TEORIA ERGODICA

Eleonora Catsigeras

Apuntes para el curso de Maestría en Matemática.
Marzo de 2005.

CAPITULO 1
DINÁMICA QUE PRESERVA MEDIDA, RECURRENCIA Y TRANSITIVIDAD.

1. Dinámica de los automorfismos de medida.

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $T : X \mapsto X$ una transformación medible, es decir $T^{-1}(A) \in \mathcal{A} \ \forall A \in \mathcal{A}$.

Definición 1.1 Se llama *sistema dinámico por iterados de T* a la aplicación que a cada $n \in \mathbb{N}$ le hace corresponder la transformación $T^n : X \mapsto X$ donde $T^n = T \circ T \ldots \circ T$ n veces, si $n \geq 1$ y $T^0 = id$. Si T es invertible entonces sistema dinámico por iterados de T es también la aplicación que a cada $n \in \mathbb{Z}$ le hace corresponder T^n.

Se observa que $T^{n+m} = T^n \circ T^m$. Esta propiedad algebraica se llama *propiedad de grupo.* Significa que el sistema dinámico es una acción del grupo de los enteros (si T es invertible) en el espacio X.

Definición 1.2 Se llama *órbita positiva o futura $o^+(x)$* por el punto $x \in X$, y x se llama estado inicial de la órbita, a la sucesión $\{T^n(x)\}_{n \in N}$. Si T es invertible se llama órbita negativa o pasada a la sucesión $\{T^{-n}(x)\}_{n \in N}$ y se llama *órbita $o(x)$* a la sucesión bi-infinita $\{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Se observa que $T^{n+m}(x) = T^n(T^m(x))$ y por lo tanto el iterado $T^m(x)$ es el estado inicial de la órbita por x que se obtiene corriendo el instante 0 al que antes era instante m.

Definición 1.3 *Punto fijo* (o periódico de período 1) es x_0 tal que $T(x_0) = x_0$. *Punto periódico* es x_0 tal que existe $p \geq 1$ tal que $T^p(x_0) = x_0$. El período es el mínimo $p \geq 1$ que cumple lo anterior. Se observa, a partir de la propiedad de grupo, que si un punto es periódico de período p entonces su órbita está formada por exactamente p puntos.

Definición 1.4 Sea T medible en un espacio $(X, \mathcal{A})$. Una medida μ se dice que es *invariante por T, o que T preserva μ, (se dice también que T es un automorfismo del espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$),* si

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \ \ \forall A \in \mathcal{A}$$

Se observa que pueden no existir medidas de probabilidad invariantes para cierta $T : X \mapsto X$ transformación medible dada, como se muestra en un ejemplo más abajo, pero:

Teorema 1.5 *Si X es un espacio métrico compacto, $\mathcal{A}$ es la sigma-algebra de Borel y T es CONTINUA, entonces existe* (frecuentemente infinitas) *medida de probabilidad invariante.* Este teorema se demuestra en el capítulo 6.

Ejercicio 1 *Sea $T : (X, \mathcal{A}, \mu) \mapsto (Y, \mathcal{B}, \nu)$ un isomorfismo de espacios de medida. Esto es una transformación bimedible (medible, invertible con inversa medible) tal que preserva las medidas, es decir $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ $\forall B \in \mathcal{B}$. Mostrar que la inversa T^{-1} también es un isomorfismo de espacios de medida.*

Ejemplo 1.6 Sea $T : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ tal que $T(x) = 1/2x$ si $x \neq 0$ y $T(0) = 1 \neq 0$. Afirmamos que: *No existe medida de probabilidad invariante por T.*

Demostración: Si existiera, llamémosla μ. Consideremos la partición de intervalo (0,1] dada por los subintervalos disjuntos dos a dos $A_n = (1/2^{n+1}, 1/2^n]$ para $n \in I\!N$. Se cumple $T^{-1}(A_n) = A_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Como μ es T invariante se deduce $\mu(A_n) = \mu(A_0)$ $\forall n \geq 0$. Se tiene $\mu((0, 1] = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_0) \leq 1$. Luego $\mu(A_0) = 0$, de donde $\mu((0, 1]) = 0$ y $\mu(\{0\}) = 1$. Luego $\mu(T^{-1}(\{0\})) = 1$ lo cual es absurdo porque $T^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. $\square$

Ejemplo 1.7 Sea en S^1 la rotación $T(e^{2\pi i x}) = e^{(2\pi i)(x+a)}$, donde a es una constante real. Si a es racional, T se llama *rotación racional* en el círculo, y si a es irracional, T es *rotación irracional.* A través de la proyección $\Pi : I\!R \mapsto S^1$ dada por $\Pi(x) = e^{2\pi i x}$, la medida de Lebesgue m en $I\!R$ induce una medida $m_\sim$ en S^1 dada por $m_\sim(A) = m(\Pi^{-1}(A) \cap [0, 1])$. Esta medida $m_\sim$ se llama medida de Lebesgue en el círculo. Como m en $I\!R$ es invariante por traslaciones, es fácil probar que $m_\sim$ es invariante por las rotaciones.

Ejercicio 2 Probar que para la rotación racional en el círculo todos los puntos son periódicos con el mismo período. Probar que la rotación irracional en el círculo no tiene puntos periódicos. Probar que la medida de Lebesgue en el círculo es invariante por las rotaciones.

Observación 1.8 Aunque no es inmediato, se puede probar que *todas las órbitas de la rotación irracional del círculo son densas. Lo probaremos en el capítulo 3.*

Ejercicio 3 Probar que si $T : X \mapsto X$ es medible entonces T preserva la medida μ si y solo si para toda $f \in L^1(\mu)$ se cumple

$$\int f \circ T \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Proposición 1.9 *Sea $T : X \mapsto X$ una transformación medible en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$. Si μ es una medida sigma-finita y $\mathcal{A}_0$ es un álgebra que genera a $\mathcal{A}$ tal que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}_0$ entonces μ es invariante por T.*

Demostración: Sea $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ definida para todo $A \in \mathcal{A}$. En la subálgebra $\mathcal{A}_0$ la premedida ν coincide con la premedida μ (ambas restringidas a la subálgebra son premedidas). Como existe una única extensión de una premedida dada en un álgebra a la sigma álgebra generada, entonces $\mu = \nu$ en $\mathcal{A}$. $\square$

Corolario 1.10 *Si $T : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^k$ es una transformación Borel medible y μ es una medida σ-finita tal para todo conjunto A que sea unión finita de rectángulos de R^k se cumple $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ entonces μ es invariante por T en toda la sigma-álgebra de Borel.*

Ejercicio 4 Tent map Sea el intervalo [0,1] dotado de la sigma álgebra de Borel. Sea $T : [0,1] \mapsto [0,1]$ dada por $T(x) = 2x$ si $x \in [0, 1/2]$ y $T(x) = 2 - 2x$ si $x \in [1/2, 1]$. Probar que preserva la medida de Lebesgue en el intervalo. (Sugerencia: graficar T y probar que la preimagen de un intervalo I tiene la misma medida que I. Usar el corolario anterior.

2. Dinámica topológica y diferenciable.

Decimos simplemente $T : X \mapsto X$ continua cuando X es un espacio topológico, $\mathcal{A}$ es la sigma-álgebra de Borel y T es una aplicación continua. Decimos simplemente $T : X \mapsto X$ diferenciable (resp. T es un difeomorfismo de clase C^k) cuando X es una variedad diferenciable, $\mathcal{A}$ es la sigma-álgebra de Borel y T es una aplicación diferenciable (resp. difeomorfismo de clase C^k).

Definición 2.1 Sea $T : X \mapsto X$ Borel medible en un espacio métrico X. Decimos que un punto periódico x_0 de período p es *un atractor* si existe un entorno V de x_0 invariante hacia delante por T^p (es decir $T^p(V) \subset V$) y tal que

$$\operatorname{dist}(T^n(x_0), T^n(y))_{n \to +\infty} \to 0 \ \ \forall y \in V$$

Cuando T es invertible con inversa medible decimos que un punto periódico x_0 de período p es *un repulsor* si existe un entorno V de x_0 invariante hacia atrás por T^p (es decir $T^{-p}(V) \subset V$) y tal que

$$\operatorname{dist}(T^n(x_0), T^n(y))_{n \to -\infty} \to 0 \ \ \forall y \in V$$

Afirmación 2.2 *Si $f : S^1 \mapsto S^1$ es un difeomorfismo de clase C^1 que preserva la orientación (i.e. $f' > 0$), y x_0 es un punto periódico de período p tal que la derivada $(f^p)'(x_0)$ es menor que 1 entonces x_0 es un atractor, y si $(f^p)'(x_0)$ es mayor que 1 entonces x_0 es un repulsor.*

Demostración: Demostremos la primera afirmación renombrando como f a la transformación f^p. Entonces x_0 resulta fijo. La segunda afirmación se obtiene de la primera usando f^{-p} en lugar de f^p. Grafíquese $f(x)$ para $x \in S^1 \approx [0,1]$ del intervalo $[0,1]$ en sí mismo, en el que se ha identificado el 0 con el 1 en el punto en el punto x_0. La gráfica de f corta a la diagonal por lo menos en el punto $0 \sim 1 = x_0$ Gráficamente los iterados futuros de y en un entorno de x_0 suficientemente pequeño, se obtienen trazando la vertical de abscisa y, cortándola con la gráfica de f, trazando luego la horizontal por ese punto, cortándola con la diagonal, trazando la vertical por ese punto, cortándola con la gráfica de f, y así sucesivamente. Si la función es continua con derivada continua, y la derivada en el punto fijo x_0 es menor que uno, entonces los sucesivos puntos en la gráfica de f obtenidos por la construcción anterior tienden monótonamente al punto fijo x_0. $\square$

Definición 2.3 *Un punto periódico x_0 con período p de un difeormofismo $f : X \mapsto X$ se dice* hiperbólico *si los valores propios de la derivada de f^p en x_0 tienen todos módulo diferente de 1.*

Consecuencia: Si x_0 es un punto periódico hiperbólico de un difeomorfismo de clase C^1 del círculo, que preserva la orientación, entonces es un atractor (si $(f^p)'(x_0) < 1$) o es un repulsor (si $(f^p)'(x_0) > 1$)

Exponente de Lyapounov negativo significa contracción exponencial: *Si f es un difeomorfismo de clase C^1 en S^1 y x_0 es un punto fijo atractor hiperbólico (i.e. $f'(x_0) < 1$), entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\ dist(f^n(x), x_0)}{n} = -\lambda < 0 \ \ \forall x \textit{en algún entorno de } x_0$$

donde $-\lambda = \log f'(x_0) < 0$ se llama exponente de Lyapounov en x_0.

Ejercicio 5 Demostrar la afirmación anterior. Sugerencia: Probar que

$$\frac{\mathrm{dist}\,(f^{n+1}(x), x_0)}{\mathrm{dist}\,(f^n(x), x_0)} \to e^{-\lambda}$$

Interpretación: *La distancia de $f^n(x)$ al atractor hiperbólico se contrae exponencialmente con tasa asintótica igual al exponente de Lyapounov $-\lambda < 0$.*

Exponente de Lyapounov positivo significa expansión exponencial: *Si f es un difeomorfismo de clase C^1 en S^1 y x_0 es un punto fijo repulsor hiperbólico (i.e. $f'(x_0) > 1$) entonces*

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{\log\ dist(f^n(x), x_0)}{n} = \mu > 0 \ \ \forall x \textit{en algún entorno de } x_0$$

donde $\mu = \log f'(x_0) > 0$ se llama exponente de Lyapounov en x_0.

Ejercicio 6 Demostrar la afirmación anterior. Sugerencia: Probar que

$$\frac{\mathrm{dist}\,(f^{n+1}(x), x_0)}{\mathrm{dist}\,(f^n(x), x_0)} \to e^{\mu}$$

Interpretación: *La distancia de $f^n(x)$ al repulsor hiperbólico se dilata exponencialmente con tasa asintótica igual al exponente de Lyapounov $\mu > 0$.*

Ejercicio 7 Llamaremos *sección de flujo polo norte-polo sur* a un difeomorfismo $f : S^1 \mapsto S^1$ de clase C^1, que preserva la orientación, y tal que existen solo 2 puntos fijos N y S, y son ambos hiperbólicos, N repulsor y S atractor. Dibujarlo en $[0,1]_{mod1}$ tomando $0 \sim 1 = N$. Demostrar que todas las órbitas excepto N y S son monótonas y convergen a S. (Sugerencia: ver prueba de la afirmación 2.2.) Demostrar que las únicas medidas de probabilidad invariantes son las combinaciones lineales convexas de δ_N y δ_S. Sugerencia: considerar una partición numerable del intervalo $(0, S)$ formado por $A_n = (x_n, x_{n+1})$ para $n \in \mathbb{Z}$ donde x_0 se elige cualquiera en $(0, S)$. Usando argumento similar a la prueba del ejemplo 1.6, probar que $\mu(0, S) = 0$. Análogamente probar que $\mu(S, 1) = 0$ de donde $\mu(\{N, S\}) = 1$.

Definición 2.4 Un difeomorfismo $f : S^1 \mapsto S^1$ se dice que es *Morse-Smale* si existen exactamente una cantidad finita de puntos periódicos (todos del mismo período) y son ellos todos hiperbólicos.

Ejercicio 8 Probar que en un difeomorfismo f Morse-Smale que preserva la orientación en el círculo las únicas medidas invariantes son las combinaciones lineales convexas de las medidas

$$\frac{\delta_{x_0} + \delta_{f(x_0)} + \ldots + \delta_{f^{p-1}(x_0)}}{p}$$

donde x_0 es un punto periódico de período p. Sugerencia: Graficar f^p en $S^1 = [0,1]/\sim$ donde $0 \sim 1$ es un punto periódico de período p. Probar que los atractores y los repulsores se alternan. Probar que para toda medida invariante el arco entre un repulsor y un atractor consecutivos tiene medida cero, usando el procedimiento del ejercicio 7.

Definición 2.5 Recurrencia topológica. Sea $T : X \mapsto X$ una transformación Borel medible en un espacio topológico X. Sea $x \in X$. Se llama *omega límite de* x al conjunto

$$\omega(x) = \{y \in X : \exists n_j \to +\infty \text{ tal que } T^{n_j}(x) \mapsto y\}$$

Cuando T es invertible se llama *alfa límite de* x al conjunto

$$\alpha(x) = \{y \in X : \exists n_j \to -\infty \text{ tal que } T^{n_j}(x) \mapsto y\}$$

Un punto x se dice *recurrente* si

$$x \in \omega(x)$$

Dicho de otra forma x es recurrente si existe una subsucesión $n_j \to +\infty$ tal que $T^{n_j}(x) \to x$. Luego para todo entorno V de x existe una subsucesión $n_j \in I\!N$ tal que $T^{n_j}(V) \cap V \neq \emptyset$.

Definición 2.6 Conjunto no errante. Sea $T : X \mapsto X$ una transformación Borel medible en un espacio topológico X. Un punto $x \in X$ es *no errante* si para todo entorno V de x existe una sucesión $n_j \to +\infty$ tal que $T^{n_j}(V) \cap V \neq \emptyset$. El conjunto de los puntos no errantes de T (que puede ser vacío) se denota como $\Omega(T)$ y se llama *conjunto no errante.*

Ejercicio 9 Sea X un espacio topológico y $T : X \mapsto X$ Borel medible Probar que el conjunto de los puntos recurrentes está contenido en el conjunto no errante $\Omega(T)$, (el recíproco no es necesariamente cierto como se verá más adelante). Sea μ una medida de probabilidad invariante por T. Si X tiene base numerable de abiertos probar (sin usar el enunciado del teorema de recurrencia de Poincaré que viene más adelante) que $\mu(\Omega(T)) = 1$, es decir: casi todo punto es no errante para cualquier medida de probabilidad invariante por T. Sugerencia: Probar que para todo V de la base de abiertos que tenga medida positiva la sucesión de conjuntos medibles $T^{-n}(V)$, $n \in I\!N$ no puede ser de conjuntos disjuntos dos a dos a partir de un cierto n_0 en adelante. Deducir que existe una subsucesión $n_j \to +\infty$ tal que $T^{-n_j}(V) \cap V \neq \emptyset$ y esto implica $V \cap T^{n_j}(V) \neq \emptyset$. Un punto es errante (no es no errante) si está contenido en algún V abierto tal que no cumple lo anterior. Deducir que los puntos errantes forman un conjunto de medida nula.

Definición 2.7 Transitividad topológica Sea X un espacio topológico y $T : X \mapsto X$ Borel medible. Se dice que T es *transitiva* si dados dos abiertos U y V no vacíos, existe $n \geq 1$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Supóngase que X es de Hausdorff sin puntos aislados. Es fácil probar que *si existe una órbita positiva densa entonces T es transitiva.* Y si además, T es continua y el espacio topológico tiene base numerable de abiertos y es de Baire (esto es: toda intersección numerable de abiertos densos es densa) entonces T *es transitiva si y solo si existe una órbita positiva densa.*

La transitividad significa que para cualquier abierto U, por pequeño que sea, *los iterados positivos de U transitan por todo el espacio desde el punto de vista topológico* (es decir, por todos los abiertos del espacio).

Observación 2.8 Se observa que para dos conjuntos cualesquiera U y V:

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \text{ si y solo si } T^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset$$

Es fácil ver que si T es continua y transitiva, entonces dados dos abiertos U y V no vacíos, existe $n_j \to +\infty$ tal que $T^{-n_j}(V) \cap U \neq \emptyset$. En particular, tomando $U = V \ni x$, se deduce que:

Si $T : X \mapsto X$ es continua y transitiva entonces $\Omega(T) = X$.

Definición 2.9 Ergodicidad I

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida de probabilidad y $T : X \mapsto X$ medible que preserva μ. Se dice que T es *ergódica* respecto a la medida μ, o que μ es una *medida ergódica* para T, si dados dos conjuntos medibles con medida positiva U y V existe $n \geq 1$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Nota: La ergodicidad es similar a la transitividad topológica pero en un contexto medible.

Definición 2.10 Ergodicidad II

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida de probabilidad y $T : X \mapsto X$ medible que preserva μ. Se dice que T *es ergódica* respecto a la medida μ, o que μ es una *medida ergódica* para T, si todo conjunto medible A que sea invariante por T (es decir $T^{-1}(A) = A$) tiene o bien medida nula o bien medida 1.

Teorema 2.11 *T es ergódica según la definición I para la medida de probabilidad μ si y solo si es ergódica según la definición II.*

Demostración: Si A es invariante por T y tiene medida positiva distinta de 1, entonces el complemento A^c de A es también invariante por T y tiene medida positiva. Entonces toda órbita positiva con estado inicial en A está contenida en A; luego no existe $n \in I\!N$ tal que $T^n(A)$ intersecta a A^c y T no ergódica según la definición I.

Recíprocamente, si todo conjunto A invariante por T tiene medida o bien nula o bien 1, y si U y V son conjuntos medibles con medida positiva tales que $\cup_{n \in I\!N} T^{-n}(V) \cap U = \emptyset$ entonces el conjunto

$$A = \cap_{m \in I\!N} T^{-m}(\cup_{n \in I\!N} T^{-n}(V))$$

es medible, invariante por T y tiene medida positiva, pero no intersecta a U que también tiene medida positiva. De lo anterior se deduce que A no puede tener medida 1, con lo que encontramos un conjunto invariante con T que tiene medida positiva menor que 1, contradiciendo la hipótesis. $\square$

Definición: Una medida de Borel μ en un espacio topológico se dice *positiva sobre abiertos* si $\mu(V) > 0$ para todo abierto V no vacío.

Ejercicio 10 Sea X un espacio topológico y $T : X \mapsto X$ Borel medible que preserva una medida de probabilidad μ que es positiva sobre abiertos. Probar que si T es ergódica respecto de μ entonces T es transitiva.

Ejercicio 11 Probar que los difeomorfismos Morse-Smale en el círculo tienen medidas ergódicas pero no son transitivos topológicamente.

En el capítulo 6 probaremos que *si T es continua en un espacio métrico compacto entonces existen (usualmente muchas) medidas ergódicas para T.*

En otros capítulos demostraremos que *la medida de Lebesgue es ergódica para la rotación irracional del círculo.* Luego existe alguna órbita densa. Es fácil ver, usando que la rotación en el círculo conserva las distancias, que al existir una órbita densa, *todas las órbitas son densas.*

También probaremos que el *tent map en el intervalo es ergódico respecto a la medida de Lebesque. Luego es transitivo.*

3. Recurrencia.

Observación 3.1 Recurrencia topológica *Sea $T : X \mapsto X$ Borel medible en un espacio topológico X. Si un punto x es recurrente (ver definición 2.5), entonces* para todo entorno V de x existen infinitos iterados hacia el futuro de x en V. Mejor dicho: existe $n_j \to +\infty$ tal que $T^{n_j}(x) \in V$. *Si el espacio topológico tiene base local numerable entonces también vale el recíproco.*

Definición 3.2 *Sea $T : X \mapsto X$ medible en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$. Sea $E \in \mathcal{A}$. Un punto* $x \in E$ vuelve infinitas veces a E *si existen infinitos iterados hacia el futuro de x en E. Mejor dicho: existe $n_j \to +\infty$ tal que $T^{n_j}(x) \in E$.*

Ver enunciados y demostraciones de los siguientes dos teoremas de recurrencia de Poincaré en las páginas 32 a 35 del libro Introducao à Teoría Ergódica, de Ricardo Mañé, Ed. IMPA Projeto Euclides, Río de Janeiro, 1983.

Teorema 3.3 Teorema de recurrencia de Poincaré. Versión medible

Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ. Sea E un conjunto medible tal que $\mu(E) > 0$. Entonces μ-c.t.p de E vuelve infinitas veces a E.

Ver demostración en el libro de Mañé: páginas 33 y 34.

Teorema 3.4 Teorema de recurrencia de Poincaré. Versión topológica

Sea $T : X \mapsto X$ Borel-medible en un espacio topológico X con base numerable. Si T preserva una medida de probabilidad μ, entonces μ-c.t.p. es recurrente (es decir $x \in \omega(x)$ μ-c.t.p. $x \in X$).

Demostración: Sea $\{V_j\}_{j \in I\!N}$ una base de abiertos. Por 3.1 $x \notin \omega(x)$ si y solo si $x \in \cup_{j \in I\!N} A_j$ donde $A_j = \{x \in V_j : x$ no vuelve infinitas veces a $V_j\}$. Por 3.3 $\mu(A_j) = 0$ Luego, la unión numerable de los conjuntos A_j, que coincide con el conjunto de los puntos no recurrentes, tiene μ medida nula. $\square$

Ejercicio 12 Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una probabilidad μ. Sea $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) > 0$. Probar que

$$\sum_{n \in I\!N} \chi_E(T^n(x))$$

diverge μ- c.t.p $x \in E$

Ejercicio 13 Sea $T : X \mapsto X$ Borel medible en el espacio topológico X compacto , y preservando una medida de probabilidad μ. Sea supp (μ) el soporte topológico de μ (i.e. el mínimo compacto con medida μ igual a 1). Probar que $\emptyset \neq \text{supp}(\mu) \subset \overline{\text{Rec}(T)}$ siendo $\text{Rec}(T)$ el conjunto de los puntos recurrentes de T.

Teorema 3.5 Teorema de Hopf. *Sea $T : I\!R^k \mapsto I\!R^k$ Borel bimedible (medible, invertible con inversa medible) que preserva la medida de Lebesgue m. Entonces casi todo punto de $I\!R^n$ o bien es recurrente o bien tiene omega límite vacío.*

Ejercicio 14 Demostrar el teorema de Hopf enunciado antes. Sugerencia: $I\!R^k = \cup_{i \in I\!N} X_i$ donde X_i es una bola abierta de radio $r_i \to +\infty$ creciente con i. Sea $\tilde{X}_i = \{x \in X_i : T^j(x) \in X_i$ para infinitos valores positivos de $j\}$. Sea $\tilde{T}_i : \tilde{X}_i \mapsto \tilde{X}_i$ la transformación que a cada $x \in \tilde{X}_i$ hace corresponder el primer retorno a $\tilde{X}_i$: $\tilde{T}(x) = T^j(x) \in \tilde{X}_i$ para el mínimo $j = j(x)$ natural positivo que cumpla lo anterior. Probar que $m(\tilde{T}_i \tilde{X}_i) = m(\tilde{X}_i)$; luego c.t.p. de $\tilde{X}_i$ está en la imagen de $\tilde{T}_i$. Probar que $\tilde{T}_i$ preserva m. Aplicar el teorema de recurrencia de Poincaré para deducir que m-c.t.p de $\tilde{X}_i$ es recurrente. Probar que c.t.p. de X_i o bien es recurrente o bien su omega límite no intersecta a X_i.

4. Automorfismo lineal en el toro.

Sea el toro $T^2 = I\!R^2/\sim$ donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por:$(a, b) \sim (c, d)$ en T^2 si $c - a$ y $d - b$ son enteros. (Otra notación que se usa para $I\!R^2/\sim$ es $I\!R^2|_{mod Z\!\!\!Z^2} = I\!R^2/Z\!\!\!Z^2$.)

Sea $\Pi : I\!R^2 \mapsto Z\!\!\!Z^2$ la proyección del espacio de recubrimiento $I\!R^2$ del toro definida por $\Pi(a, b) = (a, b)_{mod Z\!\!\!Z^2}$ donde esto último indica la clase de equivalencia de $(a, b) \in I\!R^2$.

Sea $f : T^2 \mapsto T^2$ dada por

$$f(x) = \Pi(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\Pi^{-1}(x)))$$

Llamaremos a f automorfismo lineal de matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro, o simplemente "$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro". Abusando de la notación a un punto $x \in T^2$ lo denotaremos con cualquier representante suyo $(a, b) \in I\!R^2$: $(a, b) \in \Pi^{-1}(\{x\})$.

Ejercicio 15 *Probar que $(0, 0)$ es el único punto fijo por la transformación $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro. Probar que $\{(1/5,\ 2/5),\ (4/5,\ 3/5)\}$ y $\{(3/5,\ 1/5),\ (2/5,\ 4/5)\}$ son dos órbitas periódicas por f y que son las únicas de período 2. Probar que $\{(1/2,\ 1/2),\ (1/2,\ 1),\ (1,\ 1/2)\}$ es una órbita periódica de período 3.*

La topología en el toro es el cociente de la topología usual en $I\!R^2$. Es metrizable y la métrica está dada por $\text{dist}\,(x, y) = \text{mín}\{\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} : (a, b) \in \Pi^{-1}(x), (c, d) \in \Pi^{-1}(y)\}$.

La medida de Lebesgue en el toro es la medida de Borel $\tilde{m}$ definida por $\tilde{m}(B) = m(\Pi^{-1}B \cap [0, 1]^2)$ donde m es la medida de Lebesgue en $I\!R^2$. Se observa que la medida de Lebesgue en el toro es una medida de probabilidad. Si no diera lugar a confusión renombraremos como m a la medida de Lebesgue en el toro.

Proposición 4.1 *La medida de Lebesgue m en el toro es invariante por la transformación* $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Demostración: Sea B un boreliano en el toro.

$$m(f^{-1}(B)) = \int \chi_{f^{-1}(B)}(x)\, dm(x) = \int \chi_B \circ f(x)\, dm(x)$$

Haciendo el cambio de variables lineal e invertible $z = f(x)$ en la integral anterior resulta

$$m(f^{-1}(B)) = \int \chi_B(z) J(z)\, dm(z)$$

donde $J(z) = |detDf^{-1}(z)| = |detDf(x)|^{-1}$ es el jacobiano del cambio de variables $z = f(x)$. Como en nuestro caso $J(z) = (detA)^{-1} = 1 \;\; \forall z \in T^2$, resulta

$$m(f^{-1}(B)) = \int \chi_B(z)\, dm(z) = m(B) \;\; \square$$

Dinámica del isomorfismo lineal en el toro.

Estudiemos la dinámica por iterados de la transformación lineal $F : I\!R^2 \mapsto R^2$ que tiene como matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

F se llama levantado de f a $I\!R^2$ y f se llama proyección de F en el toro. La dinámica de F está relacionada fuertemente con la dinámica de su proyección f en el toro.

En efecto la proyección $\Pi : I\!R^2 \mapsto T^2$ *cuando restringida a un entorno suficientemente pequeño del origen* $(0,0)$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

Π transforma la dinámica de F en la de f. Más precisamente

$$\Pi \circ F = f \circ \Pi$$

Luego, aplicando $\Pi : I\!R^2 \mapsto T^2$ a una órbita de F se obtiene una órbita de f. Y la preimagen por Π de una órbita por f es una infinidad numerable de órbitas por F tal que una se obtiene de otra trasladándola en $I\!R^2$ según un vector de coordenadas enteras.

El comportamiento topológico local de las órbitas de F en un entorno suficientemente pequeño V del origen es el mismo (a menos del homeomorfismo $\Pi|_V$) que el de las órbitas de f en el abierto $\Pi(V)$.

Variedades invariantes.

Los valores propios de la matriz A son $(3+\sqrt{5})/2 > 1$ y $(3-\sqrt{5})/2 < 1$ y las direcciones propias respectivas tienen pendientes irracionales, la primera positiva y la segunda negativa. Se deduce que las dos rectas que pasan por el origen y tienen direcciones según los vectores propios de la matriz A son invariantes por F en el plano. Entonces sus proyecciones en el toro son curvas invariantes por f y se cortan transversalmente en el origen (y en todos sus otros puntos de intersección en el toro).

F restringida a la recta r_1 que tiene dirección propia de valor propio mayor que 1, expande las distancias exponencialmente con tasa $\log(3+\sqrt{5})/2 > 0$. Proyectando r_1 en el toro se obtiene una curva $W^u(0,0)$ inmersa en el toro, que se llama *variedad inestable por* $(0,0)$.

$W^u(0,0)$ pasa por el origen, *es densa en el toro* (esto se puede demostrar usando que la pendiente de r_1 en el plano es irracional y usando que la rotación irracional en el círculo es densa en el círculo), *es invariante por f y cumple:*

$$W^u(0,0) = \{y \in T^2 : \lim_{n \to -\infty} f^n(y) = (0,0)\}$$

Esto último se debe a que $r_1 = \{(a,b) \in I\!R^2 : \lim_{n\to-\infty} F^n(a,b) = (0,0)\}$.

Análogamente F restringida a la recta r_2 que tiene dirección propia de valor propio menor que 1, contrae las distancias exponencialmente con tasa $\log(3-\sqrt{5})/2 < 0$. Proyectando r_2 en el toro se obtiene una curva $W^s(0,0)$ inmersa en el toro, que se llama *variedad estable por* $(0,0)$.

$W^s(0,0)$ pasa por el origen, *es densa en el toro* (porque la pendiente de r_2 en el plano es irracional), *es invariante por f* y cumple:

$$W^s(0,0) = \{y \in T^2 : \lim_{n \to +\infty} f^n(y) = (0,0)\}$$

Esto último se debe a que $r_2 = \{(a,b) \in I\!R^2 : \lim_{n\to+\infty} F^n(a,b) = (0,0)\}$.

Definición 4.2 Punto hiperbólico tipo silla y sus exponentes de Lyapounov.

Sea $f : X \mapsto X$ diferenciable. Se llama *punto fijo hiperbólico* a un punto fijo x_0 tal que los valores propios Df_{x_0} tienen todos módulo diferente de 1. Si la variedad X es de dimensión dos, un punto fijo se llama *punto silla* si un valor propio es real mayor que 1 y el otro es real menor que 1.

El logaritmo de los valores propios de $Df(x_0)$ se llaman *exponentes de Liapunov* en el punto fijo x_0.

En el ejemplo del $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ los logaritmos de los valores propios de $A = Df(0,0)$ son dos, uno positivo y el otro negativo. El origen es un punto fijo hiperbólico tipo silla.

El exponente de Liapunov $\mu = \log(3+\sqrt{5})/2 > 0$ positivo se interpreta como *la tasa* (asintótica hacia el pasado) *exponencial de dilatación* en un entorno suficientemente pequeño del punto fijo a lo largo de la variedad inestable por ese punto. Más precisamente

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{\log \text{dist}\,(f^n(y),(0,0))}{n} = \mu \ \ \forall y \in W^u(0,0)$$

El exponente de Liapunov $-\lambda = \log(3-\sqrt{5})/2 < 0$ negativo se interpreta como *la tasa* (asintótica hacia el futuro) *exponencial de contracción* en un entorno suficientemente pequeño del punto fijo a lo largo de la variedad estable por ese punto. Más precisamente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \text{dist}\,(f^n(y),(0,0))}{n} = -\lambda \ \ \forall y \in W^s(0,0)$$

Ejercicio 16 Sea f la transformación $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro. Probar que m- c.t.p es recurrente pero que hay puntos no recurrentes (Sugerencia: $y \in W^s(0,0) \setminus \{(0,0)\}$ no es recurrente). Probar que dados dos abiertos U y V cualesquiera en el toro, existe una subsucesión n_j de naturales tales que $f^{n_j}U \cap V \neq \emptyset$. (Sugerencia: Usar que $W^u((0,0))$ es invariante por f y admítase que para cualquier arco compacto $K \subset W^u(0,0)$ la unión de sus iterados hacia el futuro $\cup_{n\in I\!N} f^n(K)$ es densa en el toro.)

Deducir que f es transitiva.

Probar que todo punto es no errante. Concluir que si bien todo punto recurrente es no errante, no necesariamente todo punto no errante es recurrente.

En los capítulos siguientes probaremos que la transformación $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro es *ergódica respecto a la medida de Lebesgue, luego es transitiva topológicamente.*

5. Transformación de Billar

Los billares proveen ejemplos de transformaciones medibles en superficies cilíndricas de dimensión 2 que preservan una medida natural que es absolutamente continua a la medida de Lebesgue en el cilindro. Ver páginas 20 a 21 del texto Introducao à Teoría Ergódica, de Ricardo Mañé. Ed. IMPA Projeto Euclides, Río de Janeiro, 1983.