TEORIA ERGODICA

Eleonora Catsigeras

Apuntes para el curso de Maestría en Matemática.
Marzo de 2005.

CAPITULO 2
ERGODICIDAD Y MIXING

1 Teoremas ergódicos

Definición 1.1 Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ (no necesariamente ergódica). Sea $f \in L^p(\mu)$ para $1 \leq p \in I\!N$.

Se denota con $\widetilde{f}^+$ o simplemente con $\tilde{f}$ al límite de los llamados *promedios orbitales de Birkhoff hacia el futuro* de f, en los puntos $x \in X$ donde exista, esto es:

$$\widetilde{f}^+(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(f(x) + f \circ T(x) + \dots f \circ T^{n-1})$$

Si además T es invertible, se denota con $\widetilde{f}^-$ al límite de los promedios orbitales de Birkhoff hacia el pasado, en los puntos x donde está definido, esto es:

$$\widetilde{f}^-(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(f(x) + f \circ T^{-1}(x) + \dots f \circ T^{-(n-1)}(x))$$

Teorema 1.2 Teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin

Si $T : X \mapsto X$ es medible que preserva una medida de probabilidad μ entonces:

a) Para toda $f \in L^1(\mu)$ existe $\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$ μ-c.t.p. $x \in X$.

b) $\tilde{f}$ es T-invariante, es decir : $\widetilde{f} \circ T = \widetilde{f}$ μ-c.t.p. Más aún, para todo $x \in X$ existe $\widetilde{f}(x)$ si y solo si existe $\widetilde{f}(T(x))$ y en ese caso $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(T(x))$.

c) Si $f \in L^p(\mu) \subset L^1(\mu)$ para $p \in I\!N, p \geq 1$, entonces $\widetilde{f} \in L^p(\mu)$ y la convergencia es también en $L^p(\mu)$.

d) $\int f \, d\mu = \int \widetilde{f} \, d\mu$

Demostración: Ver las secciones 1 y 2 del complemento al capítulo 2 de estas notas. Alternativamente ver las páginas 114 a 122 del texto Introducao à Teoría Ergódica, de Ricardo Mañé. Ed. IMPA Projeto Euclides, Río de Janeiro, 1983.

Corolario 1.3 Promedios orbitales hacia el futuro y hacia el pasado. *Si T es medible, invertible, con inversa medible, y preserva una medida de probabilidad μ, entonces para toda $f \in L^1(\mu)$ se cumple $\widetilde{f}^+$ y $\widetilde{f}^-$ existen μ-c.t.p. y son iguales $\widetilde{f}^+ = \widetilde{f}^-$ μ-c.t.p.*

Ejercicio 1 Probar el corolario 1.3. (Sugerencia: ver Mañé, página 123.)

Corolario 1.4 Promedios de medida de transitividad medible.
Para todos A y B medibles existe el límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B)$$

Demostración:

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int \chi_{T^{-j}(A)} \chi_B \, d\mu = \int (\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j) \chi_B \, d\mu$$

El integrando a la derecha de la igualdad anterior está dominado por $1 \in L^1(\mu)$. Por el teorema de convergencia dominada $\lim I_n = \int \widetilde{\chi}_A \chi_B \, d\mu$ $\square$

Corolario 1.5 Una generalización del teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin.
Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ. Sea $f_n \in L^1(\mu)$ una sucesión de funciones, dominada por $f_0 \in L^1(\mu)$, que converge μ-c.t.p. y en $L^1(\mu)$ a $f \in L^1(\mu)$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \circ T^j = \tilde{f}$$

μ-c.t.p. y en $L^1(\mu)$.

Ejercicio 2 Demostrar el corolario 1.5. Sugerencia: Basta probarlo para $f_n \geq 0; f_n \to 0$ *c.t.p.* Sea $G_k(x) = \sup_{n\geq k}\{f_n(x)\}$. Entonces $G_k \to 0$ *c.t.p.*, y por convergencia dominada $\|G_k\|_{L^1} \to 0$. Sea $\tilde{G}_k = \lim_{n\to\infty}(1/n)\sum_{j=0}^{n-1} G_k \circ T^j$. La sucesin $\tilde{G}_k$ es decreciente con k y por el lema de Fatou

$$0 \leq \int \lim \tilde{G}_k \, d\mu \leq \lim \int \tilde{G}_k \, d\mu = \lim \int G_k \, d\mu = 0$$

Luego $\tilde{G}_k \to 0$ *c.t.p.*.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \circ T^j(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{n-1} f_j \circ T^j(x) \leq \tilde{G}_k(x)$$

Definición 1.6 Dado A conjunto medible, se denomina *tiempo medio de estadía $\tau_A(x)$ de un punto $x \in X$ en A,* al siguiente límite, cuando existe:

$$\tau_A(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \#\{j \in I\!N : 0 \leq j \leq n-1, \ T^j(x) \in A\}$$

Ejercicio 3 Probar el siguiente teorema:
El tiempo medio de estadía τ_A existe μ-c.t.p. y además la convergencia es en $L^p(\mu)$ para todo $p \geq 1$ natural. Además $\int \tau_A \, d\mu = \mu(A)$. Sugerencia: Observar que el tiempo medio de estadía en A es la función $\tau_A = \tilde{\chi}_A$. Aplicar el teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin.

Ejercicio 4 Sea $T : X \mapsto X$ Borel medible e invertible con inversa medible, en un espacio métrico compacto X, T preserva una medida boreliana de probabilidad μ. Sea $f : X \mapsto C$ una función compleja CONTINUA. Sea $\widetilde{f}^+ \in L^1(\mu)$ el límite de los promedios de Birkhoff hacia el futuro y sea $\widetilde{f}^- \in L^1(\mu)$ el límite de los promedios de Birkhoff hacia el pasado. Sea $x_0 \in X$ un punto del conjunto Λ, donde esos dos límites existen y son iguales. Se definen los conjuntos estable e inestable respectivamente por el punto x_0 (quizás se reducen solo a $\{x_0\}$):

$$W^s(x_0) = \{y \in X : lim_{n \to +\infty} \operatorname{dist}(T^n y, T^n x_0) = 0\}$$

$$W^u(x_0) = \{y \in X : lim_{n \to -\infty} \operatorname{dist}(T^n y, T^n x_0) = 0\}$$

Probar que para todo $y \in W^s(x_0)$ existe $f^+(y)$ y $f^+(y) = f^+(x_0)$. Deducir que si $y \in W^s(x_0) \cap \Lambda$ entonces existe también $f^-(y)$ y $f^-(y) = f^+(x_0)$.

Probar que para todo $y \in W^u(x_0)$ existe $\widetilde{f}^-(y)$ y $\widetilde{f}^-(y) = \widetilde{f}^-(x_0)$. Deducir que si $y \in W^u(x_0) \cap \Lambda$ entonces existe también $\widetilde{f}^+(y)$ y $\widetilde{f}^+(y) = \widetilde{f}^-(x_0)$.

Ejercicio 5 Probar la siguiente generalización del teorema de Birkhoff-Khinchin:

Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva la probabilidad μ. Sea $f : X \mapsto \mathbb{R}$ medible. Entonces μ-c.t.p.

o bien $\widetilde{|f|}\,(x) = +\infty$

o bien $\tilde{f}$ existe y es finito. Sugerencia:

Basta probarlo para $f \geq 0$. Dado $c > 0$ sea

$$X_c = \{x \in X : \liminf \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \leq c\}$$

X_c es T- invariante. Sea $f_n(x) = \min(f(x), n)$. Por convergencia monótona, para todo $c > 0$: $f|_{X_c} \in L^1(X_c)$. Luego μ-c.t.p. de X_c existe el límite de los promedios de Birkhoff.

Ejercicio 6 Sea T medible que preserva una medida de probabilidad μ. Probar que:

Si $F : X \mapsto R$ es medible y $F(x) > 0$ μ-c.t.p. entonces

$$\liminf \frac{1}{n} F \circ T^n = 0 \quad \mu - c.t.p.$$

Si además $F \circ T - F$ es integrable, entonces

$$\lim (1/n) F \circ T^n(x) = 0 \quad \mu - c.t.p$$

Sugerencia: Para la primera parte por absurdo, suponer que existe A con $\mu(A) > 0$ tal que $\liminf (1/n) F \circ T^n(x) \geq k_1$ y $F(x) \leq K_2$ $\forall x \in A$. Aplicar el teorema de recurrencia de Poincaré para encontrar una contradicción.

Para la segunda parte escribir

$$\frac{1}{n} F \circ T^n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (F \circ T - F) \circ T^j(x) - \frac{1}{n} F(x)$$

y aplicar el teorema de Birkhoff.

2 Ergodicidad

Se recuerda las Definiciones 2.9 y 2.10, y el Teorema 2.11 en la sección I.2 del capítulo 1 de estas notas. En ellos se define y caracteriza la *ergodicidad de una transformación* T medible respecto a una medida invariante μ de probabilidad, también llamada *ergodicidad de* μ respecto de T. Recordemos que μ es ergódica por definición si todo conjunto medible tal que $\mu(T^{-1}(A)) = A$ tiene medida cero o uno. Y que esto se cumple si y solo si para todos U, V medibles con medida no nula, se cumple $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para algún $n \in I\!N$.

Por los siguientes teoremas ver páginas 130 a 134 del texto Introducao à Teoría Ergódica, de Ricardo Mañé. Ed. IMPA Projeto Euclides, Río de Janeiro, 1983.

Teorema 2.1 Otras caracterizaciones de la ergodicidad.
Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ. Las siguientes propiedades son equivalentes:

a) T es ergódica respecto de μ.

b) Para toda $f \in L^1(\mu)$ se cumple

$$\tilde{f}(x) = \int f \, d\mu \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

c) Si $f \in L^1(\mu)$ es T-invariante (es decir si $f \circ T = f$ μ-c.t.p.) entonces $f = cte$ μ-c.t.p.

d) Para algún $p \geq 1$ natural, si $f \in L^p(\mu)$ es T-invariante (es decir si $f \circ T = f$ μ-c.t.p.) entonces $f = cte$ μ-c.t.p.

e) Para toda pareja de conjuntos medibles A y B se cumple:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Demostración: Ver la sección 3 del complemento al capítulo 2 de estas notas. Alternativamente ver Mañé páginas 130 a 131.

Observación 2.2 Se llama *promedio temporal de* f al límite de los promedios de Birkhoff. Se llama *promedio espacial de* f a su valor esperado, es decir, a $\int f \, d\mu$. La propiedad (b) del teorema anterior se traduce del siguiente modo:

Una transformación T que preserva la probabilidad μ es ergódica si y solo si los promedios temporales son iguales a los espaciales μ-c.t.p.

La condición de igualdad de los promedios temporales y espaciales es la *hipótesis de Boltzmann de la mecánica estadística.*

Ejercicio 7 Sea $T : X \mapsto X$ que preserva una probabilidad μ. Probar que:

T ergódica respecto de μ si y solo si para todo A conjunto medible tal que $T^{-1}(A) \subset A$, se cumple $\mu(A)$ es o bien cero o bien uno.

T es ergódica respecto de μ si y solo si para toda $f \in L^1(\mu)$ tal que $f \circ T \leq f$ μ-c.t.p., se cumple $f = cte\mu-$ c.t.p.

Teorema 2.3 *En las mismas hipótesis del teorema anterior T es ergódica respecto de μ si y solo si para todo conjunto A medible, el tiempo medio de estadía $\tau_A(x)$ es constante μ-c.t.p. e igual a $\mu(A)$*

Demostración: Ver la sección 4 del complemento al capítulo 2 de estas notas. Alternativamente ver prueba en el libro de Mañé página 133.

Definición 2.4 Sea $T : X \mapsto X$ medible en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$. Sea $\mathcal{M}_T$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad en $(X, \mathcal{A})$ que son invariantes por T. Es fácil ver que si dos medidas perteneces a $\mathcal{M}_T$ entonces cualquier combinación lineal convexa de ambas también pertenece a $\mathcal{M}_T$. Esto es, $\mathcal{M}_T$ es convexo.

Una medida $\mu \in \mathcal{M}_T$ se llama *extremal* si

$$\mu = \lambda\nu + (1-\lambda)\nu', \nu \neq \nu' \in \mathcal{M}_T, \lambda \in [0,1] \quad \Rightarrow \lambda \in \{0,1\}$$

Es decir: la única combinación convexa en $\mathcal{M}_T$ que dá como resultado μ es $1\mu + 0$

Teorema 2.5 *Sea T medible que preserva una medida de probabilidad μ. Entonces T es ergódica respecto de μ si y solo si μ es una medida extremal de $\mathcal{M}_T$.*

Demostración: Ver sección 4 del complemento al capítulo 2 de estas notas. Alternativamente ver demostración en el libro de Mañé: página 134.

Ejercicio 8 Demostrar que dos medidas de probabilidad diferentes μ y ν, ergódicas respecto a una misma transformación T, son mutuamente singulares. Sugerencia:

Considerar la descomposición de ν respecto de μ dada por el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym (ver Teorema 3.8 en la página 84 del libro *Real Analysis* de G. Folland), escribiendo $\nu = \lambda + \rho, \quad \lambda \perp \mu, \quad \rho << \mu$. Usar el teorema 2.5 para deducir que, o bien $\nu = \lambda$ o bien $\nu = \rho$. Si $\nu = \rho$ entonces usar el lema 4.1 en la sección 4 del complemento al capítulo 2 de estas notas. Deducir que entonces $\nu = \mu$.

Ejercicio 9 Sea $T : X \mapsto X$ Borel medible en un espacio topológico compacto X, tal que T que preserva una medida de probabilidad μ. Probar que T es ergódica respecto de μ si y solo si para toda función compleja $f : X \mapsto C$ continua, el límite $\tilde{f}$ de los promedios de Birkhoff de f es constante μ-c.t.p. Sugerencia:

Basta probarlo para funciones continuas reales no negativas. Las funciones continuas complejas son densas en $L^1(\mu)$. La aplicación $f \geq 0 \in L^1 \mapsto \tilde{f} \in L^1$ preserva la norma en L^1; luego si $f_n \to f$ en L^1 entonces $\tilde{f}_n \to \tilde{f}$ en L^1. Probar que si f_n es continua, entonces la sucesión de constantes $\tilde{f}_n$ es una sucesión de Cauchy en L^1 y también en el campo complejo C. Luego converge en C a una constante k. Usar el teorema de convergencia dominada para probar que $\tilde{f}_n$ converge a k en L^1 y la unicidad del límite en L^1 para probar que $\tilde{f} = k$ μ-c.t.p

Ejercicio 10 Probar que si $T : X \mapsto X$ es Borel medible en un espacio topológico CONEXO y con base numerable, T que preserva una medida de probabilidad μ positiva sobre abiertos, entonces:

(a)Una función $g \in L^1(\mu)$ invariante con T (es decir: $g \circ T = g$ μ-c.t.p.) es constante μ-c.t.p. si y solo si es localmente constante c.t.p. (es decir: existe un cubrimiento de X por abiertos, tales que en cada abierto V del cubrimiento se cumple $g|_V = K_V$ constante μ-c.t.p. de V.)

(b) T es ergódica si y solo si toda función $g \in L^1(\mu)$ que sea invariante con T es localmente constante.

3 Difeomorfismos de Anosov ergódicos en el toro.

Definición 3.1 Sea $f : S \mapsto S$ un diffeomorfismo en una superficie S compacta. Se dice que f *es de Anosov o uniformemente hiperbólico* si existe para todo punto $x \in S$ una descomposición del espacio tangente $T_x(S)$ en dos subespacios U_x y S_x de dimensión 1, invariantes con df_x, llamados *subespacio inestable y estable* respectivamente, en el punto x:

$$T_x(S) = U_x \oplus S_x, \quad df_x(U_x) = U_{f(x)}, \quad df_x(S_x) = S_{f(x)}$$

que dependen continuamente de $x \in S$, y existen constantes $0 < \lambda < 1$ y $\mu > 1$ llamadas *factores de contracción uniforme y expansión uniforme* respectivamente, tales que:

$$||dT_x(v)|| \leq \lambda ||v|| \ \ \forall v \in S_x, \ \ \forall x \in S$$

$$||dT_x(v)|| \geq \mu ||v|| \ \ \forall v \in U_x, \ \ \forall x \in S$$

Ejercicio 11 Probar que la transformación $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *en el toro T^2 es un difeomorfismo de Anosov.* Sugerencia: U_x y S_x son las direcciones propias de la matriz.

Observación 3.2 El teorema de Franks (1969) establece que:

Las únicas superficies (compactas, conexas, sin borde) *que soportan un difeomorfismo de Anosov f son homeomorfas al toro T^2, y f es conjugado a un automorfismo lineal.*

Nota: Dos homeomorfismos $f : X \mapsto X$ y $g : Y \mapsto Y$, en respectivos espacios topológicos X e Y, se dice que son *conjugados o topológicamente equivalentes* si existe un homeormorfismo $h : X \mapsto Y$ llamado *conjugación* tal que $g \circ h = h \circ f$. La conjugación implica que todas las propiedades de la dinámica topológica de f (transitividad, conjunto no errante, omega y alfa límites, recurrencia) se transmiten a g.

Debido al teorema de Franks los automorfismos lineales en el toro T^2 son el paradigma de los difeomorfismos de Anosov en superficies. Y entre ellos en particular el $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro T^2.

En el capítulo 1, ejercicio I.16 se enunció que el $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro es *transitivo topológicamente.* Demostraremos ahora que es *ergódico respecto a la medida de Lebesgue.* Esta prueba de ergodicidad que daremos es la misma para todos los difeomorfismos de Anosov transitivos que preservan la medida de Lebesgue.

Más adelante en los próximos capítulos probaremos nuevamente la ergodicidad del $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro, demostrando que cumple una condición más fuerte (tiene "espectro de Lebesgue con base numerable"). Sin embargo esa segunda prueba de la ergodicidad no puede generalizarse a los Anosov transitivos, sino sólamente a los que son lineales.

Teorema 3.3 *La transformación $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro es ergódica respecto a la medida de Lebesgue m.*

Demostración: Sea $g : T^2 \mapsto C$ una función CONTINUA compleja. Usando los resultados de los ejercicios 9 y 10, basta probar que el límite $\tilde{g}$ de los promedios de Birkhoff de g es localmente constante c.t.p.

Llamaremos Λ al conjunto con medida 1 de los puntos donde existen y son iguales los límites de los promedios de Birkhoff hacia el futuro g^+ y hacia el pasado g^-. Por el corolario 1.3 sabemos que $m(\Lambda^c) = 0$.

Sea $V \subset X$ un rectángulo abierto de lados con direcciones s y u, siendo s (resp. u) la proyección en el (espacio tangente al) toro de la dirección propia con autovalor menor que 1 (resp. mayor que 1) en $I\!\!R^2$ de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Es fácil ver que los segmentos en V paralelos a las direcciones s y u tienen las siguientes propiedades (estructura de producto local lineal):

Cada segmento U en V, paralelo a la dirección u, está contenido en el conjunto inestable $W^u(x_0)$ (definido en el ejercicio 4) para todo $x_0 \in U$.

Cada segmento en S, paralelo a la dirección s, está contenido en el conjunto estable $W^s(x_0)$ para todo $x_0 \in S$.

Denotaremos $S_{x_0} \subset V$ al segmento en V, de longitud máxima, paralelo a la dirección s, que pasa por el punto $x_0 \in V$. Denotaremos con l_S la medida de longitud en el segmento S. Análogamente denotaremos a los respectivos U_{x_0} y l_U, según la dirección u.

Calculemos $m(V \cap A)$, para cualquier boreliano A, usando el teorema de Fubini. Para ello tomamos un punto $x_0 \in V$ de referencia, cualquiera:

$$m(V \cap A) = \int_{x \in S_{x_0}} dl_S(x) \int_{y \in U_x} \chi_A(y)\, dl_U(y) \quad [1]$$

Usando la igualdad anterior para calcular $m(V \cap \Lambda^c) = 0$ se obtiene la siguiente:

Afirmación: *Para l_S-c.t.p. $x \in S_{x_0}$ se cumple l_U-c.t.p. $y \in U_x$ pertenece a Λ.*

Tomemos entonces un tal $x_1 \in S_{x_0}$ como nuevo punto de referencia. Tenemos que l_U-c.t.p. $y \in U_{x_1}$ pertenece a Λ. Descompongamos nuevamente la integral de [1] pero usando ahora a x_1 en vez de x_0 como punto de referencia, e invirtiendo el orden de las integrales iteradas. Se obtiene:

$$m(V \cap A) = \int_{y \in U_{x_1}} dl_U(y) \int_{x \in S_y} \chi_A(x)\, dl_S(x) \quad [2]$$

Luego deducimos que l_U-c.t.p. $y \in U_{x_1}$ pertenece a Λ y cumple: l_S-c.t.p $x \in S_y$ pertenece a Λ.

Usando ahora el resultado del ejercicio 4 se deduce que para todo punto $y \in U_{x_1} : \tilde{g}^-(y) = \tilde{g}^-(x_1)$. Y además para l_U-c.t.p. $y \in U_{x_1}$ se cumple $y \in \Lambda : \tilde{g}^+(y) = \tilde{g}^-(y)$ y además l_S-c.t.p. $x \in S_y : \tilde{g}^-(x) = \tilde{g}^+(x) = \tilde{g}^+(y)$. De donde se deduce:

Afirmación: *Para l_U-c.t.p. $y \in U_{x_1}$ se cumple que l_S-c.t.p. $x \in S_y$ pertenece a Λ y cumple $\tilde{g}^+(x) = g^-(x_1)$.*

De la afirmación anterior y la integral [2] se obtiene que es $m(V)$ la medida de Lebesgue del conjunto de los puntos $x \in V$ que están en Λ y su límite de promedios de Birkhoff $\tilde{g}(x)$ es igual a la constante $\tilde{g}^-(x_1)$. Con la cual se termina de probar que el límite de los promedios de Birkhoff de g es localmente constante m-c.t.p. $\square$

Ejercicio 12 Sea A una matriz 2×2 de coeficientes enteros y determinante igual a 1. Probar que la transformación f que induce A en el toro T^2:

$$f(\Pi(a,b)) = \Pi(A(a,b))$$

preserva la medida de Lebesgue en el toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. ($\Pi : \mathbb{R}^2 \mapsto T^2$ es la proyección tal que $\Pi(a,b) = (a,b)_{mod \mathbb{Z}^2}$ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$. La medida de Lebesgue m en el toro es la que cumple $\int_{x \in T^2} f(x)\, dm(x) = \int_{(a,b) \in [0,1)^2} F(a,b)\, dadb$ donde $\Pi \circ F(a,b) = f \circ \Pi(a,b)$ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.)

Probar que si los autovalores de A son ambos reales de módulo diferente de 1, entonces f es ergódica respecto a la medida de Lebesgue. (Sugerencia: Imitar la prueba realizada en 3.3 para el $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro).

4 Sistemas caóticos o expansivos.

El estudio de las propiedades topológicas de los difeomorfismos lineales en el toro T^2 también es paradigmática para estudiar los sistemas caóticos desde el punto de vista topológico, por lo siguiente:

Definición 4.1 Sea $T : X \mapsto X$ un homeomorfismo en un espacio métrico compacto X. Se dice que T es *caótico* (topológicamente) o *expansivo* , si existe una constante $\alpha > 0$ (llamada *constante de expansividad)* tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{dist}(T^n(x), T^n(z) > \alpha \;\; \forall x \neq y \in X$$

Interpretación: El caos o expansividad significa que la *dinámica es α-sensible a las condiciones iniciales:* dos órbitas con estados iniciales $x \neq y$ diferentes se separan más que la distancia α. Es decir, si uno comete un error $\epsilon > 0$, aunque sea arbitrariamente pequeño, en el estado inicial x ($0 < \operatorname{dist}(x,y) \leq \epsilon$) entonces el estado del sistema $T^n(y)$ en algún instante $n \in \mathbb{Z}$, se modificará más que $\alpha > 0$ respecto del estado $T^n(x)$ que tendría si no se hubiese cometido el error en el estado inicial. La sensibilidad a las condiciones iniciales, o expansividad, o caos topológico, se llama también “efecto mariposa”: la leve modificación del estado inicial producido por el aleteo de una mariposa produce una modificación drástica en el estado del sistema en otro instante).

Observación 4.2 Aunque no lo demostraremos: la transformación $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro T^2 es caótica o expansiva.

En 1989 Lewowicz demostró que *todos los homeomorfismos topológicamente caóticos o expansivos en el toro T^2 son conjugados a un Anosov, y por el teorema de Franks son conjugados a un difeomorfismo de Anosov lineal* (es decir: un difeomorfismo inducido en $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ por una matriz A con coeficientes enteros, determinante igual a 1 y valores propios de módulo diferente de 1). Por eso resulta tan paradigmático estudiar estos difeomorfismos y el $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en particular.

Ejercicio 13 Demostrar que *la rotación del círculo* (racional o irracional) *no es expansiva o topológicamente caótica.*

5 Transformaciones mixing.

Definición 5.1 Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ. Se dice que *T es mixing respecto de μ, o que μ es mixing respecto de T,* si para toda pareja A, B de conjuntos medibles se cumple:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Teorema 5.2 *Toda transformación mixing es ergódica pero no recíprocamente.*

Demostración: En el teorema 2.1 se prueba que T es ergódica si y solo si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Si se cumple la igualdad de la definición de transformación mixing entonces se cumple la condición [1] de ergodicidad. Para probar que el recíproco es falso, basta ver el ejemplo 5.5: la rotación irracional en el círculo es ergódica pero no es mixing. $\square$

Definición 5.3 Sea $T : X \mapsto X$ Borel-medible en un espacio topológico X. Se dice que T *es topológicamente mixing* si y solo si para toda pareja de abiertos U y V no vacíos existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$$

Ejercicio 14 Probar que *si T es Borel medible en un espacio topológico X y es mixing respecto a una medida de probabilidad μ positiva sobre abiertos, entonces es topológicamente mixing.*

Observación 5.4 En los capítulos siguientes mostraremos que el $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro T^2 es mixing respecto a la medida de Lebesgue.

También definiremos el shift de Bernoulli y probaremos que es mixing respecto a ciertas medidas de probabilidad llamadas de Bernoulli.

Definiremos una relación de equivalencia entre transformaciones que preservan medidas y probaremos que si una es mixing entonces toda equivalente a ella también.

Probaremos que el tent map en el intervalo respecto a la medida de Lebesgue es equivalente a un shift de Bernoulli, luego es mixing.

Ahora veremos que no toda transformación ergódica es mixing.

Ejemplo 5.5 Sea la rotación irracional $T : S^1 \mapsto S^1$ en el círculo S^1. En los capítulos siguientes probaremos que T es ergódica respecto a la medida de Lebesgue. Ahora veremos que

La medida de Lebesgue en el círculo no es mixing para la rotación irracional.

Demostración: Basta demostrar que $T(z) = e^{i2\pi\alpha}z$, donde α es un número irracional (que puede tomarse en $(0,1)$), no es topológicamente mixing. Sea 2π la longitud del círculo S^1 y sea $U \subset S^1$ un intervalo abierto de longitud $\epsilon : 0 < \epsilon < (1/4)2\pi \min\{\alpha, 1-\alpha\}$. Sea $V = e^{i2\epsilon}U$. Basta demostrar que si para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ se cumple $T^{n_0}(V) \cap U \neq \emptyset$, entonces $T^{n_0+1}(V) \cap U = \emptyset$. De lo contrario la longitud del intervalo unión $T^{n_0+1}(V) \cup U \cup T^{n_0}(V)$ sería menor que $3\epsilon < 2\pi \min\{\alpha, 1-\alpha\}$, pero contendría dos puntos x_0 y $T(x_0)$ que distan $2\pi \min\{\alpha, 1-\alpha\}$. $\square$

Ejercicio 15 Sea T medible, invertible con inversa medible, que preserva una medida de probabilidad μ. Probar que T *es mixing si y solo si* T^{-1} *lo es.* (Sugerencia: para dos conjuntos A y B cualesquiera $\mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(T^n(B) \cap A)$.)