TEORIA ERGODICA

Eleonora Catsigeras

Apuntes para el curso de Maestría en Matemática.
Marzo de 2005.

CAPITULO 3
TEORÍA ESPECTRAL DE LOS AUTOMORFISMOS DE MEDIDA.

1 El operador U_T en L^2.

Definición 1.1 Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva la probabilidad μ. *El operador $U_T : L^2(\mu) \mapsto L^2(\mu)$, inducido por T en $L^2(\mu)$* es:

$$U_T(f) = f \circ T \quad \forall f \in L^2(\mu)$$

Observación 1.2 Es inmediato verificar que:
U_T tiene autovalor 1 y el subespacio propio correspondiente es el de las funciones de L^2 que son invariantes por T. (Se recuerda que $f : X \mapsto C$ es invariante por T si $f \circ T = f \quad \mu$-c.t.p.)

Observación 1.3 *U_T es un operador unitario en $L^2(\mu)$,* es decir: preserva el producto interno. En efecto

$$< U_T f, U_T g >= \int (U_T f)(\overline{U_T g})\, d\mu = \int (f \circ T)(\overline{g \circ T})\, d\mu = \int (f\overline{g}) \circ T d\mu = \int f\overline{g} d\mu =< f, g > \qquad \Box$$

Como corolario se obtiene que U_T *es una isometría* (es decir $||U_T f||_{L^2(\mu)} = ||f||_{L^2(\mu)}$ para todo $f \in L^2(\mu)$). Luego, *todos los valores propios de U_T tienen módulo 1.* En efecto, si $f \in L^2$ es un vector propio de autovalor λ entonces:

$$||f|| = ||U_T f|| = ||\lambda f|| = |\lambda|\, ||f|| \ \Rightarrow |\lambda| = 1$$

Teorema 1.4 Caracterización espectral de la ergodicidad.
Sea $T : X \mapsto X$ que preserva una medida de probabilidad μ.
a) T es ergódica respecto de μ si y solo si el subespacio propio de autovalor 1 de U_T es el de las funciones constantes μ-c.t.p.
b) Si T es ergódica con respecto de μ entonces los subespacios propios de U_T son todos unidimensionales.

Demostración: a) Si las únicas funciones del subespacio propio de autovalor 1 son las constantes c.t.p., entonces usando 1.2, las únicas funciones invariantes con T son las constantes c.t.p., y recíprocamente. Esta última propiedad caracteriza la ergodicidad como se vio en el capítulo 2, teorema II-2.1.

b) Si λ es valor propio de U_T entonces $|\lambda| = 1$ porque U_T es una isometría (ver 1.3). Si f es vector propio de autovalor λ entonces $|U_T f| = |\lambda f| = |\lambda||f| = |f|$ de donde $|f|$ es propio con autovalor 1. Por la parte a) se obtiene $|f| = cte$-c.t.p. Pero siendo f un vector propio de valor propio λ no puede ser idénticamente nula. Luego $|f| = cte \neq 0$, f no se anula μ-c.t.p.

Consideremos ahora g otra función propia con el mismo autovalor λ. El cociente g/f pertenece a $L^2(\mu)$ porque su módulo es constante μ-c.t.p. Aplicando $U_T(g/f) = (g \circ T)/(f \circ T) = (\lambda g)/(\lambda f) = g/f$. Luego $g/f \in L^2(\mu)$ es un vector propio de valor propio 1. Por la parte a) se tiene $g/f = cte$ μ-c.t.p. de donde el subespacio propio de autovalor λ está generado por f. □

Ejercicio 1 Probar el recíproco de la parte b) del teorema anterior.

Teorema 1.5 Caracterización espectral de la propiedad mixing.
Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una probabilidad μ. T es mixing respecto a μ si y solo si

$$\lim_{n\to+\infty} < U_T^n f, g > = < f, 1 >< 1, g > \quad \forall f, g \in L^2(\mu)$$

Demostración: Si

$$\lim_{n\to+\infty} \int (f \circ T^n)\overline{g}\, d\mu = \int f\, d\mu \int \overline{g}\, d\mu \quad \forall f, g \in L^2(\mu) \qquad [1]$$

entonces en particular tomando $f = \chi_A, g = \chi_B$ se obtiene

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad \forall A, B \text{ medibles} \qquad [2]$$

Recíprocamente, si vale [2], entonces, fijando el conjunto B medible, se obtiene [1] cuando $f = \chi_A, g = \chi_B$ para todo conjunto A medible. Luego, por la linealidad del límite y de la integral, también vale [1] para f función simple y $g = \chi_B$. Por la densidad de las funciones simples s en $L^2(\mu)$, si $\|f - s\|_2 < \epsilon$ y $g = \chi_B$, entonces $| < U_T^n f, g > - < f, 1 >< 1, g > | \leq | < U_T^n(f - s), g > | + | < U_T^n s, g > - < s, 1 >< 1, g > | + | < s - f, 1 >< 1, g > | < 3\epsilon$ $\forall n$ suficientemente grande. Luego vale [1] para $f \in L^2(\mu)$ y $g = \chi_B$.

Ahora fijando $f \in L^2(\mu)$, acabamos de probar que [1] vale para $g = \chi_B$ donde B es cualquier conjunto medible. Por linealidad también vale [1] para g función simple, y usando el mismo método que antes se deduce que también vale [1] para toda $g \in L^2(\mu)$. □

Ejercicio 2 Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva la probabilidad μ. Probar que:

a) T es mixing respecto de μ si y solo si la igualdad del teorema 1.5 se cumple para un conjunto denso de funciones en $L^2(\mu)$

b) T es mixing si $L^2(\mu)$ tiene base numerable (una familia numerable $\mathcal{B}$ de funciones linealmente independientes tal que el subespacio de todas las combinaciones lineales finitas de funciones de $\mathcal{B}$ es denso en L^2) y la igualdad del teorema 1.5 se cumple para toda pareja de funciones de esa base.

Ejercicio 3 Sea $T : X \mapsto X$ una transformación mixing respecto a una probabilidad invariante μ. Sea λ otra medida de probabilidad (no necesariamente invariante por T) en el mismo espacio medible, tal que $\lambda << \mu$. Probar que:

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda(T^{-n}(A)) = \mu(A) \quad \forall A \text{ conjunto medible. Sugerencia:}$$

Sea $h \in L^1(\mu)$ real no negativa, la derivada de Radon- Nykodim $h = d\lambda/d\mu$. Como L^2 es denso en L^1, dado $\epsilon > 0$ existe $g \in L^2(\mu)$ real no negativa (por ejemplo una función simple) tal que $\int |g - h|\, d\mu < \epsilon$. Siendo μ una medida mixing, para todo n suficientemente grande se tiene:

$$| \int (\chi_A \circ T^n) g \, d\mu - \mu(A) \int g \, d\mu| < \epsilon \quad [1]$$

Observando que $\lambda(T^{-n}(A)) = \int (\chi_A \circ T^n) h \, d\mu = \int (\chi_A \circ T^n) g \, d\mu - \int (\chi_A \circ T^n)(h-g) \, d\mu$, aplicando la propiedad triangular y [1] se deduce que para todo n suficientemente grande $|\lambda(T^{-n}(A)) - \mu(A)| < 3\epsilon$.

2 Equivalencia espectral.

Definición 2.1 Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida de probabilidad. Sean $T : X \mapsto X$ y $S : Y \mapsto Y$ transformaciones medibles que preservan μ y ν respectivamente. Se dice que T y S son *espectralmente equivalentes* si existe un operador lineal invertible

$$L : L^2(\mu) \mapsto L^2(\nu)$$

que preserva el producto interno y que cumple

$$U_S \circ L = L \circ U_T$$

Ejercicio 4 Probar que si dos transformaciones T y S son espectralmente equivalentes entonces:
a) T es ergódica si y solo si S lo es.
b) T es mixing si y solo si S lo es.

3 Bases de Fourier en $L^2(m)$ para el círculo y el toro.

Sea $S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$ con la probabilidad de Lebesgue m, definida en los borelianos y que cumple:

$$\int_{z \in S^1} f(z)\, dm(z) = \int_{x \in [0,1)} f(e^{2\pi i x})\, dx$$

Proposición 3.1 *El conjunto de funciones $\{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ definidas como*

$$\varphi_n(z) = z^n = e^{2\pi i n x} \;\; \forall z = e^{2\pi i x} \in S^1$$

es un conjunto ortonormal. (Es llamado Base de Fourier de $L^2(S^1, m)$.)

Demostración:

$$< \varphi_n, \varphi_m >= \int \varphi_n \overline{\varphi_m}\, dm = \int_0^1 e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i m x}\, dx = \int_0^1 e^{2\pi i (n-m) x}\, dx$$

La integral anterior es cero si $n \neq m \in \mathbb{Z}$ y es uno si $n = m \in \mathbb{Z}$. $\square$

Usaremos el siguiente teorema, clásico del análisis espectral:

Teorema 3.2 Teorema de Parseval. Serie de Fourier. Sea el sistema ortonormal de Fourier $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ definido en la proposición 3.1. Sea $f \in L^2(S^1, m)$ y sean $c_n(f) =< f, \varphi_n >$ los llamados *coeficientes de Fourier de* f*. Entonces* la siguiente serie converge a f en $L^2(S^1, m)$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\varphi_n = f \quad \text{en } L^2(S^1, m)$$

Corolario 3.3 *El subespacio S formado por todas las combinaciones lineales finitas de funciones del sistema ortonormal de Fourier es denso en $L^2(\mu)$.*

Sea $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, con la medida de Borel de probabilidad de Lebesgue m que cumple:

$$\int_{z\in T^2} f(z)\, dm(z) = \int_{(x,y)\in[0,1)^2} \overline{f}(x, y)\, dxdy$$

siendo $\overline{f}(x, y) = f(z)\ \ \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $z = (x, y)_{mod\mathbb{Z}^2} \in T^2$.

Definición 3.4 En $L^2(T^2, m)$ se define el conjunto ortonormal $\{\varphi_{n,m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$ llamado *Base de Fourier* del siguiente modo:

$$\varphi_{n,m}(z) = e^{2\pi i(nx+my)} \text{ donde } (x, y) = \mathbb{R}^2,\ z = (x, y)_{mod\mathbb{Z}^2}$$

Corolario 3.5 *El subespacio S de las combinaciones lineales finitas de funciones en la base de Fourier de $L^2(T^2, m)$ es denso.*

4 Ergodicidad de la rotación irracional del círculo.

Teorema 4.1 *La rotación irracional del círculo es ergódica respecto a la medida de Lebesgue.*

Demostración: Llamemos $T : S^1 \mapsto S^1$ a la rotación irracional del círculo S^1 definida por $T(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i(x+\alpha)}\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \in (0, 1)$ irracional. Sea m la probabilidad de Lebesgue en el círculo. Tenemos

$$\int_{z\in S^1} f(z)\, dm(z) = \int_0^1 f(e^{2\pi ix})\, dx$$

Sea $f : L^2(m)$ tal que $U_T(f) = f$. Basta probar que $f = cte$ μ-c.t.p.

Consideremos $\{\varphi_n\}_n \in \mathbb{Z} \subset L^2(m)$ la base de Fourier de $L^2(m)$ definida por $\varphi_n(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi inx}$.

Sea $c_n(f) =< f, \varphi_n >$ el coeficiente de Fourier de f. Como

$$f =_{L^2(m)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\varphi_n$$

basta probar que si $U_T(f) = f$ entonces $c_n =< f, \varphi_n >= 0\ \ \forall n \neq 0$.

En efecto

$$< f, \varphi_n >=< U_T f, \varphi_n >= \int_{z\in S^1} f(Tz)\overline{\varphi_n(z)}\, dm(z) =$$

$$= \int_0^1 f(e^{2\pi i(\alpha+x)})e^{-2\pi inx}\, dx = \int_\alpha^{\alpha+1} f(e^{2\pi iy})e^{-2\pi in(y-\alpha)}\, dy = \int_0^1 f(e^{2\pi iy})e^{-2\pi in(y-\alpha)}\, dy$$

La penúltima igualdad se obtiene haciendo el cambio de variables $y = x + \alpha$ y la última igualdad se obtiene porque el integrando es una función periódica de período 1.

$$\int_0^1 f(e^{2\pi iy})e^{-2\pi ni(y-\alpha)}\, dy = e^{2\pi in\alpha} \int_0^1 f(e^{2\pi iy})e^{-2\pi iny}\, dy = e^{2\pi in\alpha} < f, \varphi_n >$$

Deducimos que

$$< f, \varphi_n >= e^{2\pi in\alpha} < f, \varphi_n >$$

de donde, si $n \neq 0$, se deduce que $< f, \varphi_n >= 0$ $\square$

La medida de Lebesgue en S^1 es positiva sobre abiertos y la topología en S^1 tiene base numerable de abiertos. En virtud a lo visto en el capítulo I, la ergodicidad de $T : S^1 \mapsto S^1$ respecto a la medida de Lebesgue, implica que T sea transitivo topológicamente y por lo tanto tenga una órbita densa. En la rotación del círculo una órbita cualquiera se obtiene de otra mediante una rotación. Luego, si una órbita es densa todas lo son. Esto demuestra lo siguiente:

Corolario 4.2 *La rotación irracional en el círculo es transitiva (topológicamente) y todas sus órbitas son densas.*

Ejercicio 5 En el toro k-dimensional $T^k = R^k/\mathbb{Z}^k$ se define la traslación de vector $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in [0, 1)^k$ del modo siguiente:

$$T(z) = (x + \alpha)_{mod \mathbb{Z}^k}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ verifica $z = x_{mod \mathbb{Z}^k}$ (Es decir z es la clase de equivalencia en la relación $(x_1, \ldots, x_k) \sim (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ cuando $y_j - x_j$ es entero para todo $1 \leq j \leq k$.)

Probar que si $< \alpha, p >\notin \mathbb{Z}\ \ \forall p \in \mathbb{Z}^k$ entonces T es ergódica respecto a la medida de Lebesgue m en T^k y recíprocamente. Nota: m es la medida de probabilidad de Borel en T^k, con la topología cociente inducida en T^k por la topología usual de $\mathbb{R}^k$, que cumple:

$$\int_{z\in T^k} f(z)\, dm(z) = \int_{x\in[0,1)^k} \overline{f}(x)\, dx$$

donde dx indica integración respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$ y $\overline{f} : \mathbb{R}^k \mapsto C$ es la función definida como $\overline{f}(x) = f(z)$ si $z = x_{mod \mathbb{Z}^k}$.

Sugerencia: Imitar la prueba de la ergodicidad de la rotación irracional del círculo en el teorema anterior. Usar (no se pide demostrar esta afirmación) que el sistema de Fourier en $L^2(T^k, m)$: $\{\varphi_p\}_{p\in\mathbb{Z}^k}$ definido como

$$\varphi_p(z) = e^{2\pi i<p,z>}\ \ \forall z \in T^k\ \ \ \forall p \in \mathbb{Z}^k$$

es una base ortonormal de $L^2(T^k, m)$. Es decir: es un sistema ortonormal y toda $f \in L^2(T^k, m)$ es la suma infinita numerable (tomando límite en la topología de $L^2(T^k, m)$) siguiente:

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}^k} < f, \varphi_p > \varphi_p$$

Teorema 4.3 Teorema de Katznelson. Sea $L : T^k \mapsto T^k$ una transformación lineal en el toro $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ $k \geq 1$ (i.e. L es la transformación inducida en $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ por la transformación lineal en $\mathbb{R}^k$ dada por una matriz A $n \times n$, de coeficientes enteros y determinante igual a 1).

L preserva la medida de Lebesgue m en el toro. L es ergódica si y solo si ningún autovalor es raíz de la unidad.

Ejercicio 6 Probar el teorema de Katznelson. Sugerencia:

Usar la definición de la medida de Lebesgue dada en el ejercicio 5. Para probar que es invariante usar que $detA = 1$, e imitar la prueba de la proposición I.4.1 del capítulo 1.

Para probar la caracterización de ergodicidad considerar la base de Fourier de $L^2(T^k, m)$ dada en la sugerencia del ejercicio 5. Probar que $\varphi_p \circ L^n = \varphi_{(A^*)^n p}$ $\forall p \in \mathbb{Z}^k$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donde A^* denota la matriz simétrica de A.

Si $det((A^*)^n - I) = 0$ para algún natural $n \geq 1$ probar que existe $p \in \mathbb{Z}^k, p \neq 0$ tal que $(A^*)^n p = p$. Sea $f = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{(A^*)^j p}$. Probar que no es constante c.t.p. y es L invariante. Deducir que en ese caso L no es ergódica.

Si $det((A^*)^n - I) \neq 0$ $\forall n \geq 1$ probar que entonces dado $p \in \mathbb{Z}^k, p \neq 0$ la sucesión $\{(A^*)^n p\}_{n\in\mathbb{N}}$ no repite sus valores en $\mathbb{Z}^k$. Probar que

$$\forall f \in L^2(T^k, m) \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{Z}^k : \; < f \circ L^n, \varphi_p > = < f, \varphi_{(A^*)^n p} >$$

Sea $f \in L^2(T^k, m)$ tal que $f \circ L = f$ c.t.p. Considerar para $p \in \mathbb{Z}^k, p \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < f, \varphi_p > |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < f \circ L^n, \varphi_p > |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < f, \varphi_{(A^*)^n p} > |^2 \leq$$

$$\leq \sum_{q \in \mathbb{Z}^k} | < f, \varphi_q > |^2 = \|f\|_{L^2}^2 < +\infty$$

De lo anterior se deduce que $< f, \varphi_p > = 0$ para todo $p \neq 0$ en $\mathbb{Z}^k$. Concluir, como en la demostración del teorema 4.1, que f es constante m-c.t.p. y que L es ergódica en ese caso.

5 Espectro de Lebesgue

Sea $T : X \mapsto X$ medible, invertible con inversa medible, que preserva una probabilidad μ.

Definición 5.1 Se dice que T *tiene espectro de Lebesgue* (con base numerable) respecto a la medida de probabilidad invariante μ, si existe $\{f_i\}_{i\in I} \subset L^2(\mu)$, donde I es un conjunto finito o infinito numerable, tal que:

$$\mathcal{B} = \{1, \{U_T^j f_i\}_{i\in I, j\in\mathbb{Z}}\}$$

es una *base ortonormal de* $L^2(\mu)$. (Es decir: $\mathcal{B}$ es un conjunto ortonormal y el subespacio de todas las combinaciones lineales finitas de funciones de $\mathcal{B}$ es denso en $L^2(\mu)$.)

Teorema 5.2 *Sea T que preserva la medida de probabilidad μ. Si T tiene espectro de Lebesgue entonces T es mixing respecto de μ.*

Demostración: En virtud de lo enunciado en la parte b) del ejercicio 2 basta probar que la igualdad del teorema 1.5 vale para $f, g \in \{1, \{U_T^j f_i\}_{i\in I, j\in \mathbb{Z}}\} \subset L^2(\mu)$

Por un lado tenemos

$$< 1, 1 >= 1, \;\; < U_t^j f_i, 1 >= 0 \;\; \forall j \in \mathbb{Z} \;\; \forall i \in I$$

Basta demostrar entonces que

$$\lim_{n\to+\infty} < U_T^n U_T^j f_i, 1 >= 0, \;\; \lim_{n\to+\infty} < U_T^n U_T^j f_i, U_T^p f_k >= 0 \;\; \forall i, k \in I, \; \forall p, j \in \mathbb{Z},$$

y para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

En efecto

$$< U_T^n U_T^j f_i, 1 >=< U_T^{n+j} f_i, 1 >= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pues $U_T^{n+j} f_i$ y 1 son funciones diferentes de la base ortonormal de $L^2(\mu)$. Análogamente

$$< U_T^n U_T^j f_i, U_T^p f_k >=< U_T^{n+j} f_i, U_T^p f_k >= 0 \quad \forall n > p - j \quad \square$$

Ejercicio 7 Sea T y S transformaciones que preservan probabilides μ y ν respectivamente. Probar que si T y S son espectralmente equivalentes entonces T tiene espectro de Lebesgue respecto de μ si y solo si S lo tiene respecto de ν.

6 Automorfismos lineales en el toro con espectro de Lebesgue.

Teorema 6.1 *La transformación* $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : T^2 \mapsto T^2$ *tiene espectro de Lebesgue respecto a la medida de Lebesgue.*

Demostración: Sea la base ortonormal de Fourier $\mathcal{B} = \{\varphi_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ de $L^2(T^2, m)$ definida en 3.4.

$$\varphi_{n,m}((x, y)_{mod\mathbb{Z}^2}) = e^{2\pi i(nx+my)} \;\; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \;\; \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$$

Tenemos $U_T \varphi_{n,m} = \varphi_{2n+m,n+m}$.

En $\mathbb{Z}^2$ elegimos un conjunto de índices formado por un representante de cada órbita de la transformación lineal $A^* = (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto (2n + m.n + m) \in \mathbb{Z}^2$. Sea I el conjunto de todos los representantes que no son $(0, 0)$. Como la matriz A^* es invertible y no tiene valores propios que sean raíces de la unidad, entonces $det((A^*)^j - Id) \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Se deduce que para todo $j_1 \neq j_2 \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$(A^*)^{j_1}(n, m) \neq (A^*)^{j_2}(n, m) \;\; \forall (n, m) \neq (0, 0) \in \mathbb{Z}^2$$

Entonces la familia de funciones

$$\{\varphi_{(A^*)^j(n,m)}\}_{j\in\mathbb{Z}, \, (n,m)\in I}$$

es un reordenamiento de la base de Fourier $\mathcal{B}$ sacando el 1. Luego

$$\mathcal{B} = \{1, \{U_T^j \varphi_{(n,m)}\}_{j\in\mathbb{Z},(n,m)\in I}\}$$

es una base ortonormal de $L^2(\mu)$. $\square$

El teorema anterior da una demostración de la ergodicidad del $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro, que ya probamos en el teorema II.3.3 del capítulo II de otra manera, usando los promedios de Birkhoff de funciones en $L^1(\mu)$. El teorema 6.1 sin embargo tiene una tesis más fuerte que la de la ergodicidad de T:

Corolario 6.2 *La transformación* $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : T^2 \mapsto T^2$ *respecto a la medida de Lebesgue es mixing. Luego es ergódica, topológicamente mixing, y topológicamente transitiva.*

Ejercicio 8 Teorema de Katznelson II.

Sea $L : T^k \mapsto T^k$ una transformación lineal en el toro $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k \quad k \geq 1$ que preserva la medida de Lebesgue m en T^k. (i.e. L es la transformación inducida en $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ por la transformación lineal en $\mathbb{R}^k$ dada por una matriz $A \;\; n \times n$, de coeficientes enteros y determinante igual a 1).

Probar que *si los autovalores de A no son raíces de la unidad entonces T tiene espectro de Lebesgue respecto de m.* Sugerencia:

Imitar la prueba del teorema 6.1, usando las mismas sugerencias que en el ejercicio 6.