TEORIA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Eleonora Catsigeras.

Octubre de 1998.

CAPITULO III
ESTABILIDAD SEGUN LIAPUNOV

1 Definiciones

Sea $\dot{x} = X(x,t)$, con $X : \Omega \subset I\!R^n \times I\!R \mapsto I\!R$ una ecuación diferencial en las hipótesis del teorema de Picard. Denotaremos con $\phi(x_0, t_0, t)$ a la solución definida en su intervalo maximal, que en $t = t_0$ toma el valor x_0.

Definición 1.1 La solución $x = x(t)$ definida para todo $t \geq t_0$ se llama *estable en el futuro según Liapunov,* si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x(t_0)\| < \delta$ implica que $\phi(y_0, t_0, t)$ está definida para todo $t \geq t_0$ y además $\|\phi(y_0, t_0, t) - x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Definición 1.2 La solución $x = x(t)$ definida para todo $t \geq t_0$ se dice *asintóticamente estable en el futuro según Liapunov,* si es estable (en el futuro) y además existe $\rho > 0$ tal que $\|y_0 - x(t_0)\| < \rho$ implica que $\|\phi(y_0, t_0, t) - x(t)\| \to_{t\to+\infty} 0$.

En forma similar pero sustituyendo $t \geq t_0$ por $t \leq t_0$ y $t \to +\infty$ por $t \to -\infty$, se define solución *estable y asintóticamente estable hacia el pasado, según Liapunov.*

Definición 1.3 Un *punto de equilibrio* de la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x,t)$ es un punto x_0 tal que la función constante $x(t) = x_0$ para todo $t \in I\!R$ es solución de la ecuación. A veces se llama punto de equilibrio a esa solución constante. Obsérvese que los puntos de equilibrio, si existen, son los puntos x_0 tales que $X(x_0, t) = 0$ para todo $t \in I\!R$. La órbita por un punto de equilibrio x_0 es el conjunto formado solo por el punto x_0.

Las definiciones de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad se aplican en particular a los puntos de equilibrio, resultando:

El punto de equilibrio x_0 es estable en el futuro si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta$ implica que $\|\phi(y_0, t_0, t) - x_0\| < \epsilon, \ \ \forall\, t \geq t_0$.

El punto de equilibrio es asintóticamente estable en el futuro si es estable en el futuro y además existe $\rho > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \rho$ implica que $\phi(y_0, t_0, t) \to_{t\to+\infty} x_0$.

Nota 1.4 Trabajaremos también con ecuaciones diferenciales en superficies de $I\!R^3$ o en variedades de $I\!R^n$. En estos casos también valen las definiciones de estabilidad anteriores.

EJEMPLOS

En el sistema $\dot{x} = y, \ \ \dot{y} = -x$, el punto de equilibrio $x = 0, \ y = 0$, es estable según Liapunov en el futuro y en el pasado, pero no lo es asintóticmante. En efecto, las órbitas verifican $\dot{x}x + \dot{y}y = 0$, es decir la derivada respecto a t de $x(t)^2 + y(t)^2$ es cero para todo t. Esto implica que para cualquier solución, la distancia al origen es constante. Entonces las órbitas están contenidas en circunferencias alrededor del origen.

Sea $\Omega = \{(x, y) \in I\!R^2 : 1/2 < x^2 + y^2 < 2\}$. Para $(x, y) \in \Omega$ sea la ecuación diferencial:
$\dot{x} = (1 - \rho^2)x + (\rho - y)y$
$\dot{y} = (1 - \rho^2)y - (\rho - y)x$, con $\rho^2 = x^2 + y^2$.
La ecuación es de la forma $\dot{p} = X(p)$ para $p \in \Omega$ y verifica las hipótesis del teorema de Picard.
El vector $X(p)$ puede descomponerse en

$$X(p) = (1 - \rho^2)\,(x, y) + (\rho - y)\,(y, -x)$$

El primer sumando es un vector radial (según la dirección $p - 0 = (x, y)$), y el segundo sumando es un vector ortogonal a la dirección $p - 0$.

La componente radial tiene el mismo sentido que el radio $p - 0$ si $\rho < 1$, y tiene sentido opuesto si $\rho > 1$, anulándose si $\rho = 1$.

La componente tangencial al radio es cero si $p = (0, 1)$ que es el único punto de equilibrio del sistema.

La órbita que pasa por p es una curva tangente en p al campo $X(p)$. Si inicialmente la distancia de p a 0 es uno, y p no es el punto de equilibrio $(0, 1)$, el vector tangente tiene exclusivamnte la componente tangencial no nula, y del mismo sentido que $(y, -x)$. La órbita es casi toda la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 (a la que le falta el punto $0, 1)$). Se recorre en sentido horario (el sentido del vector $(y, -x)$). Tiende al punto de equilibrio cuando $t \to +\infty$.

Si inicialmente la distancia de p a 0 es mayor que uno, entonces el vector tangente tiene una componente radial que apunta hacia el $(0, 0)$. Eso quiere decir que ρ va decreciendo. Pero no puede ser menor que 1, porque esta órbita no puede cortar a la otra contenida en la circunferencia de radio 1. Entonces $x(t)$ se mantiene dentro de la corona Ω, y por el teorema de salida de compactos está definida para todo $t \geq 0$. Análogamente la órbita que inicialmente está a distancia menor que uno del origen, está definida para todo $t \geq 0$ y su distancia al origen va creciendo pero siempre por abajo de uno.

Un croquis del plano de fases puede verse en la figura.

Todas las soluciones tienden al punto de equilibrio cuando $t \to +\infty$. sin embargo el punto de equilibrio no es asintóticmante estable, porque no es estable. No es estable porque en cualquier entorno de $(0, 1)$ existen puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ con $x_1 > 0$, que son tales que $\phi(p_1, t)$ se aleja más que $1/2$ del punto de equilibrio, para ciertos valores de $t \geq 0$, antes de volver a acercarse a él. Esto significa que algunas órbitas no se mantienen a distancia menor que cualquier $\epsilon > 0$ arbitrario que se dé del punto de equilibrio, aunque inicialmente estén tan cerca del mismo como se desee.

Como comentario final cabe recordar que el hecho de que todas las órbitas tiendan a una dada, no implica que ésta sea asintóticamente estable, porque puede no ser estable.

2 Estabilidad de puntos de equilibrio en sistemas autónomos.

FUNCIONES DE LIAPUNOV

Sea $\dot{x} = X(x)$ en las hi[ótesis del teorema de Picard.

Llamaremos $\varphi(x_1, t_1, t)$ a la solución, como función de t, cuyo gráfico pasa por el punto (x_1, t_1) dado como condición inicial. Como el sistema es autónomo, se verifica que $\varphi(x_1, t_1, t) = \varphi(x_1, 0, t - t_1)$. Usaremos la notación $\phi(x_1, t)$ para la solución $\varphi(x_1, 0, t_1)$.

Sea x_0 un punto de equilibrio, es decir, un punto tal que $X(x_0) = 0$. Se tiene $\phi(x_0, t) = x_0$ y su intervalo maximal es todo $I\!R$.

De acuerdo con las definiciones en la sección anterior, el punto de equilibrio x_0 es estable en el futuro si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta$ implica que $\phi(y_0, t)$ está definida para todo $t \geq 0$ y $\|\phi(y_0, t) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. El punto es asintóticamente estable en el futuro si, además de ser estable, existe $\rho > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \rho$ implica que $\phi(y_0, t) \to_{t \to +\infty} x_0$.

Definición 2.1 Sea $\dot{x} = X(x)$ en las hipótesis del teorema de Picard, y sea x_0 tal que $X(x_0) = 0$.

Una función real $V : U \mapsto I\!R$ definida en un entorno U de x_0 se llama *función de Liapunov* si es continua y además existe la derivada respecto a t en $t = 0$ de la función compuesta $V(\phi(x, t))$ para todo $x \in U$, y resulta ser una función continua de x. Esta derivada se denota como $\dot{V}(x)$.

Se observa que $\dot{V}(x)$ puede existir aunque $V(x)$ no sea diferenciable. Solo se está pidiendo que exista, cuando $h \to 0$ el límite del cociente incremental

$$\dot{V}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(\phi(x, h)) - V(x)}{h} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V(\phi(x, t))$$

Observaciones:

1. Sea V una función de Liapunov. Entonces, para todo T en el intervalo maximal de la solución $\phi(x, t)$ se cumple que $\dot{V}(\phi(x, T))$ es la derivada respecto a t en $t = T$ de la función compuesta $V(\phi(x, t))$.

   En efecto, por definición

   $$\dot{V}(\phi(x, T)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V(\phi(\phi(x, T), t))$$

   Como el sistema es autónomo se cumple que $\phi(\phi(x, T), t) = \phi(x, T + t)$, de donde

   $$\dot{V}(\phi(x, T)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V(\phi(x, T + t)) = \left.\frac{d}{du}\right|_{u=T} V(\phi(x, u))$$

   siendo $u = T + t$, como se quería probar.

2. Sea la ecuación $\dot{x} = X(x)$. Si $V(x)$ es una función diferenciable, se puede calcular $\dot{V}$ sin necesidad de conocer las soluciones $\phi(x, t)$. Resulta $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot X(x)$ donde $\cdot$ indica el producto escalar usual en $I\!R^n$. (Ver ejercicio 2).

Definición 2.2 Una función $H : U \mapsto I\!R$ definida en un entorno U del punto x_0 es *definida positiva (para x_0)* si se cumple $H(x_0) = 0$ y $H(x) > 0$ para todo $x \in U$ tal que $x \neq x_0$.

Es *semidefinida positiva* si $H(x_0) = 0$ y $H(x) \geq 0$ para todo $x \in U$.

Análogamente se define H *definida negativa,* y H *semidefinida negativa,* sustituyendo las desigualdades $H(x) > 0$ y $H(x) \geq 0$ respectivamente por $H(x) < 0$ y $H(x) \leq 0$.

TEOREMAS DE LIAPUNOV

Teorema 2.3 (Teorema 1 de Liapunov) *Si existe una función de Liapunov V definida positiva en un entorno del punto de equilibrio x_0 y si $\dot{V}$ es semidefinida negativa, entonces x_0 es estable en el futuro.*

Prueba:

Dado $\epsilon > 0$ (tomémoslo de modo que la bola $B_\epsilon(x_0)$, de centro x_0 y radio ϵ, esté contenida en U) hay que hallar $\delta > 0$ tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta$ implique que $\phi(y_0, t)$ esté definida para todo $t \geq 0$ y cumpla $\phi(y_0, t) \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $t \geq 0$.

Sea $m = \min\{V(x) : \|x - x_0\| = \epsilon\} > 0$.

Como V es continua en x y como $V(x_0) = 0$ existe $\delta > 0$ (que puede tomarse menor que ϵ) tal que $\|y - x_0\| < \delta$ implica que $V(y) < m$.

Fijemos y_0 tal que $\|y_0 - x_0\| < \delta$. Tenemos que $y_0 \in B_\epsilon(x_0)$.

Consideremos la función $V(\phi(y_0, t))$ definida para todo t en el intervalo maximal de $\phi(y_0, t)$ tal que $\phi(y_0, t) \in U$. Para esos valores de t se cumple:

$$\frac{d}{dt} V(\phi(y_0, t)) = \dot{V}(\phi(y_0, t)) \leq 0$$

Por eso, como función de t, $V(\phi(y_0, t))$ es continua y decreciente (no estrictamente), siempre que $\phi(y_0, t) \in U$.

Consideremos la ecuación diferencial restringida al abierto U. Sea b el extremo derecho del intervalo maximal de $\phi(y_0, t)$. Como, para todo $t \in [0, b)$ se cumple $V(\phi(y_0, t)) \leq V(y_0) < m$, y además $y_0 \in B_\epsilon(x_0)$, tenemos que $\phi(y_0, t) \in B_\epsilon(x_0)$. La solución está acotada dentro de la bola de centro x_0 y radio ϵ, dentro de U. Por el teorema de salida de compactos está definida para todo $t \geq 0$. (Es decir $b = +\infty$). $\blacksquare$

Teorema 2.4 (Teorema 2 de Liapunov) *Si existe una función de Liapunov $V : U \mapsto I\!R$ para el punto de equilibrio x_0, definida positiva, con $\dot{V}$ definida negativa, entonces x_0 es asintóticmante estable en el futuro.*

Nota: Lo mismo vale si se encuentra una función de Liapunov U definida negativa con $\dot{U}$ definida positiva. Basta tomar $V = -U$.

Prueba: Por el teorema anterior x_0 es estable en el futuro. Dado $\epsilon > 0$ (que puede considerarse tal que $B_\epsilon(x_0) \in U$), sea $\delta > 0$ de la definición de estabilidad en el futuro. demostraremos primero que $V(\phi(x, t)) \to_{t \to +\infty} 0$, para todo $x \in B_\delta(x_0)$, y después que $\phi(x, t) \to_{t \to +\infty} x_0$.

Sea $y \neq x_0$, $y \in B_\delta(x_0)$. La función real $F(t) = V(\phi(y,t))$ positiva y diferenciable para todo $t \geq 0$, es decreciente estrictamente porque $\dot{F}(t) = \dot{V}(\phi(y,t)) < 0$. Entonces existe $\alpha = \lim_{t\to+\infty} F(t)$ y es mayor o igual que cero. Por absurdo supongamos que $\alpha > 0$. entonces $F(t) > \alpha > 0$ para todo $t \geq 0$.

Por la continuidad de V, existe $\gamma < \epsilon$ tal que $\|x - x_0\| < \gamma$ implica que $V(x) < \alpha$. Como $F(t) = V(\phi(y,t)) > \alpha$ tenemos que $\|\phi(y,t) - x_0\| \geq gamma$ para todo $t \geq 0$.

Entonces $\phi(y,t)$ está en la corona compacta $C = \{x \in I\!R^n : \gamma \leq \|x - x_0\| \leq epsilon\}$. Sea $-r = \max\{\dot{V}(x) talquex \in C\} < 0$. Tenemos que $\dot{F}(t) = \dot{V}(\phi(y,t)) \leq -r < 0$ para todo $t \geq 0$. integrando entre 0 y t se tiene $F(t) = F(0) + \int_0^t \dot{F}(t)\,dt \leq F(0) - rt \to_{t\to+\infty} -\infty$. Pero esto contradice que $F(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Hemos probado, por absurdo, que $\alpha = 0$.

Tenemos entonces que $V(\phi(y,t) \to_{t\to+\infty} 0$. Ahora, para finalizar la prueba, veamos que $\phi(y,t) \to_{t\to+\infty} x_0$.

Dado $\epsilon' > 0$ (que podemos suponer menor que ϵ), sea $m = \min\{V(x) : \epsilon' \leq \|x - x_0\| \leq \epsilon\} > 0$. Como $V(\phi(y,t))$ tiende a cero cuando $t \to +\infty$, existe T tal que para todo $t \geq T$ se cumple $V(\phi(y,t)) < m$. O sea, $\|\phi(y,t) - x_0\|$ no puede ser mayor o igual que ϵ' para ningún $t \geq T$.

Hemos probado que dedo $\epsilon' > 0$ arbitrariamente pequeño, existe T tal que para todo $t \geq T$ se cumple $\|\phi(y,t) - x_0\| < \epsilon'$. Esto es, $\phi(y,t) \to_{t\to+\infty} x_0$ como se quería demostrar. ■

Ejemplos:

1. Sea $\dot{x} = -x^3$ en $I\!R$. El origen es asintóticmante estable en el futuro pues $V(x) = x^2$ es definida positiva con $\dot{V}(x) = -2x^4$ definida negativa.

2. Sea $\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y + x$. tomando $V(x,y) = x^2 + y^2$ se pureba que el origen es asintóticamente estable en el futuro.

3. El péndulo con rozamiento $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta - a\dot{\theta}$ con a y ω constantes positivas, se escribe como sistema de primer de orden: $\dot{\theta} = z, \;\; \dot{z} = -\omega^2 \sin\theta - az$. tomando $V(\theta, z) = (z^2/2) + \omega^2(1 - \cos\theta)$ se demuestra que el origen $(\theta = 0, \; \dot{\theta} = 0)$ es asintóticmante estable en el futuro.

4. $\dot{x} = y - x^3, \;\; \dot{y} = -x - y^3$ tiene a $(0,0)$ como punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro. Basta tomar $V(x,y) = x^2 + y^2$. Sin embargo para la parte lineal del sistema, que es $\dot{x} = y, \;\; \dot{y} = -x$ el $(0,0)$ es estable pero no asintóticamente estable en el futuro.

Observaciones:

1. El recíproco del teorema 2 de Liapunov es cierto (teorema de Massera, que se demuestra más adelante). Sin embargo el recíproco del teorema 1 de Liapunov es falso (ver ejercicio 5).

2. Dada la ecuación $\dot{x} = X(x)$, considérese la nueva ecuación $\dot{x} = -X(x)$. Si $\phi(x_0, t)$ es la solución general de la primera, entonces $\phi(x_0, -t)$ es la de la segunda. Los puntos de equilibrio de una y otra ecuación son los mismos. El punto x_0 es un punto de equilibrio estable hacia el pasado de la primera ecuación si y solo si es un punto de equilibrio estable hacia el futuro de la segunda, y viceversa. También es cierto para la estabilidad asintótica.

Si V es una función de Liapunov definida positiva cerca de x_0, lo es también para la otra ecuación. Sin embargo la función $\dot{V}$ relativa a la segunda ecuación es opuesta a la que se obtiene usando la segunda ecuación.

Con esas consideraciones se obtienen los siguientes corolarios:

Corolario 2.5 *Si existe una función de Liapunov V para el punto de equilibrio x_0, definida positiva con $\dot{V}$ semidefinida positiva, entonces x_0 es estable hacia el pasado.*

Si existe una función de liapunov V definida positiva, con $\dot{V}$ definida positiva, entonces x_0 es asintóticamente estable hacia el pasado.

Definición 2.6 Se llama *fuente* a un punto de equilibrio asintóticamente estable hacia el pasado. Se llama *pozo* a un punto de equilibrio asintóticamente estable hacia el futuro.

Definición 2.7 Sea la ecuación $\dot{x} = X(x)$, X campo en M, (M variedad o subconjunto abierto de $I\!R^k$). Sea $E : M \mapsto I\!R$ una función continua no constante tal que $\dot{E}(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} E(\phi(x,t))$ existe y es cero para todo $x \in M$. Una tal función E se llama *preintegral* de la ecuación.

Se observa que, cuando existe una preintegral E, esta es una función de Liapunov con $\dot{E} = 0$. Entonces los puntos de equilibrio que sean mínimos relativos estrictos de la función E son estables en el futuro, y los máximos relativos estrictos son estables hacia el pasado. Como la preintegral E, por definición, no es constante, esos puntos de equilibrio estables no lo son asintóticamente (ver ejercicio 8).

Ejemplos:

1. La energía de los sistemas mecánicos conservativos es una preintegral.
2. Sea $\ddot{x} = f(x)$ con $x \in I\!R$. Se puede escribir como $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x)$. Se obtiene que $\dot{y}y = \dot{x}f(x)$. Integrando respecto a t se tiene $(y^2/2) - \int_0^x f(x)\,dx =$ constante . La función $E(x,y) = (y^2/2) - \int_0^x f(x)\,dx$ es una preintegral de la ecuación.

TEOREMA DE CETAEV

Definición 2.8 El punto de equilibrio x_0 es *inestable* en el futuro según Liapunov, si no es estable en el futuro.

Así como el teorema 1 de Liapunov da una condición suficiente (pero no necesaria) para la estabilidad, mediante la existencia de alguna función de Liapunov adecuada, el siguiente teorema da una condición suficiente (tampoco es necesaria) para la inestabilidad, también mediante la existencia de funciones de Liapunov adecuadas.

Teorema 2.9 (Cetaev) *Sea $\dot{x} = X(x)$, $X(x_0) = 0$.*

Si existe una función de Liapunov V para el punto de equilibrio x_0, tal que $V(x_0) = 0$, $\dot{V}$ es definida negativa y para alguna sucesión $x_n \neq x_0$ que tiende a x_0 se cumple $V(x_n) \leq 0$, entonces x_0 es inestable en el futuro.

Prueba:

Sea $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B_\epsilon(x_0)} \subset U$, donde U es el entorno de x_0 dominio de la función de Liapunov V.

Por absurdo, si x_0 fuera estable, existiría $\delta > 0$ tal que $\|x_0 - y_0\| < \delta$ implica $\phi(y_0.t) \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $t \geq 0$.

Como $x_n \to x_0$, puede elegirse n tal que $\|x_n - x_0\| < \delta$. Entonces $\phi(x_n, t) \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $t \geq 0$.

siendo $\dot{V}$ definida negativa, y $x_n \neq x_0$, se tiene que $\dot{V}(\phi(x - n, t)) < 0$ para todo $t \geq 0$. Como para $t = 0$ $V(x_n) \leq 0$, se deduce que $V(\phi(x_n, t) \leq -k < 0$ para todo $t \geq T$, para cierto $T \geq 0$.

Como V es continua, existe $\rho > 0, \quad \rho < \epsilon$ tal que $\|x - x_0\| < \rho$ implica $|V(x)| < k$. Por lo anterior, tenemos que para todo $t \geq T$ el punto $\phi(x_n, t)$ está en la corona

$$C = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho \leq \|y - x_0\| \leq \epsilon\}$$

Siendo $\dot{V}$ definida negativa, tiene un máximo negativo $-r$ en la corona C, y por lo tanto $\dot{V}(\phi(x_n, t)) \leq -r$ para todo $t \geq T$.

Integrando respecto a t se obtiene:

$$V(\phi(x_n, t)) = V(\phi(x_n, T)) + \int_T^t \dot{V}(\phi(x_n, t))\, dt \leq V(\phi(x_n, T)) - r(t - T) \to_{t \to +\infty} -\infty$$

Esto es absurdo, porque siendo V continua, está acotada en la bola de centro x_0 y radio ϵ, donde se mantiene la semitrayectoria $\phi(x_n, t)$. ■

TEOREMA DE MASSERA

El recírpoco del teorema 2 de Liapunov asegura que la existencia de funciones de Liapunov adecuadas es equivalente a la estabilidad asintótica del punto de equilibrio. Es el siguiente teorema, debido al profesor uruguayo José Luis Massera.

Teorema 2.10 (Massera) *Sea una ecuación $\dot{x} = X(x)$ en las hipótesis del teorema de Picard. Si x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces existe, en un entorno U del punto de equilibrio, una función de Liapunov V definida positiva con $\dot{V}$ definida negativa.*

Para la prueba necesitaremos algunas definiciones y un lema previo.

Definición 2.11 Un punto de equilibrio x_0 es *uniformemente asintóticamente estable (en el futuro)* si es asintóticamente estable y además existe $\rho > 0$ tal que $\phi(x, t)$ converge uniformemente en $x \in B_\rho(x_0)$ a x_0 cuando $t \to +\infty$.

Esto es, dado $\epsilon > 0$ existe T independiente de x, tal que $t > T$ implica $\|\phi(x, t) - x_0\| < \epsilon$ para todo $x \in B_\rho(x_0)$. O equivalentemente,

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in B_\rho(x_0)} \|\phi(x, t) - x_0\| = 0$$

Lema 2.12 *Si x_0 es un punto asintóticamente estable de un sistema autónomo $\dot{x} = X(x)$ entonces es uniformemente asintóticamente estable.*

Prueba: x_0 es asintóticamente estable. Entonces es estable y además existe $\rho > 0$ tal que $\|x - x_0\| \leq \rho$ implica que $\phi(x,t) \to_{t\to+\infty} x_0$.

Por absurdo, si x_0 no es uniformemente asintóticamente estable en $B_\rho(x_0)$, entonces existe una sucesión de tiempos t_n tendiendo a infinito (que puede elegirse tal que $t_n > n$) y existe un número real $\epsilon > 0$ que cumple: $\sup_{x\in B_\rho(x_0)} \|\phi(x,t_n) - x_0\| > \epsilon > 0$

Por definición de supremo, existe para cada n natural un punto $x_n \in B_\rho(x_0)$ tal que

$$\|\phi(x_n,t_n) - x_0\| > \epsilon/2 > 0 \text{ para todo } n \text{ natural}$$

Por la estabilidad de x_0, existe $\delta > 0$ (que puede elegirse menor que ρ), tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica $\|\phi(x,t) - x_0\| < \epsilon/2$ para todo $t \geq 0$.

De lo anterior, y observando que $\phi(x_n,t_n) = \phi(\phi(x_n,t), t_n - t)$ se deduce que

$$\|\phi(x_n,t) - x_0\| \geq \delta \text{ para todo } t \in [0,t_n] \text{ y para todo } n \text{ natural}$$

En particular se cumple la desigualdad anterior para todo $t \in [0,n]$ porque $t_n > n$.

Sea x_{n_j} una subsucesión convergente a $\overline{x} \in \overline{B_\rho(x_0)}$ de la sucesión de puntos x_n. Se tiene $\|\overline{x} - x_0\| \leq \rho$.

Tomemos $T \geq 0$ cualquiera real, y consideremos los naturales $n_j > T$. Se cumple $T \in [0, n_j]$, y por lo tanto $\|\phi(x_{n_j}, T) - x_0\| \geq \delta$. Haciendo j tender a infinito, se obtiene $\|\phi(\overline{x},T) - x_0\| \geq \delta$ para todo $T \geq 0$. Entonces $\phi(\overline{x},T)$ no tiende a x_0 cuando $T \to +\infty$. Pero $\|\overline{x} - x_0\| \leq \rho$, y lo anterior contradice la elección de ρ debida a la estabilidad asintótica de x_0. ∎

Prueba del teorema de Massera:

No es restrictivo suponer que $x_0 = 0$ (pues de lo contrario se haría el cambio de variables $y = x - x_0$). Tomemos $\rho > 0$ tal que $\phi(x,t)$ converge uniformemente a x_0 cuando $t \to +\infty$ para $x \in B_\rho(0)$.

Construyamos una función de Liapunov del tipo:

$$V(x) = \int_0^{+\infty} g(\|\phi(x,s)\|)\, ds$$

definida en $B_\rho(0)$, eligiendo $g : [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ de modo que:

1. g sea creciente estrictamente, y $g(0) = 0$.
2. g sea continua
3. $\int_0^{+\infty} g(\sup_{x\in B_\rho(0)} \|\phi(x,s)\|)\, ds$ sea convergente.

Esas tres condiciones aseguran lo siguiente:

a) La existencia y continuidad de $V(x)$: en efecto $g(\|\phi(x,s)\|)$ es continua y está mayorada para todo $x \in B_\rho(0)$ por una función de integral convergente. Entonces $\int_0^{+\infty} g(\|\phi(x,s)\|)\, ds$ converge uniformemente para $x \in B_\rho(0)$. Luego $V(x)$ es continua.

b) $V(x)$ es definida positiva, pues $V(0) = \int_0^{+\infty} g(0)\, ds = 0$ y si $x \neq 0$ entonces $g(\|\phi(x,s)\|) > 0$ y $V(x) > 0$.

c)

$$\dot{V}(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_0^{+\infty} g(\|\phi(x,t+s)\|)\, ds = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_t^{+\infty} g(\|\phi(x,u)\|\, du = -g(\|x\|)$$

es continua y definida negativa.

Basta entonces construir una función g que cumpla 1. 2. y 3.

Sea $h(s) = \sup\{\|\phi(x,s)\| : x \in B_\rho(0)\}$. Debido a que 0 es uniformemente asintóticamente estable, se cumple que $\lim_{s\to+\infty} h(s) = 0$. Entonces existe una sucesión $t_n \to +\infty$ tal que $h(t) < 1/n$ si $t \in [t_n, t_{n+1}]$.

Elijamos números a_i, con $0 < a_i < 1/(2^i(t_{i+1} - t_i))$

Sea $g : [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ una función creciente tal que $g(0) = 0$ y $0 < g(t) < a_i$ si $t \in (1/(i+1), 1/i]$.

Se tiene

$$\int_0^\infty g(h(s))\, ds \leq \int_0^{t_1} g(h(t))\, dt + \int_{t_1}^{t_2} g(1)\, dt + \int_{t_2}^{t_3} g(1/2)\, dt + \ldots$$

$$= \int_0^{t_1} g(h(t))\, dt + \sum_{i=1}^{\infty} g(1/i)(t_{i+1} - t_i) \leq \int_0^{t_1} g(h(t))\, dt + \sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i = K$$

Lo anterior prueba el teorema. Se observa que $g \circ h$ es integrable porque es continua. En efecto g es continua por construcción, y h es continua porque

$$|h(t) - h(t_0)| \leq sup_{\|x\|<\rho} \|\phi(x,t) - \phi(x,t_0)\| < \epsilon$$

La última desigualdad es cierta para todo x en el compacto $B_\rho(0)$ por la continuidad de $\phi(x,t)$ respecto de (x,t). ■

3 Estabilidad de la parte lineal de los sistemas autónomos

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ donde A es una matriz $n \times n$ y x es un vector de $\mathbb{R}^n$. 0 es un punto de equilibrio del sistema. Consideremos la función $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definida mediante:

$$V(x) = Mx \cdot x$$

donde $\cdot$ indica el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$ y M es una matriz *simétrica* real. La función $V(x)$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$, y es una función de Liapunov.

Estudiemos $\dot{V} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Llamamos $x(t)$ a la solución que en $t = 0$ toma el valor x. Se tiene:

$$\dot{V}(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Mx(t) \cdot x(t) = M\dot{x} \cdot x + Mx \cdot Ax = MAx \cdot x + A^tMx \cdot x = (MA + A^tM)x \cdot x$$

La matriz $MA + A^tM$ es simétrica, y la función $\dot{V}(x)$ es también una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$.

La manera de pasar de la matriz simétrica correspondiente a la forma cuadrática $V(x)$, a la matriz simétrica de la forma cuadrática $\dot{V}(x)$ es:

$$M \mapsto MA + A^t M$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema lineal dado.

Lema 3.1 *Si la matriz A tiene todos los valores propios con parte real negativa, entonces la transformación T que lleva una matriz simétrica M en otra simétrica N mediante:*

$$T(M) = N = MA + A^t M$$

es una transformación lineal biyectiva.

Prueba: T es una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita en sí mismo (el espacio de las matrices reales simétricas $n \times n$). Basta pues demostrar que el núcleo de T es 0.

Sea M en el núcleo de T. Eso es:

$$MA + A^t M = 0$$

Se sabe que la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ con el dato inicial $x(0) = 0$ es $x(t) = e^{At}x_0$. Ya se vio que como los valores propios de A tienen todos parte real negativa, entonces 0 es asintóticamente estable en el futuro. (Capítulo I). Entonces $x(t) \to_{t \to +\infty} 0$.

Consideremos $V(x) = Mx \cdot x$ donde M está en el núcleo de T. Entonces $\dot{V}(x) = (MA + A^t M)x \cdot x = 0$ para todo x. Es decir $V(x)$ es una preintegral de la ecuación, porque es constante sobre las trayectorias.

Entonces $V(x_0) = V(x(t))$ para todo t y es igual al límite de $V(x(t))$ cuando $t \to +\infty$, que es cero. Tenemos $V(x_0) = 0$ para todo x_0. Es decir, la forma cuadrática $V(x)$ es idénticamente nula. Esto es: la matriz simétrica M es nula. ■

Teorema 3.2 *Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$. Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa entonces:*

a) Dada una forma cuadrática cualquiera $W(x) = Nx \cdot x$ existe una única forma cuadrática $V(x)$ tal que $\dot{V} = W$.

b) Si además $W(x)$ es dada definida negativa, entonces $V(x)$ resulta definida positiva.

Prueba:

a) Dada $W(x) = Nx \cdot x$, con N matriz simétrica, sea $M = T^{-1}(N)$ la matriz preimagen de N por la transformación T del lema anterior. La forma cuadrátrica $V(x) = Mx \cdot x$ verifica lo deseado. La unicidad se debe a la inyectividad de la transformación T.

b) Supongamos que $W(x)$ es definida negativa, y por absurdo existe algún $x_1 \neq 0$ tal que $V(x_1) \leq 0$. Tomemos $x_n = (1/n)x_1$. Entonces tenemos $V(x_n) = V((1/n)x_1) = (1/n^2)V(x_1)$, porque V es una forma cuadrática. Como $\dot{V}(x) = W(x)$ es definida negativa, aplicando el teorema de Cetaev se deduce que 0 es inestable. Esto es absurdo por lo demostrado en el capítulo 1: como todos los valores propios de A tienen parte real negativa, 0 es asintóticamente estable. ■

Nota: El teorema anterior da un método para construir funciones de Liapunov (cuadráticas) de sistemas lineales asintóticamente estables.

Consecuencias: Para el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ con todos los valores propios de A con parte real negativa, se cumple:

1. Existe una única forma cuadrática $V(x)$ tal que $\dot{V}(x) = -\|x\|^2$ y resulta ser definida positiva.
2. Dada un forma cuadrática V definida positiva, existe una única forma cuadrática U (que resulta ser definida negativa) tal que $\dot{U} = V$. (Basta aplicar el teorema anterior con $W = -V$)
3. Dada un forma cuadrática W definida positiva, existen únicas las formas cuadráticas U y V tales que $\dot{U} = V$ y $\dot{V} = W$, y resultan U definida positiva y V definida negativa.

APROXIMACION LINEAL

Los resultados anteriores que fueron probados sólo para sistemas lineales, pueden aplicarse a sistemas autónomos no lineales cuando la parte lineal tiene todos los valores propios con parte real negativa.

Teorema 3.3 *Sea $\dot{x} = X(x)$ con X de clase C^1. Sea x_0 un punto de equilibrio, es decir $X(x_0) = 0$.*

Si la matriz jacobiana $X'(x_0)$ tiene todos los valores propios con parte real negativa, entonces existe una función de Liapunov V para el punto de equilibrio x_0, que es una forma cuadrática en $(x - x_0)$ definida positiva y tal que $\dot{V}$ es definida negativa en un entorno de x_0 . Por lo tanto x_0 es asintóticamente estable en el futuro.

Prueba:

No es restrictivo considerar que $x_0 = 0$ ya que mediante el cambio de variables $y = x - x_0$ no se modifica la matriz jacobiana.

Llamando A a la matriz jacobiana de X en 0, se cumple: $X(x) = Ax + f(x)$ donde $f(x) = X(x) - Ax$.

Por la regla de Barrow

$$X(x) - X(0) = \int_0^1 \frac{d}{du}(X(ux))\,du = \int_0^1 X'(ux)x\,du$$

Luego:

$$f(x) = X(x) - Ax = \int_0^1 (X'(ux) - A)x\,du$$

$$\|f(x)\| \leq \int_0^1 \|X'(ux) - X'(0)\|\|x\|\,du$$

Como X' es continua, porque X es de clase C^1, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|X'(ux) - X'(0)\| < \epsilon \quad \text{si } \|x\| < \delta,\ 0 \leq u \leq 1$$

Entonces:

$$\|f(x)\| \leq \epsilon\|x\| \quad \text{si } \|x\| < \delta$$

Sea $V(x) = Mx{\cdot}x$ la única forma cuadrática definida positiva tal que $(MA{+}A^tM)x{\cdot}c = -\|x\|^2$
Se cumple

$$\dot{V}(x) = M\dot{x}\cdot x + Mx\cdot\dot{x} = MX(x)\cdot x + Mx\cdot X(x) =$$
$$= M(Ax + f(x))\cdot x + Mx\cdot(Ax + f(x)) = (MA + A^tM)x\cdot x + 2Mx\cdot f(x) =$$
$$= -\|x\|^2\left(1 - 2\frac{Mx\cdot f(x)}{\|x\|^2}\right)$$

Por otro lado sabemos que

$$\frac{|Mx\cdot f(x)|}{\|x\|^2} \leq \frac{\|M\|\|x\|\|f(x)\|}{\|x\|^2} \leq \|M\|\epsilon \quad \text{si } \|x\| < \delta$$

Como ϵ es arbitrario, podemos elegirlo de modo que $2\|M\|\epsilon < 1$, y resulta:

$$\dot{V}(x) \leq -\|x\|^2(1 - 2\|M\|\epsilon) < 0 \quad \text{si } 0 < \|x\| < \delta$$

Entonces $\dot{V}$ es definida negativa, y por el teorema 2 de Liapunov, el punto de equilibrio es asintóticamente estable. ∎

Ejemplos:

1. Sea la ecuación $\dot{x} = -\sin x + x^3/2$, con $x \in I\!R$. El punto de equilibrio 0 es asintóticamente estable, ya que la parte lineal es $\dot{x} = -x$.

2. El péndulo con rozamiento $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\omega - a\dot{\omega}$, con $a < 0$, se lleva al sistema de primer orden: $\dot{\theta} = y$, $\dot{y} = -\omega^2\sin\theta - ay$. El campo X es $X(\theta, y) = (y, -\omega^2\sin\theta - ay)$. El $(0,0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro, pues la matriz Jacobiana en $(0,0)$ es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{bmatrix}$$

con valores propios de parte real $-a/2$ negativa.

Nota: Un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ es asintóticamente estable si y solo si todos los valores propios de A tienen parte real negativa. Pero en un sistema no lineal $\dot{x} = X(x)$ las partes reales de los valores propios de $X'(x_0)$ negativas es condición suficiente pero no necesaria para la estabilidad asintótica en el futuro del punto de equilibrio x_0. (Ver ejercicio 13).

Ejemplos:

1. Sea el sistema $\dot{x} = -y + x^3$, $\dot{y} = x + y^3$. El punto de equilibrio $(0,0)$ no es estable por el teorema de Cetaev, usando $V(x,y) = x^2 + y^2$. Sin embargo la parte lineal del sistema es $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ que tiene al $(0,0)$ como punto de equilibrio estable.

2. Sea el sistema $\dot{x} = 2y^3, \;\; \dot{y} = -x^3$. El punto de equilibrio $(0,0)$ es estable, como se deduce del teorema de Liapunov, usando la función $V(x,y) = x^2 + y^4$ con $\dot{V} = 0$. Sin embargo el sistema lineal es $\dot{x} = 0, \;\; \dot{y} = -x$ que tiene a $(0,0)$ como punto de equilibrio inestable.

EJERCICIOS

1. Para la ecuación diferencial $\dot{x} = t - x^2$ (estudio cualitativo del capítulo I), ¿qué soluciones son estables en el futuro?, ¿qué soluciones son asintóticamente estables en el futuro?

2. Sea $V(x)$ una función de Liapunov para $\dot{x} = X(x)$ en R^n. Probar que si V es diferenciable entonces $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot X(x)$ donde $\cdot$ indica el producto interno usual en R^n, y $\nabla V(x)$ es el vector gradiente de V, esto es $\nabla V(x) = (\partial V/\partial x_1, \ldots, \partial V/\partial x_n)$, para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$.

3. Sea la ecuación del péndulo sin rozamiento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\theta$$

   donde θ es un ángulo y w^2 es una constante positiva.

   (a) Probar que admite una preintegral

   (b) demostrar que $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ es un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable en el futuro. (sug. probar que si las condiciones iniciales están cercanas a $(0,0)$, entonces las órbitas son periódicas, observando que la preintegral igual constante es la ecuación de una curva cerrada).

4. Sea $\dot{x} = X(x)$ con $X(x_0) = 0$. Se sabe que existe una función de Liapunov V definida positiva en un entorno de x_0 tal que $V(\phi(x,t))$ es estrictamente decreciente con t, para todo $x \neq x_0$ (y para todo t tal que $V(\phi(x,t))$ esté definida).

   (a) ¿Es x_0 asintóticamente estable en el futuro? (Sugerencia: reemplazar $\dot{V}$ por $V(\phi(x,1)) - V(x)$

   (b) Probar que $(0,0)$ es asintóticamente estable en el futuro en $\dot{x} = -y - y^2x^3, \;\; \dot{y} = x - y^5$

   (c) Probar que $(0,0)$ es estable en el futuro pero no asintóticamente estable, en el sistema: $\dot{x} = -y - yx^3, \;\; \dot{y} = x - y^4$. (Sugerencia: tomar una trayectoria y ver que mientras está en el semiplano $y > 0$ la distancia al origen decrece. Ver que todas las órbitas son cerradas, observando que son simétricas respecto al eje de las x: si se tiene una solución, invirtiendo los tiempos y el signo de las y, se obtiene otra solución).

5. Sea $X : (-1,1) \mapsto R$ definida por $X(x) = x^3 \sin^2(1/x)$ si $x \neq 0$, $X(0) = 0$.

   (a) Hallar los puntos de equilibrio y dibujar las órbitas. Verificar que 0 es estable pero no asintóticamente, en el futuro.

(b) Probar que no existen funciones de Liapunov definidas positivas en un entorno de 0 con $\dot{V}$ semidefinida o definida negativa. (El recíproco del teorema de Liapunov 1 es falso).

6. Sea x_0 un punto de equilibrio asintóticamente estable de $\dot{x} = X(x)$.

   (a) Probar que exsite un entorno V de x_0 tal que, si $x \in V$ entonces $\phi(x,t)$ es estable en el futuro.

   (b) Ver que la afirmación anterior no es cierta si se pide sólo que x_0 sea estable. (Buscar un ejemplo en R, de la forma $\dot{x} = \lambda(x)x$ donde $\lambda(x)$ se anula en una sucesión $x_n \to 0$.

7. Croquizar las órbitas de algún sistema dinámico en R^2 que tenga un único punto de equilibrio x_0 inestable en el futuro, pero que $\phi(x,t) \to x_0$ para todo $x \in R^2$.

8. Sea $E : R^n \mapsto R$ una preintegral de $\dot{x} = X(x)$, con $X(x_0) = 0, \quad E(x) > E(x_0)$ para todo $x \neq x_0$ en un entorno U de x_0.

   (a) Demostrar que x_0 es estable en el futuro y en el pasado.

   (b) Demostrar que x_0 no es asintóticamente estable.

   (c) Estudiar la estabilidad en el futuro y en el pasado de $(0,0)$ en $\dot{x} = \sin y, \quad \dot{y} = -x^3$ en R^2.

9. Probar que los pozos no son estables Liapunov en el pasado, y que las fuentes no son estables en el futuro. (sugerencia: teoremas de Massera y Cetaev).

10. Sabiendo que existe una función de Liapunov V con $\dot{V}$ definida negativa en un entorno del punto de equilibrio x_0, demostrar que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

    (a) $V(x) - V(x_0)$ es definida positiva en algún entorno de x_0.

    (b) x_0 es estable en el futuro

    (c) x_0 es asintóticamente estable en el futuro.

    (Sugerencia: b) implica a) por Cetaev).

    Deducir que cuando $\dot{V}$ es definida positiva o negativa, el estudio del signo de $V(x) - V(x_0)$ en un entorno de x_0 da la afirmación precisa sobre la estabilidad del punto de equilibrio, tanto en el futuro como en el pasado. (Es el caso de los sitemas mecánicos disipativos).

11. Demostrar que si existe una función de Liapunov V con $\dot{V}$ definida negativa en un entorno del punto de euilibrio x_0, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in B_\epsilon(x_0)$ con $x \neq x_0$, existe algún $t \in R$ en que $\phi(x,t)$ no pertenece a $B_\epsilon(x_0)$. (La única órbita que permanece en el entorno $B_\epsilon(x_0)$ para todo t es la de x_0).

12. Probar esta versión más general del teorema de Cetaev:

    Si existe una función de Liapunov V para el punto de equilibrio x_0 tal que

    $$\{x : x \neq x_0;\ V(x) \leq V(x_0)\} \subset \{x : \dot{V}(x) < 0\}$$

y si existe $x_n \neq x_0$, con $x_n \to x_0$ tal que $V(x_n) \leq V(x_0)$, entonces x_0 es inestable en el futuro.

13. Probar que $(0,0)$ es asintóticamente estable en $\dot{x} = -y - x^3$, $\dot{y} = x - y^3$, aunque la parte real de los valores propios de $X'(0,0)$ no son negativos. $(X(x,y) = (-y - x^3, x - y^3))$.

14. Probar que el sistema $\dot{x} = -y - y^2x^3$, $\dot{y} = x - y^5$ tiene $(0,0)$ asintóticamente estable, pero no existe ninguna función V de Liapunov cuadrática, definida positiva con $\dot{V}$ definida negativa.

15. (a) Encontrar una matriz A en que la transformación T definida en el espacio de matrices simétricas por $T(M) = MA + A^tM$ no sea biyectiva.

    (b) Demostrar que para tales matrices A el sistema $\dot{x} = Ax$ admite una preintegral.

16. Sea A una matriz invertible real $n \times n$, cuyos valores propios tienen parte real negativa. Demostrar que existe un producto interno en R^n tal que con respecto a él, la norma de la matriz e^A es menor que 1. (Es decir, que existe $\lambda > 0$ menor que 1, tal que $\|e^Ax\| \leq \lambda\|x\|$ para todo $x \in R^n$).

    (Sugerencia: elegir el producto interno usando la forma cuadrática $Mx \cdot x$ definida positiva, que es función de Liapunov para el $(0,0)$ en la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$).

17. Demostrar que $(0,0)$ es asintóticamente estable en grande en $\dot{x} = f(x) - y$, $\dot{y} = f(y) + x$, siendo $f : R \mapsto R$ una función continua, lipschitziana, impar y tal que $f(x) < 0$ para todo $x > 0$.

18. Demostrar el siguiente teorema:

    Si existe una función de Liapunov $V : R^n \mapsto R$ definida positiva en 0, tal que $V(x) \to +\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$, y tal que para todo $x \neq 0$, $V(\phi(x,t))$ es estrictamente decreciente con t (donde esté definida), entonces 0 es asintóticamente estable en grande en el futuro.

19. Probar que si 0 es el único punto de equilibrio de $\dot{x} = X(x)$, y existe una función de Liapunov V definida positiva, tal que $V(x) \to +\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$, y tal que $\dot{V}$ es semidefinida negativa que se anula solo en un cerrado Q de puntos aislados, entonces x_0 es asintóticamente estable en grande en el futuro.

20. Demostrar que x_0 es asintóticamente estable en grande en el futuro si y solo si x_0 es un pozo y toda órbita es estable. (Sugerencia: los puntos del borde de la cuenca no pueden ser estables).

21. (a) Dar un ejemplo $\dot{x} = X(x)$ en R^2, en que $(0,0)$ sea punto de equilibrio asintóticamente estable en grande en el futuro, pero que la parte real de los valores propios de $X'(x) + X'(X)^t$ no sean todos negativos para algún x.

    (b) Idem pero que la parte real de los valores propios de $X'(x)$ no sean todos negativos para algún x.

22. Sea $\dot{x} = f(x)$ en R, con $f : R \mapsto R$ continua, $f(x_0) = 0$. Probar que x_0 es asintóticamente estable si y solo si $V(x) = (x - x_0)^2$ es definida positiva con $\dot{V}$ definida negativa en un entorno de x_0.

23. (a) Demostrar que si x_0 es punto de equilibrio asintóticamente estable y K es compacto, contenido en la cuenca de atracción de x_0, entonces x_0 es uniformemente asintóticmante estable en K (sugerencia: usar lema).

    (b) Demostrar que la función $V(x)$ que se construye en la prueba del teorema de Massera, puede extenderse a toda la cuenca de atracción C. (Sugerencia: $g(u)$ está definida para todo $u \geq 0$. Para todo $x_0 \in C$ la integral $\int_0^\infty g(\|\phi(x,s)\|)\, ds$ converge uniformemente en un compacto que contiene a x_0).

24. Demostrar que si x_0 es un punto asintóticamente estable en grande, entonces la función $V(x)$ construida en la prueba del teorema de Massera, se puede definir de modo que cumpla $V(x) \rightarrow= \infty$ cuando $\|x\| \to \infty$.

25. Si la cuenca C de atracción de un pozo x_0 no es todo R^n, entonces investigar qué comportamiento tiene la función $V(x)$ construida en la prueba del teorema de Massera, cuando $x_n \to \bar{x} \in \partial C$.

    (Sugerencia: Dado K compacto en C, y dado T, existe N tal que para todo $n > N$: x_n no pertenece a K y $\{\phi(x_n, t) : 0 \leq t \leq T\}$ no corta a K. entonces $V(x_n) = \int_0^\infty g(\|\phi(x_n, s)\|)\, ds > Tg(\text{diam } K)$ para todo $n > N$).

26. Demostrar los teoremas de Liapunov para homeomorfismos.

27. Demostrar el teorema de Massera para homeomorfismos.

28. Enunciar y demostrar una versión del teorema de Cetaev para homeomorfismos.

29. Si $f : R^n \mapsto R^n$ es un difeomorfismo tal que $f(0) = 0$ y $f'(0)$ tiene valores propios con módulo menor que 1, probar que 0 es asintóticmante estable. (Sugerencia: Utilizando la norma adaptada del ejercicio 16 , con la matriz $A = \log f'(0)$ escribir $f(x) = Ax + \Delta(x)$ con $\|\Delta(x)\|/\|x\| \to_{x\to 0} 0$.)

30. Sea $\dot{x} = y + (1-\rho^2)x$, $\;\dot{y} = -x + (1-\rho^2)y$ donde $\rho^2 = x^2 + y^2$.

    (a) Verificar que la circunferencia unitaria S^1 es una órbita periódica.

    (b) Probar que S^1 es orbitalmente estable.

    (c) Probar que todas las órbitas son estables.

    (Sugerencia: En polares $\dot{\rho} = \rho(1-\rho^2)$, $\;\dot{\varphi} = -1$, entonces $\rho(t) \to_{t\to+\infty} 1$ y todas las órbitas se recorren con la misma velocidad angular).

31. Sea

$$\dot{x} = \rho y - x\frac{(\rho-1)^3}{\rho}, \quad \dot{y} = \rho x - y\frac{(\rho-1)^3}{\rho}$$

    donde $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$

(a) Verificar que la circunferencia unitaria es una órbita periódica, y que es orbitalmente estable.

(b) Probar que S^1 no es estable y que las demás órbitas sí lo son. (Sugerencia: En polares integrando queda $\rho(t) \to_{t\to+\infty} 1$ y $\varphi(t) = \varphi_0 + t + 1/(\|\rho_0 - 1\|)(1-(1-2t(\|\rho_0-1\|)^{1/2}))$ si $\rho_0 \neq 1$, pero $\varphi(t) = \varphi_0 + t$ si $\rho_0 = 1$)