TEORIA ERGODICA

Eleonora Catsigeras

Apuntes para el curso de Maestría en Matemática.
Abril de 2005.

CAPITULO 4
TRANSFORMACIONES DE BERNOULLI

1. El espacio del shift y su topología.

Sea $K = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, donde $k \geq 2$, un conjunto finito llamado *alfabeto.* . A los elementos del alfabeto se le llama símbolos.

Definición 1.1 Se denota con $k^{\mathbb{Z}}$ o $K^{\mathbb{Z}}$ al conjunto, llamado *espacio del shift,* formado por todas las sucesiones bi-infinitas $a : \mathbb{Z} \mapsto K$, es decir:

$$k^{\mathbb{Z}} = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : a_n \in K \ \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

Se llama *shift* (para la izquierda) a la aplicación $\sigma : k^{\mathbb{Z}} \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$\sigma(\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ donde } b_n = a_{n+1}$$

El shift es un corrimiento de los términos de la sucesión un lugar para la izquierda.

Definición 1.2 Dados $l \geq 1$ natural, dados $a_1, \ldots, a_l \in K$ y dados l enteros diferentes $n_1, \ldots, n_l$ se llama *cilindro de radio l, posiciones n_i y símbolos a_i al subconjunto $C^{a_1,\ldots,a_l}_{n_1,\ldots,n_l} \subset k^{\mathbb{Z}}$ definido por:*

$$C^{a_1,\ldots,a_l}_{n_1,\ldots,n_l} = \{\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in k^{\mathbb{Z}} : b_{n_j} = a_j \ \forall 1 \leq j \leq l\} = \bigcap_{j=1}^{l} C^{a_j}_{n_j}$$

Se observa que la familia $\mathcal{C}$ de todos los cilindros es numerable.

Ejercicio 1 Probar que dos cilindros son disjuntos si tienen el mismo radio, el mismo vector de posiciones y los vectores de símbolos respectivos son diferentes. Probar que la intersección de cilindros o bien es vacía o bien es otro cilindro. Probar que el complemento de un cilindro C es la unión finita (disjunta) de todos los cilindros con el mismo vector de posiciones y diferente vector de símbolos que C. Probar que toda unión finita de cilindros puede descomponerse como unión finita disjunta de cilindros. Probar que la familia $\mathcal{A}_0$ formada por el conjunto vacío y por todas las uniones finitas de cilindros disjuntos dos a dos, es un álgebra (es cerrada en el complemento, en intersecciones finitas y en uniones finitas).

Definición 1.3 En $k^{\mathbb{Z}}$ se define la estructura de *espacio métrico* mediante la distancia siguiente:

$$\operatorname{dist}(\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = |b_0 - a_0| + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|b_n - a_n|}{k^{|n|}}$$

Denotamos con $B_\epsilon(a)$ a la bola abierta de centro $a \in k^{\mathbb{Z}}$ y radio $\epsilon > 0$.

Lema 1.4 *Para todo $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in k^{\mathbb{Z}}$ y para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño se cumple*

$$B_\epsilon(a) \subset \bigcap_{j=-N}^{j=N} C_j^{a_j}$$

donde $N < -1 + (-\log \epsilon)/(\log k)$.

Para todo $a = \{an\}_{n\in\mathbb{Z}} \in k^{\mathbb{Z}}$ y para todo $N \geq 1$ se cumple

$$\bigcap_{j=-N}^{j=N} C_j^{a_j} \subset B_\epsilon(a)$$

donde $\epsilon > 1/k^N$

Ejercicio 2 Demostrar el lema 1.4. Sugerencia: Para la parte a) $\epsilon < 1/k^{N+1}$. Cada sumando de la serie que define $\operatorname{dist}(a,b)$ es o bien nulo (si $a_n = b_n$), o bien mayor o igual que $1/(2k^{|n|})$ (si $a_n \neq b_n$). Luego $\operatorname{dist}(a,b) < \epsilon < 1/2^{N+1} \Rightarrow a_n = b_n \ \forall |n| \leq N$.

Para la parte b), si $a_n = b_n \ \forall |n| \leq N$ entonces

$$\operatorname{dist}(a,b) \leq (1/2) \sum_{|n|\geq N+1} \frac{k-1}{k^{|n|}} = \frac{1}{2k^N} < \epsilon$$

Ejercicio 3 Probar que todo cilindro es abierto. Probar que todo abierto es unión de cilindros. Probar que los cilindros son una base numerable de la topología en $k^{\mathbb{Z}}$. (Sugerencia: usar el lema 1.4

Ejercicio 4 Probar que *la transformación shift es continua con inversa continua (es un homeomorfismo).* Sugerencia: usar el resultado del ejercicio 3.

Teorema 1.5 *$k^{\mathbb{Z}}$ con la estructura de espacio métrico dada en 1.3, es compacto. Los cilindros son abiertos y cerrados. La familia $\mathcal{C}$ de todos los cilindros es una base numerable de la topología, y genera la σ-álgebra de Borel.*

Demostración: Que todo cilindro es abierto y que la familia $\mathcal{C}$ es una base de la topología se prueba en el ejercicio 3. El complemento de un cilindro es unión (finita) de cilindros. Luego todo cilindro es cerrado.

Como todo abierto es unión de cilindros a lo sumo numerable porque $\mathcal{C}$ es numerable, entonces la σ-álgebra $\mathcal{A}$ generada por los cilindros contiene a todos los abiertos. Luego contiene a la sigma-álgebra de Borel. Por otra parte los cilindros son abiertos, luego la sigma-álgebra de Borel contiene a $\mathcal{A}$.

Sólo resta probar que $k^{\mathbb{Z}}$ con la estructura de espacio métrico dada en 1.3 es compacto. Siendo un espacio métrico con base numerable de abiertos, es suficiente demostrar que toda sucesión

$$\{a^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}} = \{\{a_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{Z}}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset k^{\mathbb{Z}}$$

tiene una subsucesión convergente.

Sea $\{b^{(m,0)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{a^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que los símbolos en las posiciones 0 : $b_0^{(m,0)}$ sean una constante $c_0 \in K$ respecto de $m \in \mathbb{N}$. Esto se puede conseguir porque la sucesión de primeros términos $a_0^{(m)} \in K$ toma valores en el conjunto finito K para todo $m \in \mathbb{N}$.

Sea

$$\{b^{(m,1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$$

una subsucesión de $\{b^{(m,0)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que sus símbolos en las posiciones 1 y -1 sean constantes respecto de m. Esto es posible porque la sucesión de parejas de símbolos en esas posiciones toma valores en el conjunto finito K^2.

Sea para todo $j \geq 1$ la sucesión $\{b^{(m,j)}\}_{m\in\mathbb{N}}$, subsucesión de $\{b^{(m,j-1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que sus símbolos en las posiciones $-j,\ldots,-1,0,1,\ldots j$ sean constantes en relación a m, respectivamente iguales a símbolos $c_{-j},\ldots,c_{-1},c_0,c_1,\ldots,c_j$ del alfabeto.

Sea $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in k^{\mathbb{Z}}$

Por el procedimiento diagonal tomemos la subsucesión $\{q^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}} = \{\{q_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{Z}}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset k^{\mathbb{Z}}$ definida como $q^{(m)} = b^{(m,m)}\ \forall j \in N$. Por construcción, dado $N \geq 1$ se cumple $q_n^{(m)} = c_n\ \forall |n| \leq N,\ \forall m \geq N$. Dicho de otra forma, dado N la sucesión $\{q^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $k^{\mathbb{Z}}$ para todo $m \geq N$ está en el cilindro $\cap_{|n|\leq N} C_n^{c_n}$. Por lo tanto converge a $c \in k^{\mathbb{Z}}$ como queríamos demostrar. $\square$

2. Espacio de medida del shift de Bernoulli

Consideremos en $k^{\mathbb{Z}}$ con la sigma-álgebra de Borel, el homeomorfismo shift $\sigma : k^{\mathbb{Z}} \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ definido en la sección anterior.

Definición 2.1 Se llama *vector de probabilidad* a un vector $p = (p_0, p_1, \ldots p_{k-1}) \in (0,1)^k$, tal que $\sum_{j=0}^{k-1} p_j = 1$. El valor p_j se llama *probabilidad del símbolo* $j \in K = \{0, 1, \ldots .k-1\}$.

Dado un vector de probabilidad p se define en los borelianos de $k^{\mathbb{Z}}$ una medida de probabilidad μ_p del siguiente modo:

Definición 2.2 Sea $\mathcal{C}$ la colección de los cilindros en k^Z. Sea $\mathcal{A}_0$ el álgebra de las uniones finitas de cilindros disjuntos dos a dos. Sea $\mathcal{B}$ la sigma álgebra de Borel en $k^{\mathbb{Z}}$.

Dado un vector de probabilidad $p = (p_0, \ldots, p_{k-1})$:

1) Se define $\mu_p : \mathcal{C} \mapsto (0,1)$ definida del siguiente modo:

$$\mu_p(\bigcap_{j=1}^{l} C_{n_j}^{a_j}) = \prod_{j=1}^{l} p_{a_j}$$

2) Se define $\mu_p : : \mathcal{A}_0 \mapsto [0,1]$, como

$$\mu_p(\emptyset) = 0,\ \mu_p(k^{\mathbb{Z}}) = 1,\ \ \mu_p(A) = \sum_{i=1}^{N} \mu_p(C_j)\ \ \forall A \in \mathcal{A} \text{ tal que } A = \bigcup_{i=1}^{N} C_i \text{ donde } \{C_i\}_{1 \leq i \leq N} \text{ es}$$

una familia de cilindros disjuntos dos a dos.

Ejercicio 5 Probar que $\mu_p : \mathcal{A}_0 \mapsto [0,1]$ definida anteriormente es una premedida en el álgebra $\mathcal{A}_0$.

En virtud del enunciado del ejercicio anterior, existe una única extensión de la premedida $\mu_p : \mathcal{A}_0 \mapsto [0,1]$ definida en 2.2, a la sigma álgebra de Borel $\mathcal{B}$ en el espacio $k^{\mathbb{Z}}$, que es la sigma-álgebra generada por $\mathcal{A}_0$.

Definición 2.3 Se llama *medida de Bernoulli de vector p* a la única extensión μ_p a la sigma álgebra de Borel de $k^{\mathbb{Z}}$ de la premedida definida en 2.2. Es una medida de probabilidad ya que

$$\mu_p(k^{\mathbb{Z}}) = \mu_p(\bigcup_{j=0}^{k-1} C_0^j) = \sum_{j_0}^{k-1} p_j = 1$$

Observación 2.4 Es fácil verificar que *la medida de Bernoulli es invariante por el shift.*

Definición 2.5 *Se llama* shift de Bernoulli *en el espacio $k^{\mathbb{Z}}$, a la pareja (σ, μ_p) donde $\sigma : k^{\mathbb{Z}} \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ es la transformación shift definida en la sección anterior, y μ_p es la medida de Bernoulli para cierto vector de probabilidad p dado.*

3. Ergodicidad del shift de Bernoulli.

Teorema 3.1 *El shift de Bernoulli (σ, μ_p) es mixing.*

Demostración: El shift $\sigma : k^{\mathbb{Z}} \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ preserva la medida de Bernoulli μ_p con vector de probabilidad $p = (p_0, \ldots, p_k)$ en los conjuntos de la sigma álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Denotemos con $\mathcal{A}_0$ al álgebra de las uniones finitas disjuntas de cilindros en $k^{\mathbb{Z}}$.

Hay que probar que

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_p(\sigma^{-n}(A) \cap B) = \mu_p(A)\mu_p(B)\ \ \forall A, B \in \mathcal{B}$$

En primer lugar, es fácil verificar que la igualdad anterior es cierta para los cilindros (ver ejercicio 6) y para los conjuntos del álgebra $\mathcal{A}_0$ formada por las uniones finitas de cilindros disjuntos dos a dos.

Por construcción la medida μ_p es la única extensión de la premedida en $\mathcal{A}_0$, a la sigma álgebra por ella generada, que es la sigma álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Por el teorema de extensión de premedidas:

$$\forall A \in \mathcal{B} \qquad \mu_p(A) = \inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_p(A_i), A_i \in \mathcal{A}_0,\ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \supset A\}$$

(Véase Teorema 1.14 e igualdad (1.12) en la página 30 del libro de G. Folland: *Real Analysis,* edit. J. Wiley, 1984.)

Luego, dados $A, B \in \mathcal{B}$ y dado $\epsilon > 0$, existen $A_0, B_0 \in \mathcal{A}_0$ tales que

$$\mu_p(A \Delta A_0) < \epsilon, \;\; \mu_p(B \Delta B_0) < \epsilon$$

Usando la propiedad triangular:

$$[1] \quad |\mu_p(\sigma^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq |\mu_p(\sigma^{-n}(A) \cap B) - \mu_p(\sigma^{-n}(A_0) \cap B_0)| +$$

$$+|\mu_p(\sigma^{-n}(A_0) \cap B_0) - \mu(A_0)\mu(B_0)| +$$

$$+|\mu(A_0)\mu(B_0) - \mu(A_0)\mu(B)| + |\mu(A_0)\mu(B) - \mu(A)\mu(B)|$$

El primer sumando a la derecha de [1] es menor que 2ϵ para todo $n \in \mathbb{N}$: para verificarlo usar que $|\mu(C) - \mu(D)| \leq \mu(C \Delta D)$ y que $(C_1 \cap C_2)\Delta(D_1 \cap D_2) \subset (C_1 \Delta D_1) \cup (C_2 \Delta D_2)$.

El segundo renglón de [1] tiende a cero cuando $n \to +\infty$ porque $A_0, B_0 \in \mathcal{A}_0$.

Finalmente cada sumando del último renglón de [1] es menor que ϵ para todo n.

Se conluye entonces que el primer miembro de [1] tiende a cero cuando $n \to +\infty$ como queríamos demostrar. $\Box$

Ejercicio 6 Sea (σ, μ_p) el shift de Bernoulli en $k^{\mathbb{Z}}$. Sean dados $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$, el natural $n > |n_1| + |m_1|$ y los símbolos $a_1, b_1 \in K$. Verificar que

$$\mu_p(\sigma^{-n}(C^{a_1}_{n_1}) \cap C^{a_2}_{m_1}) = p_{a_1} p_{a_2}$$

Deducir que

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_p(\sigma^{-n}(C^{a_1}_{n_1}) \cap C^{a_2}_{m_1}) = \mu_p(C^{a_1}_{n_1})\mu_p(C^{a_2}_{m_1})$$

Enunciar y probar una igualdad similar para cualquier pareja de cilindros, aunque tengan radio mayor que 1.

Probar que también vale una igualdad como la anterior para cualquier pareja A_0, B_0 en el álgebra $\mathcal{A}_0$ formada por todas las uniones finitas de cilindros disjuntos dos a dos.

Corolario 3.2 *El shift de Bernoulli es ergódico.*

Ejercicio 7 Probar que el shift es topológicamente mixing y transitivo. Sugerencia: Verificar que la medida de Bernoulli es positiva sobre abiertos, y usar el teorema 3.1.

Observación 3.3 Aunque no lo demostraremos en este curso también vale el siguiente enunciado más fuerte que el teorema 3.1:

El shift de Bernoulli (σ, μ_p) tiene espectro de Lebesgue.

Definición 3.4 *Sea $k^{\mathbb{N}}$ el conjunto formado por todas las sucesiones $a : \mathbb{N} \mapsto K = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Se define el shift (unilateral)*

$$\sigma : k^{\mathbb{N}} \mapsto k^{\mathbb{N}} : \;\; \sigma(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Observación 3.5 La teoría del shift unilateral es la misma que la del shift bilateral definido en las secciones anteriores, excepto que ahora σ no es invertible. De la misma forma que antes, se construye la medida de Bernoulli μ_p dado un vector de probabilidad para el espacio de símbolos, y se demuestra que el shift unilateral de Bernoulli (σ, μ_p) es mixing, y por lo tanto, ergódico.

Ejercicio 8 a)Sea $T : [0,1] \mapsto [0,1]$ el tent map definido en el ejercicio I.4 del capítulo 1. Sea m la medida de probabilidad de Lebesgue en $[0,1]$. Sea $\Lambda \subset [0,1]$ el conjunto obtenido al retirar del intervalo $[0,1]$ el punto $1/2$ y todas las preimágenes de $1/2$ (es decir: retirando todos aquellos puntos cuyas órbitas futuras pasan por el punto $1/2$). Probar que $m(\Lambda) = 0$.

b) Llámese $I_0 = [0, 1/2]$, $I_1 = [1/2, 1]$. Se construye la aplicación medible $h : \Lambda \mapsto 2^{\mathbb{N}}$ (llamada *itinerario*) del siguiente modo:

$$h(x) = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow T^n(x) \in I_{a_n} \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostrar que h es inyectiva. Demostrar que

$$\sigma \circ h = h \circ T$$

donde σ es el shift unilateral.

c) Considérese el vector de probabilidad $p = (1/2, 1/2)$, y la medida de Bernoulli μ_p en $2^{\mathbb{N}}$. Demostrar que $m(h^{-1}(A)) = \mu_p(A)$ para todo boreliano $A \subset 2^{\mathbb{N}}$. (Sugerencia: Basta probarlo para uniones finitas disjuntas de cilindros). Deducir que $\mu_p(h(\Lambda)) = 1$ (h es invertible c.t.p.)

d) Demostrar que el tent map es ergódico y mixing respecto de m. (Sugerencia: usar que el shift unilateral de Bernoulli es mixing).

e) Deducir que el tent map es transitivo y topológicamente mixing.

Ejercicio 9 Sea $T : S^1 \mapsto S^1$ la transformación definida por

$$T(z) = T(e^{2\pi i x}) = e^{4\pi i x} = z^2 \quad \forall x \in [0, 1)$$

a) Demostrar que T preserva la probabilidad de Lebesgue m en S^1.

b) Considérese el conjunto Λ que se obtiene del círculo retirando todas las preimágenes de $e^{2\pi i x_0} = -1$ para $x_0 = 1/2 \in [0, 1)$. Llámese $I_0 = \{e^{2\pi i x} : x \in [0, 1/2)\}$, $I_1 = \{e^{2\pi i x} : x \in (1/2, 1)\}$. Defínase la transformación itinerario $h : \Lambda \mapsto 2^{\mathbb{N}}$ como en el ejercicio anterior, y probar que cumple las mismas propiedades enunciadas en ese ejercicio.

c) Demostrar que $T : S^1 \mapsto S^1$ es ergódica y mixing respecto de m, transitiva y topológicamente mixing.

Ejercicio 10 Investigar si es ergódica y mixing respecto a la probabilidad de Lebesgue, transitiva y topológicamente mixing, la transformación $T : S^1 \mapsto S^1 = \{z \in C : |z| = 1$ definida por $T(z) = z^k$, donde $k \geq 2$ es un número natural.

4. Equivalencia de automorfismos de medida.

Definición 4.1 Sean $T : X \mapsto X$, $S : Y \mapsto Y$, medibles que preservan probabilidades μ en X y ν en Y respectivamente. Se dice que (T, μ) y (S, ν) son *equivalentes (como automorfismos de*

medida) si existe $h : X \mapsto Y$ bimedible c.t.p. (es decir medible, y tal que existe $g : Y \mapsto X$ medible que cumple $g \circ h = id_X \mu - c.t.p., \quad h \circ g = id_Y \nu - c.t.p.$) y tal que:
a)$\mu(h^{-1}(B)) = \nu(B)\ \forall B \subset Y$ medible.
b) $S \circ h = h \circ T\ \mu-$c.t.p.

Ejercicio 11 Probar que la equivalencia de automorfismos de medida es una relación de equivalencia.

Ejercicio 12 Demostrar que si (T, μ) y (S, ν), son equivalentes entonces:
a) T es ergódica si y solo si S lo es.
b) T es mixing si y solo si S lo es.
c) T y S son espectralmente equivalentes.
d)T tiene espectro de Lebesgue si y solo si S lo tiene.

Observación 4.2 Se pueden encontrar dos shift de Bernoulli que son espectralmente equivalentes pero que no son equivalentes como automorfismos de medida. Aunque no lo demostraremos, eso prueba que la equivalencia espectral es diferente de la equivalencia de automorfismos de medida: las clases de equivalencia espectral son más amplias que las clases de equivalencia de automorfismos de medida.

5. Transformaciones de Bernoulli

Definición 5.1 Sea $T : X \mapsto X$ que preserva una medida de probabilidad μ. Se dice que (T, μ) es una *transformación de Bernoulli* si es equivalente como automorfismo de medida a un shift de Bernoulli (σ, μ_p) en el espacio $k^{\mathbb{Z}}$ o en el espacio $k^{\mathbb{N}}$ para cierto $k \geq 2$ y cierto vector de probabilidad μ.

Teorema 5.2 *Si (T, μ) es una transformación de Bernoulli entonces T es mixing respecto de μ.* (Luego es ergódica).

Demostración: Por el teorema 3.1 el shift de Bernoulli es mixing, y (T, μ) es equivalente a él. Luego, según el enunciado en el ejercicio 12, T es mixing respecto de μ. $\square$

Observación 5.3 Enunciamos, pero no demostramos, que los shift de Bernoulli tienen espectro de Lebesgue. Luego, las transformaciones de Bernoulli también tienen espectro de Lebesgue, ya que son equivalentes a los shift. La existencia de espectro de Lebesgue es más fuerte que la propiedad mixing.

Ejemplo 5.4 Ejemplos de transformaciones de Bernoulli son el *tent map* en el intervalo y la transformación $z \mapsto z^k$ con $z \in S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$ y $k \geq 2$ fijo natural (ver ejercicios 9 y 10). En dimensión 2 un ejemplo de transformación de Bernoulli es la herradura de Smale que veremos en la última sección de este capítulo.

6. Jerarquía ergódica

En resumen tenemos la siguiente jerarquía de propiedades ergódicas cada vez más restrictivas:

a)
$$\{(T,\mu) \text{ ergódica }\} \supset_{\neq} \{(T,\mu) \text{ mixing }\}$$

b)
$$\{(T,\mu) \text{ mixing }\} \supset_{\neq} \{(T,\mu) \text{ tiene espectro de Lebesgue }\}$$

c)
$$\{(T,\mu) \text{ tiene espectro de Lebesgue }\} \supset \{(T,\mu) \text{ es transformación de Bernoulli }\}$$

En el capítulo II probamos a). El ejemplo clásico de transformación ergódica no mixing es la rotación irracional del círculo.

En el capítulo III probamos parte de b): toda transformación con espectro de Lebesgue es mixing. No dimos ningún ejemplo para refutar el recíproco. Los llamados *shifts gaussianos,* que no estudiaremos en este curso, son transformaciones mixing que no tienen espectro de Lebesgue (ver páginas 194 a 201 del texto de Mañé.)

Finalmente, probamos que toda transformación de Bernoulli es mixing, sin probar que además tienen espectro de Lebesgue.

7. Herradura de Smale

Definición 7.1 Herradura de Smale lineal.

Se llama *herradura de Smale lineal con 2 patas* en dimensión 2 a un difeomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que:

a) $T(Q) \cap Q = Q_0 \cup Q_1$ donde $Q = [0,1]^2,\ Q_0 = [1/5, 2/5] \times [0,1],\ Q_1 = [3/5, 4/5] \times [0,1]$.

b) $T^{-1}(Q_0) = [0,1] \times [1/5, 2/5],\ T^{-1}(Q_1) = [0,1] \times [3/5, 4/5]$.

c) Para $j = 1, 2$, la restricción $T|_{Q_j}(x,y)$ es una transformación afín en (x,y) con direcciones propias (1,0) y (0,1) y valores propios λ y μ reales tales que $|\lambda| = 1/5$ y $|\mu| = 5$ respectivamente. Por ejemplo:

$$T|_{T^{-1}(Q_0)}(x,y) = ((1/5)(x+1), 5y-1), \quad T|_{T^{-1}(Q_1)}(x,y) = ((-1/5)(x-4), -5y+4)$$

Nota: Dejamos al lector hacer los dibujos que son imprescindibles para interpretar esta definición y las siguientes.

Ejercicio 13 Sea $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ una herradura de Smale lineal con 2 patas. Sea $Q = [0,1]^2$.

(a) Dibujar $T(Q)$. Justificar el nombre de herradura. Dibujar $T^{-1}(Q) \cap Q$, y $\cap_{n=0}^{N} T^{-n} Q$.

(b) Dibujar el conjunto $W^s \cap Q$ de todos los puntos de Q cuyas órbitas futuras permanecen en Q para todos los iterados $n \geq 0$. Justificar el nombre de *conjunto estable* para $W^s \cap Q$. (Sugerencia:

Tomar $K \subset W^s$ una componente conexa de $W^s \cap Q$, verificar que K es un segmento de dirección (1,0) y probar que la distancias se contraen al aplicar T^n a una pareja de puntos de K.)

(c) Calcular el **exponente de Liapunov contractivo o negativo** de la herradura de Smale: $\lim_{n\to\pm\infty}(1/n)\log\|DT^n_x(1,0)\|$ para todo punto $x \in \cap_{n\in\mathbb{Z}} T^{-n}(Q)$.

(d) Dibujar $\cap_{n=0}^{N} T^n Q$ y $\cap_{n=-N}^{N} T^{-n}Q$. Definir el conjunto inestable $W^s \cap Q$ y el exponente de Liapunov positivo de dilatación. Calcularlo.

Definición 7.2 Se llama *herradura de Smale lineal con k patas* en dimensión 2 a un difeomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que:

a) $T(Q) \cap Q = \cup_{j=0}^{k-1} Q_j$ donde $Q = [0,1]^2,\ Q_j = [(2j+1)/(2k+1), (2j+2)/(2k+1)] \times [0,1]$.

b) $T^{-1}(Q_j) = [0,1] \times [(2j+1)/(2k+1), (2j+2)/(2k+1)] \quad \forall 0 \leq j \leq k-1$.

c) Para todo $0 \leq j \leq k-1$ la restricción $T|_{Q_j}(x,y)$ es una transformación afín en (x,y) con direcciones propias (1,0) y (0,1) y valores propios λ y μ reales tales que $|\lambda| = 1/(2k+1)$ y $|\mu| = 2k+1$ respectivamente.

Definición 7.3 Si $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ es la herradura de Smale lineal con k patas en dimensión 2, y si $Q = [0,1]^2$, se llaman *patas* de T a las componentes conexas compactas de $T(Q) \cap Q$. Se tiene así la familia disjunta de compactos

$$\{Q_j\}_{0\leq j\leq k-1} : \ T(Q) \cap Q = \bigcup_{j=0}^{k-1} Q_j$$

Se llama *conjunto invariante maximal de T en Q* a

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^{-n}Q$$

Obsérvese que por la propiedad de intersección de compactos, el conjunto Λ es compacto no vacío.

En Λ se define la *topología inducida* por la de $\mathbb{R}^2$: un conjunto en Λ es abierto si y solo si es la intersección con Λ de un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Se llama *itinerario* $h : \Lambda \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ a la función definida como:

$$h(x) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \ T^n(x) \in Q_{a_n} \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 14 Sea $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ una herradura de Smale lineal con 2 patas. Probar que el itinerario h es un homeomorfismo del conjunto Λ, invariante maximal de T en $Q = [0,1]^2$ a $2^{\mathbb{Z}}$. Probar que h es una conjugación entre $T|_\Lambda$ y el shift $\sigma : 2^{\mathbb{Z}} \mapsto 2^{\mathbb{Z}}$, es decir:

$$\sigma \circ h(x) = h \circ T(x) \quad \forall x \in \Lambda$$

Enunciar un resultado similar para las herraduras lineales con k patas, $k \geq 2$.

Definición 7.4 Medida de Bernoulli para la herradura de Smale.
Dado un vector de probabilidad $p = (p_0, p_1, \ldots, p_{k-1})$ con $k \geq 2$ (es decir: $\sum_{j=0}^{k-1} p_j = 1,\ p_j > 0$), se llama *medida de Bernoulli* m_p para la herradura de Smale lineal T con k patas, a la medida:

$$m_p(A) = \mu_p(h(A \cap \Lambda))$$

donde Λ es el conjunto invariante maximal de $Q = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, $\quad h : \Lambda \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ es la función itinerario, y μ_p es la medida de Bernoulli para el shift en $k^{\mathbb{Z}}$ con vector de probabilidad p.

Definición 7.5 Herradura de Smale topológica.
Sea $f : X \mapsto X$ un homeomorfismo en un espacio topológico X. Se dice que f presenta una *herradura de Smale topológica* (f, Q), si existe $Q \subset X$ homeomorfo al cuadrado $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ tal que f restringida a Q es conjugada con la herradura de Smale lineal T. Esto es: existe un homeomorfismo h tal que $h \circ f(x) = T \circ h(x)$ para todo $x \in Q$.

Nota: El dominio del homeomorfismo h es $f(Q) \cup Q$ y su imagen en $\mathbb{R}^2$ es $T([0,1]^2) \cup [0,1]^2)$

Nota: El espacio topológico X no puede ser cualquiera, ya que debe tener subconjuntos homeomorfos al cuadrado de R^2. Puede ser por ejemplo una variedad diferenciable de dimensión 2.

Definición 7.6 Herradura de Smale diferenciable uniformemente hiperbólica.
Sea $f : X \mapsto X$ un difeomorfismo en una variedad X diferenciable de dimensión 2. Se dice que f presenta una *herradura de Smale diferenciable uniformemente hiperbólica* si existe $Q \subset X$ homeomorfo a $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ tal que:
a) (f, Q) es una herradura de Smale topológica.
b) Existen constantes $0 < \lambda < 1, \mu > 1$, y para todo $x \in Q$ existe una descomposición del espacio tangente

$$T_x(X) = U_x \oplus S_x, \quad df_x(U_x) = U_{f(x)}, \quad df_x(S_x) = S_{f(x)}, \quad \forall x \in Q \cap f^{-1}(Q)$$

en subespacios de dimensión 1 que varían continuamente con x, tales que:

$$\|df_x(v)\| \leq \lambda \|v\| \ \ \forall v \in S_x$$

$$\|df_x(v)\| \geq \mu \|v\| \ \ \forall v \in U_x$$

Observación 7.7 La hipótesis b) de la definición anterior se llama *hipótesis de hiperbolicidad uniforme.* (La palabra uniforme se refiere a que las constantes μ y λ no dependen del punto x considerado).

Observación 7.8 Pueden definirse en forma parecida las herradura de Smale lineales en $\mathbb{R}^m$, con $m \geq 2$, las herraduras de Smale topológicas correspondientes, y las herraduras de Smale diferenciables uniformemente hiperbólicas en variedades de dimensión m.

Teorema 7.9 *Sea $f : X \mapsto X$ un homeomorfismo en un espacio topológico X que presenta una herradura de Smale topológica (f, Q). Entonces f es una transformación de Bernoulli para ciertas medidas de probabilidad μ* llamadas medidas de Bernoulli para f.

Demostración: Sea $\Lambda = \bigcap_{j\in Z} f^{-j}(Q)$. Toda herradura de Smale topológica es, por definición, conjugada a la herradura de Smale lineal, y ésta es conjugada por la transformación itinerario con el shift $\sigma : k^{\mathbb{Z}} \mapsto k^{\mathbb{Z}}$. Entonces existe un homeomorfismo conjugación $h : \Lambda \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ tal que $\sigma \circ h = h \circ f|_\Lambda$. Sea m_p una medida de Bernoulli para el shift. Sea para todo boreliano $A \subset X$, la medida $\mu(A)$ definida como $\mu(A) = m_p(h(A \cap \Lambda))$. Solo falta ver que $h : \Lambda \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ puede extenderse a un $h : X \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ bimedible c.t.p. y que lleva la medida μ a m_p.

Sea $h : \Lambda \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ es un homeomorfismo, luego es invertible con inversa medible. Por construcción de μ, se tiene que $\mu(X \setminus \Lambda) = 0$; luego la extensión medible $h : X \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ que define $h(x) = cte$ para $x \in X \setminus \Lambda$ es bimedible casi todo punto, y por construcción de la medida μ lleva esta a m_p. $\square$

Corolario 7.10 *La herradura de Smale topológica* (f, μ) *es ergódica y mixing respecto a la medida de Bernoulli* μ*. Además, restringida al conjunto* Λ*, soporte compacto de* μ*, la herradura de Smale es transitiva y topológicamente mixing.*

Nota: El soporte compacto de una medida de probabilidad de Borel en un espacio topológico compacto, es el mínimo compacto con medida 1. Por la propiedad de intersecciones de compactos, el soporte compacto no es vacío.

Demostración (del corolario): La ergodicidad y propiedad mixing es consecuencia de que (T, μ) es una transformación de Bernoulli. La transitividad y propiedad mixing topológica se obtienen porque μ es positiva en todos los abiertos de Λ $\square$.