TEORIA ERGODICA

Eleonora Catsigeras

Apuntes para el curso de Maestría en Matemática.
Abril de 2005.

CAPITULO 5
EXPONENTES DE LIAPUNOV Y TEORÍA DE PESIN

En este capítulo solo enunciaremos sin demostración los teoremas básicos de la Teoría Ergódica Diferenciable.

Las hipótesis comunes a todas las definiciones y teoremas de este capítulo son:

$f : M \mapsto M$ es una transformación diferenciable de clase C^1 en una variedad compacta M de clase C^∞ y de dimensión finita. m es la medida de Lebesgue en M no necesariamente invariante por f, pero finita por la compacidad de M.

1 Exponentes de Liapunov.

Definición 1.1 Se llama *exponente de Liapunov* $\lambda(x, v)$ en el punto $x \in M$ según la dirección $v \in T_xM \setminus \{0\}$, cuando existen y son iguales, a los siguientes límites:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n(v)\| = \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n(v)\| = \lambda(x, v)$$

Nota: Para que exista el segundo de los límites es necesario, entre otras condiciones que la aplicación lineal $Df_x^- k$ exista para todo $k \in I\!N$ suficientemente grande. Eso significa que la aplicación lineal $Df^k_{f^{-k}(x)}$ debe ser invertible. Esto puede suceder aunque f no sea globalmente invertible.

Ejercicio 1 a) Probar que si para un punto $x \in M$ y una dirección $v \in T_x(M) \setminus \{0\}$ el exponente de Liapunov $\lambda > 0$ entonces Df_x^n dilata con tasa exponencial positiva en la dirección de v; más precisamente:

$$\|Df_x^n(v)\| \geq k(x, v)e^{\alpha n} \;\; \forall n \geq 0 \text{ para algún } \alpha > 0$$

Sugerencia: tomar $\alpha = \lambda - \epsilon > 0$.

b) Probar que si para un punto $x \in M$ y una dirección $v \in T_x(M) \setminus \{0\}$ el exponente de Liapunov $\lambda < 0$ entonces Df_x^n contrae con tasa exponencial negativa en la dirección de v; más precisamente:

$$\|Df_x^n(v)\| \leq K(x, v)e^{-\alpha n} \;\; \forall n \geq 0 \text{ para algún } \alpha > 0$$

Sugerencia: tomar $-\alpha = \lambda + \epsilon < 0$.

Definición 1.2 Se dice que $x \in M$ es un *punto regular* si existen un natural $m = m(x) \geq 1$, m números reales diferentes:

$$\lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \ldots > \lambda_{m(x)}(x)$$

y una descomposición del espacio tangente en x en suma directa de m subespacios:

$$T_xM = E_1(x) \oplus \ldots \oplus E_{m(x)}(x)$$

tales que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n(v)\| = \lambda_j(x) \;\; \forall v \in E_j(x) \setminus \{0\} \;\; \forall 1 \leq j \leq m(x)$$

Los números $\lambda_j(x)$ se llaman *exponentes de Liapunov.* Los subespacios $E_j(x)$ se llaman *subespacios invariantes.*

Denotamos con Λ el conjunto de los puntos regulares. Lo más frecuente es que las funciones $m(x), \lambda_j(x), dimE_j(x)$ sean discontinuas con $x \in \Lambda$, a pesar de que en muchos de los ejemplos que damos (Herradura de Smale lineal, rotación en el círculo, tent map, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro, etc) resultan ser constantes (justamente porque la derivada de esas transformaciones es constante casi todo punto). En el texto de Mañé, páginas 339 a 341, se prueba que las funciones $m(x), \lambda_j(x), dimE_j(x)$, a pesar que puedan no ser continuas, son siempre medibles e invariante con f, y que el conjunto Λ es medible.

Ejercicio 2 Encontrar algunos de los puntos regulares (buscar, si existen, algunos que no sean periódicos) y sus exponentes de Liapunov, y sus subespacios invariantes, para las siguientes transformaciones definidas en los capítulos anteriores:

a) Tent map en el intervalo $[0, 1]$

b) $z \mapsto z^p$, con $p \in I\!N, p \geq 2$ en el círculo.

c) Rotaciones en el círculo (racional e irracional).

d) Difeomorfismos Morse-Smale en el círculo.

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro

f) Herradura de Smale lineal en $I\!R^2$

Demostrar en todos ellos que $\mu(\Lambda) = 1$ para alguna medida de probabilidad invariante notable.

Ejercicio 3 Demostrar que para los difeomorfismos de Anosov en el toro definidos en el capítulo 1, existen en todos los puntos que sean regulares, dos exponentes de Liapunov, uno negativo y otro positivo.

Ejercicio 4 Demostrar que para la herradura de Smale diferenciable en dimensión dos $f : Q \subset M \mapsto M$, bajo la hipótesis de hiperbolicidad uniforme en $f^{-1}Q \cap Q$, existen en todos los puntos que sean regulares y estén en el maximal invariante de Q, dos exponentes de Liapunov, uno negativo y otro positivo.

Teorema 1.3 Teorema de Oseledec, o teorema ergódico multiplicativo.
Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo C^1. El conjunto Λ de los puntos regulares tiene medida 1, para toda medida de probabilidad invariante por f.

2 Teoría de Pesin.

Definición 2.1 Se llama *región de Pesin* y se denota como Σ al conjunto de puntos regulares para los cuales ninguno de sus exponentes de Liapunov es cero.

Ejercicio 5 *Mostrar que es vacía la región de Pesin de la rotación en el círculo.*

Teorema 2.2 *La región de Pesin es un boreliano invariante con f.*

La *teoría de Pesin* estudia las propiedades dinámicas, ergódicas y diferenciables, de las transformaciones que tienen región de Pesin con medida positiva para alguna medida de probabilidad invariante con f.

Definición 2.3 Si $x \in \Sigma$ se define *el subespacio estable en el punto x como*

$$S(x) = \bigoplus_{j:\lambda_j(x)<0} E_j(x)$$

y el subespacio inestable en el punto x como

$$U(x) = \bigoplus_{j:\lambda_j(x)>0} E_j(x)$$

Por construcción se tiene

$$T_xM = S(x) \oplus U(x) \quad \forall x \in \Sigma$$

Definición 2.4 Si μ es una medida de probabilidad invariante con f se dice que μ es *hiperbólica para f, o que f es hiperbólico* (no necesariamente uniforme) para μ si $\mu(\Sigma) = 1$.

Ejercicio 6 En todos los ejemplos del ejercicio 2 encontrar dos medidas de probabilidad invariantes, si existen, respecto a las cuales f sea hiperbólica (en sentido no necesariamente uniforme).

La siguiente definición ya estaba contenida en capítulos anteriores, pero la recordamos aquí:

Definición 2.5 Se llama *conjunto estable por el punto $x \in M$* a

$$W^s(x) = \{y \in M : \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^n(y), f^n(x)) = 0\}$$

Se llama *conjunto inestable por el punto $x \in M$* a

$$W^u(x) = \{y \in M : \lim_{n\to-\infty} \operatorname{dist}(f^n(y), f^n(x)) = 0\}$$

Se observa que $x \in W^s(x) \cap W^u(x)$, por lo que los conjuntos estables e inestables son no vacíos. Pero pueden reducirse solo al punto x. En ese caso decimos que el conjunto es una subvariedad de dimensión cero.

Teorema 2.6 Subvariedades invariantes.
Si $f : M \mapsto M$ es un difeomorfismo de clase $C^{1+\theta}$ y si $x \in \Sigma(f)$, entonces los conjuntos estables e inestables son variedades diferenciables inmersas en M y los subespacios tangentes en x a ellas son el subespacio estable e inestable respectivamente.

3 El caos desde el punto de vista medible.

En el capítulo 1 definimos *transformación caótica* en sentido topológico. Ahora definiremos transformación caótica en sentido medible. Son conceptos diferentes, y aunque están relacionados, ninguno de ellos implica el otro sin más hipótesis que las definiciones dadas.

Definición 3.1 Sea μ una medida de probabilidad invariante con f. Si el soporte compacto de μ no es finito, y existen exponentes de Liapunov positivos μ-c.t.p. se dice que f *es caótica respecto de μ en sentido débil.*

Nota: En el capítulo 7 definiremos entropía $h_\mu(f)$ de una transformación f respecto de una medida de probabilidad invariante μ. La entropía será un número real no negativo que, dicho groseramente, cuenta la tasa exponencial de desorden creciente al aplicar iteradamente f a los átomos de una partición del espacio. Se dice que f *es caótica respecto de μ en sentido fuerte,* si $h_\mu(f) > 0$.

Teorema 3.2 Desigualdad de Ruelle. Si f es $C^{1+\theta}$ y μ es cualquier probabilidad invariante con f, entonces

$$h_\mu(f) \leq \int_M \chi \, d\mu$$

donde $\chi(x) = \sum_{j:\lambda_j(x)>0} \lambda_j \, dim(E_j(x))$.

La desigualdad anterior muestra que si una medida ergdica es caótica respecto de μ en sentido fuerte, entonces es caótica respecto de μ en sentido débil. En efecto, el conjunto de puntos donde existe algún exponente de Liapunov positivo es invariante con f. Siendo μ ergódica la medida de ese conjunto es cero o uno. Luego χ es o bien cero μ-c.t.p. o bien positiva estrictamente μ-c.t.p. Pero siendo $h_\mu(f) > 0$, la integral de χ es positiva, luego $\chi > 0$ μ-c.t.p.

Teorema 3.3 Igualdad de Ledrappier-Young Si f es $C^{1+\theta}$, si μ es una probabilidad invariante con f y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue en M (que no necesariamente es invariante con f), y si $\mu(\Sigma) = 1$ entonces

$$h_\mu(f) = \int_M \chi \, d\mu$$

donde $\chi(x) = \sum_{j:\lambda_j(x)>0} \lambda_j dim\,(E_j(x))$.

Ejercicio 7 En los ejemplos del ejercicio 2 investigar si f es caótica respecto de μ en sentido débil, para alguna μ invariante por f.

4 Medidas físicas y medidas SRB.

Sea λ una medida de probabilidad cualquiera invariante por f. Si λ es ergódica para f, por el teorema II.2.1 parte b) del capítulo II:

$$\forall g \in L^1(\lambda) : \;\; \widetilde{g}(x) = \int g \, d\lambda \quad \lambda - c.t.p. \; x \in M$$

donde $\widetilde{g}$ indica el promedio temporal o de Birkhoff hacia el futuro de g y $\int g\,d\lambda$ es el promedio espacial de g con respecto a la probabilidad λ. En particular para $g \in C_0(M)$, el espacio de las funciones complejas continuas $g : M \mapsto C$, se obtiene:

$$\lambda \text{ probabilidad ergódica para } f \quad \Rightarrow$$

$$\lambda(A_\lambda) = 1 \text{ donde } A_\lambda = \{x \in M : \widetilde{g}(x) = \int g\,d\lambda \quad \forall g \in C_0(M)\}$$

Sin embargo puede suceder (y es lo que sucede más frecuentemente cuando f no preserva la medida de Lebesgue m en M) que $\lambda \perp m$. En ese caso puede ocurrir que el conjunto A_λ donde el promedio temporal coincide con el espacial sea físicamente no observable, es decir $m(A_\lambda) = 0$. En la física acostúmbrase a considerar como observables solo aquellos conjuntos medibles A con medida de Lebesgue positiva. Esto justifica la siguiente definición:

Definición 4.1 Medida física Una medida de probabilidad λ cualquiera, invariante por f se llama *física* (puede no existir ninguna) si es ergódica para f y $m(A_\lambda) > 0$.

Ejercicio 8 Probar que no toda transformación f tiene medidas físicas. Sugerencia: la rotación racional del círculo.

Ejercicio 9 Probar que si μ es una probabilidad ergódica para f, absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue m, entonces μ es una medida física, aún en el caso que f no preserve la medida de Lebesgue m. Probar que si f preserva la medida de Lebesgue m y $\mu = m/m(M)$ es ergódica, entonces μ es medida física y es la única medida física. Dar ejemplos de transformaciones con medidas físicas únicas. (Sugerencia: considerar las aplicaciones del ejercicio 2 que preservan la medida de Lebesgue m ergódica.)

Ejercicio 10 Probar que el difeomorfismo sección de flujo polo norte polo sur en el círculo tiene una única medida física, que es mutuamente singular con la medida de Lebesgue. Sugerencia: la medida delta de Dirac concentrada en el polo sur.

Definición 4.2 Medidas SRB Una medida de probabilidad λ cualquiera invariante por f se llama SRB (por Sinai, Ruelle y Bowen) si es medida física para f y además $\lambda(\Sigma) = 1$, donde Σ es la región de Pesin.

Ejercicio 11 Probar que pueden existir medidas físicas para f pero no medidas SRB. (Sugerencia: rotación irracional del círculo).

Observación 4.3 A partir del 2000 aproximadamente, algunos autores llaman medida SRB a cualquier medida física λ aunque la región de Pesin no tenga medida λ igual a uno. Prefieren no llamarlas físicas sino SRB porque fueron Sinai, Ruelle y Bowen quienes construyeron las primeras medidas físicas no triviales en Matemática, para sistemas uniformemente hiperbólicos, según el siguiente enunciado:

Teorema 4.4 Sinai, Ruelle, Bowen, 1972

Los difeomorfismos de Anosov f en variedades compactas (ver definición en II.3.1. del capítulo II, aún los que no preservan la medida de Lebesgue m, *poseen alguna medida de probabilidad λ que es física. Si además f es transitivo, entonces λ es la única medida física y $m(A_\lambda) = m(M)$. Si además f preserva una medida de probabilidad $\mu << m$ entonces $\lambda = \mu$.*

5 Problemas abiertos de existencia de medidas físicas.

Problema abierto 1. Sea f un difeomorfismo conjugado a un Anosov, pero que no es Anosov. ¿Existen necesariamente medidas físicas para f?.

Problema abierto 2. Sea f un difeomorfismo expansivo (o topológicamente caótico, ver definición en II.4.1 del capítulo II). ¿Existen necesariamente medidas físicas para f?

Problema abierto 3. Si $f : M \mapsto M$ es un difeomorfismo que preserva la medida de Lebesgue m y $m(\Sigma) = m(M)$ (donde Σ es la región de Pesin), entonces ¿existen necesariamente medidas físicas?.

Conjetura de Viana, 1998 La respuesta a la pregunta del problema abierto 3 debería ser afirmativa.

Problema abierto 4. Si $f : M \mapsto M$ es un difeomorfismo de clase C^r, $r \geq 1$ que no tiene medidas físicas, entonces ¿es cierto o falso el siguiente enunciado?: Para todo $\epsilon > 0$ existe $g : M \mapsto M$ difeomorfismo de clase C^r tal que $\|g - f\|_{C^r} < \epsilon$ y g tiene alguna medida física.

Nota: Por el teorema de Sinai, Ruelle, Bowen, si f está en el borde del conjunto de los difeomorfismos de Anosov en el espacio de los difeomorfismos C^r, el enunciado del problema abierto 4 es trivialmente verdadero. Por lo tanto debe considerarse f en el exterior del conjunto de los Anosov. (Se sabe que el exterior de los Anosov no es vacío).

Conjetura de Palis, 1999 Debería ser cierto el enunciado del problema abierto 4. Más aún, g debería poder elegirse de modo que tenga exactamente una cantidad finita de medidas físicas $\lambda_i : 1 \leq i \leq k$ y además

$$m(\bigcup_{1 \leq i \leq k} A_{\lambda_i}) = m(M)$$