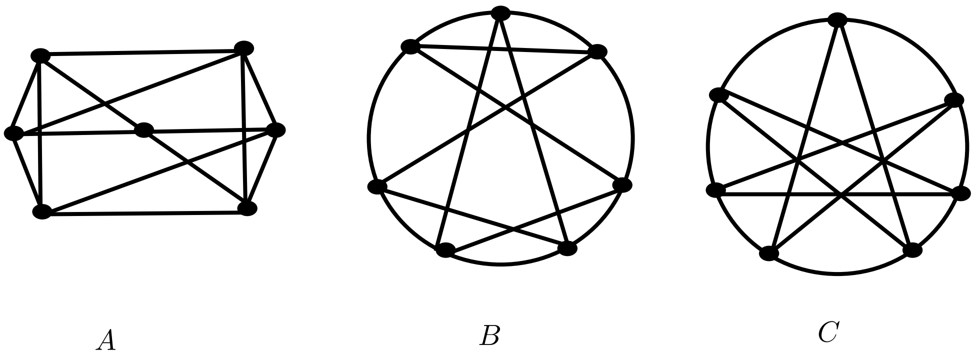
Si $k = n$ entonces la cantidad de ciclos de longitud k en W_n es $1 + n$ (un ciclo solo de tipo I) más un ciclo de tipo II) para cada elección de v_i con $1 \leq i \leq n$).

Si $3 \leq k \leq n$ entonces la cantidad de ciclos de longitud k en W_n es n (un ciclo de tipo II) para cada elección de v_i con $1 \leq i \leq n$).

Práctico 7.[2] **- Ejercicio 6.**

(a) Demostrar que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complementarios lo son.
(b) ¿Cuáles de los grafos A, B, y C de la figura 2 son isomorfos?

Figura 2: Parte b) del ejercicio 6 del práctico 7.



(c) Determinar la cantidad de aristas del grafo $\overline{G}$ complementario de G si G tiene n vértices y e aristas.

(d) Determinar el número de aristas e de un grafo autocomplementario de orden n.

(e) Construir un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.

(f) Encontrar condiciones necesarias de los valores de n para que exista un grafo autocomplementario con n vértices.

Solución:

Parte a) Directo: Probar que si G_1 y G_2 son isomorfos entonces $\overline{G}_1$ es isomorfo a $\overline{G}_2$. Recíproco: Probar que si $\overline{G}_1$ y $\overline{G}_2$ son isomorfos entonces G_1 y G_2 son isomorfos.

Prueba del directo: Por hipótesis G_1 y G_2 son isomorfos. Esto significa por definición que existe una aplicación biyectiva, llamada isomorfismo, entre los vértices de G_1 y G_2, tal que

Afirmación A): (v_i, v_j) es una arista de G_1 con vértices v_1 y v_2 si y solo si (w_i, w_j) es una arista de G_2, donde w_i, w_j indican los vértices de G_2 correspondientes por el isomorfismo a v_i, v_j respectivamente.

Por otro lado, por definición de grafo complementario $\overline{G}_1$ de G_1, se tienen las siguientes afirmaciones B) y C):

Afirmación B): (v_i, v_j) es una arista de G_1 si y solo si no es una arista de $\overline{G}_1$.

Afirmación C): (w_i, w_j) es una arista de G_2 si y solo si no es una arista de $\overline{G}_2$.

Reuniendo las afirmaciones A), B) y C) se deduce que:

Afirmación D): (v_i, v_j) no es una arista de $\overline{G}_1$ si y solo si (w_i, w_j) no es una arista de $\overline{G}_2$.

La afirmación D) es una condición necesaria y suficiente, entonces las condiciones contrarias también son válidas. La afirmación D) es entonces equivalente a la siguiente:

[2]Ver práctico 7 del curso de Matemática Discreta 1 del año 2005 de la Facultad de Ingeniería en http://www.fing.edu.uy/ webimerl/discreta1/practicos/practicos2005.htm

Afirmación E): (v_i, v_j) es una arista de $\overline{G}_1$ si y solo si (w_i, w_j) es una arista de $\overline{G}_2$.

Por definición de isomorfismo los grafos la afirmación E) dice que $\overline{G}_1$ y $\overline{G}_2$ son isomorfos, como queríamos demostrar.

Prueba del recíproco: Por hipótesis los grafos $\overline{G}_1$ y $\overline{G}_2$ son isomorfos. Por lo demostrado en el directo, los complementarios de esos dos grafos son isomorfos, es decir $\overline{\overline{G}_1}$ y $\overline{\overline{G}_2}$ son isomorfos. Pero el complementario del complementario de un grafo G es el mismo G; entonces obtenemos que G_1 y G_2 son isomorfos, como queríamos demostrar.

Parte b) Los grafos A, B y C tienen todos 7 vértices, 14 aristas y el grado de todos los vértices es 4. Esas son condiciones necesarias pero no suficientes para que sean isomorfos. Es decir, si fueran isomorfos deberán cumplirse, pero no recíprocamente: si se cumplen puede suceder que sean isomorfos o que no lo sean. No nos permiten concluir nada.

El grafo A tiene exactamente 6 ciclos de longitud 3 y el grafo C tiene por lo menos 7 ciclos de longitud 3. Si los grafos fueran isomorfos tendrían que tener la misma cantidad de ciclos de cada longitud. (Esta es nuevamente condición necesaria pero no suficiente para el isomorfismo). Por lo tanto A y C no son isomorfos.

El grafo A no tiene ciclo de longitud 7 y el grafo B tiene ciclos de longitud 7. Por lo tanto A y B no son isomorfos.

El grafo B tiene exactamente 6 ciclos de longitud 3 y el grafo B tiene por lo menos 7 ciclos de longitud 3. Por lo tanto B y C no son isomorfos.

Parte c) El grafo completo K_n de n vértices tiene C_2^n aristas, porque dados dos vértices cualesquiera diferentes, está la arista que los une en K_n y hay C_2^n maneras diferentes de elegir dos vértices diferentes de un conjunto total de n vértices disponibles.

El grafo $\overline{G}$ complementario de G tiene como aristas aquellas de K_n que no están en G, y solo esas. Entonces el número e' de aristas de $\overline{G}$ es

$$e' = C_2^n - e = \frac{n(n-1)}{2} - e$$

Parte d) Un grafo G es autocomplementario si $\overline{G}$ es isomorfo a G. Entonces la cantidad e' de aristas de $\overline{G}$ es igual al número de aristas e de G. Sustituyendo en la última igualdad de la parte c) resulta:

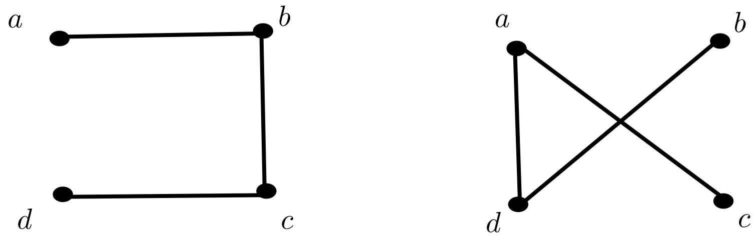
$$e = e' = \frac{n(n-1)}{2} - e \quad \Leftrightarrow \quad 2e = \frac{n(n-1)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{n(n-1)}{4}$$

Parte e)

Grafo autocomplementario de 4 vértices: Dibujar los cuatro vértices a, b, c, d de un cuadrado nombrados consecutivos en sentido horario (no dibujar los lados del cuadrado). Ver figura 3. Considérese el grafo G con vértices a, b, c, d y aristas sólamente las tres siguientes: (a, b), (b, c), (c, d). G es el llamado *Path* o camino simple de tres aristas $P_3 = [a, b, c, d]$.

El complementario $\overline{G}$ es el que tiene los mismos cuatro vértices que G y tiene como aristas aquellas y solo aquellas que no están en G, o sea: (a, c), (a, d) y (b, d). Resulta $\overline{G}$ el camino simple de tres aristas ya que $\overline{G} = [b, d, a, c]$. Luego $\overline{G}$ es isomorfo a G, o sea, por definición G es autocomplementario.

Figura 3: Grafos autocomplementarios de 4 y 5 vértices.



grafo G grafo $\overline{G}$ complementario de G

Grafo autocomplementario de 5 vértices: Dibujar los cinco vértices a, b, c, d, e de un pentágono, nombrados consecutivamente en sentido horario, y considerar como aristas los cinco lados del pentágono. Ver figura 3. G es un grafo llamado ciclo C_5 de longitud 5 (porque tiene 5 aristas que se cierran en un ciclo y nada más). $G = [a, b, c, d, e, a]$.

El grafo complementario $\overline{G}$ es el que tiene como aristas las que no están en G, o sea: (a, c), (a, d), (b, d), (b, e), (e, c).

Se observa que $\overline{G}$ es un también un ciclo de longitud 5, ya que $\overline{G} = [a, c, e, b, d, a]$. Entonces es isomorfo a G y por definición G es autocomplementario.

Parte f) De acuerdo a la última fórmula de la parte d) se tiene que $n(n-1)$ debe ser múltiplo de 4. Entonces:

1er. caso) n es múltiplo de 4 (esto se denota como $n = \dot{4}$).

2do. caso) $n - 1$ es múltiplo de 4, o sea $n = \dot{4} + 1$.

3er. caso) n es múltiplo de 2 y $n - 1$ también. Pero estas dos condiciones son incompatibles, ya que implicarían que n es par e impar al mismo tiempo.

Por lo tanto obtenemos que una condición necesaria para que exista un grafo autocomplementario de n vértices es que $n = \dot{4}$ o que $n = \dot{4} + 1$. Por ejemplo los primeros n que cumplen esa condición son: 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25, etc.

Nota: No hemos probado que la condición anterior sea suficiente para que exista un grafo autocomplementario de n vértices, ya que sólo usamos que los grafos G y $\overline{G}$ tienen la misma cantidad de aristas, lo cual es necesario pero no suficiente para que los grafos sean isomorfos.

Práctico 8.- Ejercicio 15.

Sea G un grafo que tiene por lo menos una arista.

(a) Probar que si la característica cromática $\chi(G)$ cumple $\chi(G) = 2$ entonces G no tiene ciclos impares.

(b) Probar el recíproco de la parte (a): Si G no tiene ciclos impartes entonces $\chi(G) = 2$.

Solución:

La característica cromática $\chi(G)$ es la cantidad mínima de colores necesaria para que exista por lo menos una coloración propia del grafo G. Como el grafo G tiene por lo menos una arista entonces hay por lo menos una pareja de vértices adyacentes y se necesita, para colorear el grafo, por lo menos dos colores diferentes. Luego $\chi(G) \geq 2$.

Parte a): Un ciclo de longitud k es un ciclo de k aristas que se denota $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i, \ldots, v_k, v_1)$ donde v_i son los vértices: empieza y termina el ciclo en un mismo vértice v_1 y pasa por k vértices diferentes.

Por hipótesis $\chi(G) = 2$, entonces existe una coloración propia con dos colores que llamamos A y B. Hay que probar que G no tiene ciclos de longitud k impar. Por absurdo, si tuviera un ciclo $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i, \ldots, v_k, v_1)$ de longitud k impar, como sabemos que podemos colorear el grafo con los colores A y B, podemos colorear en particular ese ciclo que forma parte del grafo. Para fijar ideas sea A el color de v_1. Como v_1 es adyacente a v_2, el color de v_2 es B. Como v_3 es adyacente a v_2 el color de v_3 es A. Así sucesivamente concluimos que el color de v_i es A si i es impar, y es B si i es par. Pero entonces, como k es impar, el color de v_k es A. Pero la última arista del ciclo es (v_k, v_1), por lo que v_k y v_1 son adyacentes y ambos están coloreados con el color A, lo cual dice que la dada no es una coloración propia del grafo, y esto es absurdo.

Parte b) Por hipótesis no existen ciclos de longitud impar. Hay que probar que $\chi(G) = 2$. Como ya sabemos que $\chi(G) \geq 2$, basta probar que $\chi(G) \leq 2$. Para esto alcanza probar que existe una coloración propia de G con dos colores que llamamos A y B. Entonces, dados los dos colores A y B, basta exhibir un método de construcción de una coloración propia del grafo con esos dos colores. Basta colorear una componente conexa del grafo. Para las demás componentes conexas del grafo se aplicará el mismo método. Iremos coloreando los vértices en diferentes pasos de a uno. Tenemos que cuidar en cada paso del método que al colorear un vértice, no quede del mismo color que los vértices adyacentes ya coloreados. Esto lo hacemos del modo siguiente:

1er. nivel): Elegimos un solo vértice v_0 del grafo. Lo coloreamos con el color A.

2do. nivel): Seleccionamos todos los vértices del grafo que son adyacentes a v_0. Los coloreamos con el color B.

3er. nivel): Seleccionamos todos los vértices del grafo que no son v_0 pero que igualmente son adyacentes a algún vértice del 2do. nivel. Ninguno de estos vértices del 3er. nivel será adyacente a v_0, porque si lo fuera se cerraría un ciclo de longitud 3 y el grafo por hipótesis no tiene ciclos de longitud impar. Entonces podemos colorear todos los vértices del 3er. nivel con el color A.

4to. nivel): Seleccionamos todos los vértices del grafo que no son del segundo nivel pero que igualmente son adyacentes a algún vértice del 3er. nivel. Ninguno de estos vértices del 4to. nivel será adyacente a un vértice del 2do. nivel, porque si lo fuera se cerraría un ciclo de longitud 3 y el grafo por hipótesis no tiene ciclos de longitud impar. Entonces podemos colorear todos los vértices del 4to. nivel con el color B.

5to. nivel): Seleccionamos todos los vértices del grafo que no son del 3er. nivel pero que igualmente son adyacentes a algún vértice del 4to. nivel. Ninguno de estos vértices del 5to. nivel será adyacente a un vértice del 3er. nivel, porque si lo fuera se cerraría un ciclo de longitud 3. Ninguno de estos vértices del 5to. nivel será adyacente a un vértice del 1er. nivel, porque si lo fuera se cerraría un ciclo de longitud 5. Entonces podemos colorear todos los vértices del 5to. nivel con el color A.

6to. nivel): Seleccionamos todos los vértices del grafo que no son del 4to. nivel pero que igualmente son adyacentes a algún vértice del 5to. nivel. Ninguno de estos vértices del 6to. nivel será adyacente a un vértice del 4to. nivel, porque si lo fuera se cerraría un ciclo de longitud 3. Ninguno de estos vértices del 6to. nivel será adyacente a un vértice del 2do. nivel, porque si lo fuera se cerraría un ciclo de longitud 5. Entonces podemos colorear todos los vértices del 6to. nivel con el color B.

r-ésimo nivel con r impar): Seleccionamos todos los vértices del grafo que no son del $r-2$-ésimo nivel pero que igualmente son adyacentes a algún vértice del $r-1$-ésimo nivel. Ninguno de estos vértices v del nivel r será adyacente a un vértice w de los niveles impares anteriores $r-2, r-4, r-6, \ldots, r-2j, \ldots, 5, 3, 1$ ya coloreados con el color A. En efecto: si lo fuera se cerraría un ciclo de longitud impar igual a $r-(r-2j)+1 = 2j-1$ (Se observa que la cantidad de aristas recorridas para pasar del nivel $r-2j$ al nivel r es $r-(r-2j)$, y a esta cantidad hay que sumarle 1 que es la arista que cerraría el ciclo si v fuera adyacente a w.) Entonces podemos colorear todos los vértices del nivel r, cuando r es impar, con el color A.

s-ésimo nivel con s par) : Seleccionamos todos los vértices del grafo que no son del $s-2$-ésimo nivel pero que igualmente son adyacentes a algún vértice del $s-1$-ésimo nivel. Ninguno de estos vértices v del nivel s será adyacente a un vértice w de los niveles pares anteriores $s-2, s-4, s-6, \ldots, s-2j, \ldots, 6, 4, 2$ ya coloreados con el color B. En efecto: si lo fuera se cerraría un ciclo de longitud impar igual a $s-(s-2j)+1 = 2j-1$ (Se observa que la cantidad de aristas recorridas para pasar del nivel $s-2j$ al nivel s es $s-(s-2j)$, y a esta cantidad hay que sumarle 1 que es la arista que cerraría el ciclo si v fuera adyacente a w.) Entonces podemos colorear todos los vértices del nivel s, cuando s es par, con el color B.

Como la cantidad de vértices es finita, se llegará a un último nivel a partir del cual el nivel siguiente es vacío. Luego, con este método se colorean todos los vértices del grafo, con dos colores A y B de modo que vértices adyacentes tienen colores distintos, como queríamos demostrar.

Bibliografía:

1. Grimaldi, R.: *Matemáticas Discreta y Combinatoria.* Editorial Addison Wesley - Longman. Mexico, 1998. ISBN 968-44-324-2.

2. Liu, C.L.: *Elementos de Matemáticas Discretas.* Editorial Mc. Graw Hill. Mexico, 1995. ISBN 0-07-100544-7