TEORIA ERGODICA

Eleonora Catsigeras

Apuntes para el curso de Maestría en Matemática.
Octubre de 1997.

CAPITULO 6
MEDIDAS INVARIANTES EN ESPACIOS METRICOS COMPACTOS.

Dada una transformación T medible en un espacio métrico compacto X, no tiene porque existir alguna probabilidad de Borel en X que sea invariante por T: véase el ejemplo I.1.6. Sin embargo, cuando T es continua, demostraremos que existe por lo menos una medida T-invariante. Ese es el objetivo de la sección 1.

En la sección 2 se definirá una topología en el espacio de las medidas de probabilidad que lo transforma en un espacio métrico compacto.

En la sección 3 se estudiarán transformaciones para las cuales existe una sola medida invariante: las llamadas únicamente ergódicas.

En la sección 4 se estudiarán los grupos topológicos compactos, mostrando que ciertas traslaciones en ellos son únicamente ergódicas, y se definirá la medida de Haar.

En la sección 5 se definirán las medidas promediales de Birkhoff, y se estudiarán sus propiedades.

En la sección 6 se demostrará que si existen medidas invariantes, entonces existen medidas invariantes ergódicas, y que cualquier medida T-invariante se descompone en componentes ergódicas.

Usaremos la siguiente notación:

1. X es un espacio métrico compacto no vacío.

2. $1\!\!I_A$ es la función característica del boreliano $A \subset X$.

3. $\mathcal{M}(X)$ es el conjunto de las probabilidades definidas en los borelianos de X. Es un conjunto no vacío, pues contiene, por ejemplo, a las medidas delta de Dirac.

4. T es una transformación medible de X en X, no necesariamente continua, a menos que se pida expresamente.

5. $T^* : \mathcal{M}(X) \mapsto \mathcal{M}(X)$ es la transformación que a la medida μ le hace corresponder $T^*\mu$ definida como sigue:

$$T^*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)), \quad \text{para todo } A \text{ boreliano en } X$$

   Nótese que T^* es lineal, en el sentido que mantiene combinaciones lineales convexas de medidas.

6. $\mathcal{M}_T(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : T^*\mu = \mu\}$ es el conjunto, quizás vacío, de las medidas de probabilidad invariantes por T.

7. Dada $h : X \mapsto \mathbb{C}$ medible, y dado $x \in X$, $\tilde{h}(x)$ denota el límite de los promedios de Birkhoff en x de h, cuando este límite existe:

$$\tilde{h}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} h \circ T^j(x)$$

8. $C^0(X) = \{f : X \mapsto \mathbb{C} \quad \text{continua } \}$ con la norma del supremo:

$$\|f\|_0 = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

   Obsérvese que este supremo es un máximo porque f es continua en X compacto. $C^0(X)$ es un espacio topológico con base numerable de abiertos (está demostrado por ejemplo en el libro Elementos de Topología Geral, de Elon Lages Lima). Luego existe un conjunto numerable denso.

9. $B_1(0) = \{f \in C^0(X) : \|f\|_0 \leq 1\}$ es la bola cerrada unitaria en $C^0(X)$.

10. $\{g_i \in B_1(0) : i \geq 1\}$ es un conjunto numerable denso en $B_1(0)$.

1 Teorema de existencia de medidas invariantes

Proposición 1.1 *Si $h \in L^1(T^*\mu)$ entonces $h \circ T \in L^1(\mu)$ y*

$$\int h \; dT^*\mu = \int h \circ T \; d\mu$$

Prueba: Por defindión de $T^*\mu$ vale si $h = 1\!\!I_A$, para A boreliano. Por linealidad la tesis vale para funciones simples medibles. Como toda función medible real no negativa es el límite en todo punto de una sucesión creciente de funciones simples no negativas, por el teorema de convergencia monótona, la tesis también vale para h real medible no negativa. Luego por la linealidad, descomponiendo en parte positiva y parte negativa, la tesis vale para h real, y descomponiendo en partes real e imaginaria, para h compleja. ■

Teorema 1.2 *Si T es continua en el espacio métrico compacto X, entonces existe alguna medida de probabilidad en los borelianos de X que es T-invariante.*

La prueba del teorema anterior se basa en el siguiente teorema sobre la topología débil estrella en $\mathcal{M}(X)$, que probaremos en la siguiente sección:

Teorema 1.3 *En $\mathcal{M}(X)$ existe una topología metrizable, llamada topología débil estrella, tal que:*

1. *$\mu_n \to \mu$ si y solo si, para todo $f \in C^0(X)$ se cumple $\int f \ d\mu_n \to \int f \ d\mu$.*
2. *$\mathcal{M}$ es compacto.*

Primero probaremos el teorema 1.2 de existencia de medidas invariantes, usando el teorema 1.3 de la topología débil estrella en el espacio de las medidas. Luego probaremos este último.

Prueba del teorema 1.2: Afirmación: Si T es continua entonces T^* es continua en la topología débil de $\mathcal{M}(X)$. Probemos que si $\mu_n \to \mu$ entonces $T^*\mu_n \to T^*\mu$. En efecto, para toda $f \in C^0(X)$ se cumple que $f \circ T \in C^0(X)$. Luego, por la parte 1. del teorema 1.3 de la topología débil en $\mathcal{M}(X)$, se tiene:

$$\int f \ \mathrm{d}T^*\mu_n = \int f \circ T \ \mathrm{d}\mu_n \to \int f \circ T \ \mathrm{d}\mu = \int f \ \mathrm{d}T^*\mu$$

Lo anterior prueba la afirmación enunciada.

Ahora tomemos $\mu_1 \in \mathcal{M}(X)$ cualquiera, y consideremos la sucesión de medidas:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} {T^*}^i \mu_1$$

Por la compacidad de $\mathcal{M}(X)$ existe una subsucesión convergente a una medida μ en la topología débil, es decir, $\mu_{n_j} \to \mu$. Por la continuidad de T^*, se cumple: $T^*\mu_{n_j} \to T^*\mu$. Demostremos ahora que $T^*\mu_{n_j} \to \mu$, con lo cual tenemos que $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ probando el teorema.

Basta probar que para toda $f \in C^0(X)$ se cumple:

$$\int f \ \mathrm{d}T^*\mu_{n_j} \to \int f \ \mathrm{d}\mu$$

Como T^* preserva combinaciones lineales convexas de medidas, tenemos

$$\int f \, \mathrm{d}T^*\mu_{n_j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\int f\circ T^{i+1} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\int f\circ T^{i} \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{n_j}\int f\circ T^{n_j} \, \mathrm{d}\mu - \frac{1}{n_j}\int f \, \mathrm{d}\mu$$

$$\to \lim_{j\to\infty}\int f \, \mathrm{d}\mu_{n_j} = \int f \, \mathrm{d}\mu$$

Como lo anterior vale para toda $f \in C^0(X)$, se tiene $T^*\mu_{n_j} \to \mu$ como queríamos. ∎

Nota 1.4 En la prueba anterior se demostró que una sucesión de medidas converge a μ en la topología débil, verificando que para cada función continua, la sucesión de integrales converge a la integral respecto a μ. *Es falso que para todo A boreliano la sucesión de medidas de A converja a $\mu(A)$.*Véase el ejercicio 6.2.

2 Topología débil en el espacio de medidas de probabilidad

Veamos ahora el teorema 1.3 sobre la topología débil en el espacio de medidas, en el cual se apoya fuertemente el teorema de existencia de medidas invariantes. Recordaremos el teorema de Riesz, que está demostrado en el libro Análisis Real y Complejo, de W. Rudin:

Teorema 2.1 (Teorema de representación de Riesz) *Sea X espacio métrico compacto. Sea dado $\Lambda : C^0(X) \mapsto \mathbb{C}$, un funcional lineal positivo (esto es: $\Lambda f \geq 0$ si $f \geq 0$).*

Existe una única medida de Borel μ tal que

$$\Lambda f = \int f \, d\mu \quad \textit{para toda} \;\; f \in C^0(X)$$

Sea $\{g_i : i \geq 1\}$ un conjunto numerable denso en la bola unitaria cerrada de $C^0(X)$.

Precisaremos la siguiente proposición:

Proposición 2.2 *Dos medidas μ_1 y μ_2 en $\mathcal{M}(X)$ coinciden si para todo $i \geq 1$ se cumple*

$$\int g_i \, d\mu_1 = \int g_i \, d\mu_2$$

Prueba: Por la unicidad de la medida del teorema de Riesz alcanza probar que para toda $f \in C^0(X)$ se cumple:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu_1 = \int f \, \mathrm{d}\mu_2 \tag{1}$$

La igualdad (1) vale obviamente para f idénticamente nula. Si f no es idénticamente nula, basta demostrar (1) para $f/\|f\|_0$. Entonces supongamos que $\|f\|_0 = 1$. Por la densidad de las funciones $\{g_i\}$ en $B_1(0)$, existe una sucesion g_{i_n} convergente uniformemente (es decir con la norma del supremo en $C^0(X)$), a la función f. Por lo tanto, converge también puntualmente y está uniformemente acotada por 1. Cada g_{i_n} verifica la igualdad (1). Luego, por convergencia dominada, f también cumple (1). ■

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema 1.3 sobre las propiedades de la topología débil estrella en el conjunto de las medidas de probabilidad en X.

Prueba del teorema 1.3: Sea en $\mathcal{M}(X)$ la métrica:

$$\mathrm{d}(\mu_1, \mu_2) = \sum_{i \geq 1} \frac{|\int g_i \, \mathrm{d}\mu_1 - \int g_i \, \mathrm{d}\mu_2|}{2^i}$$

donde $\{g_i : i \geq 1\}$ es un conjunto numerable denso en la bola unitaria cerrada de $C^0(X)$. Primero verifiquemos que d es efectivamente una distancia. Las propiedades simétrica y triangular son inmediatas. La positividad se obtiene de la proposición 2.2: si $\mathrm{d}(\mu_1, \mu_2) = 0$ entonces para todo $i \geq 1$ se cumple $\int g_i \, \mathrm{d}\mu_1 = \int g_i \, \mathrm{d}\mu_2$. Luego $\mu_1 = \mu_2$.

Ahora probemos la parte 1. del teorema 1.3: Si $\mathrm{d}(\mu_n, \mu) \to 0$ entonces, como

$$0 \leq \frac{|\int g_i \, \mathrm{d}\mu_n - \int g_i \, \mathrm{d}\mu|}{2^i} \leq \mathrm{d}(\mu_n, \mu)$$

se tiene que $\int g_i \, \mathrm{d}\mu_n \to_{n \to \infty} \int g_i \, \mathrm{d}\mu$ para todo $i \geq 1$.

Queremos probar que para toda $f \in C^0(X)$ se cumple

$$\int f \, \mathrm{d}\mu_n \to_{n \to \infty} \int f \, \mathrm{d}\mu \tag{2}$$

Esta igualdad se verifica trivialmente para f idénticamente nula. Basta mostrar (2) cuando $\|f\|_0 = 1$. Dado $\epsilon > 0$, sea g_i tal que $\|f - g_i\|_0 < \epsilon$ y sea $N \geq 1$ tal que para todo $n \geq N$, $|\int g_i \, \mathrm{d}\mu_n - \int g_i \, \mathrm{d}\mu| < \epsilon$. Sumando y restando los términos apropiados, aplicando la propiedad triangular del módulo de complejos, se tiene, para todo $n \geq N$ que $|\int f \, \mathrm{d}\mu_n - \int f \, \mathrm{d}\mu| < 3\epsilon$ como queríamos.

Recíprocamente, si para todo $f \in C^0(X)$ se cumple (2) entonces en particular se cumple para cada g_i. Dado $\epsilon > 0$ sea $M \geq 1$ tal que $\sum_{i=M+1}^{\infty} 2/2^i < \epsilon$, y sea $N \geq 1$ tal que $|\int g_i \, \mathrm{d}\mu_n - \int g_i \, \mathrm{d}\mu| < \epsilon$, para todo $n \geq N$ y para $i = 1, 2, \ldots, M$. Se tiene $\mathrm{d}(\mu_n, \mu) < 2\epsilon$ para todo $n \geq N$.

Ahora probemos la parte 2. del teorema (1.3): Como con la distancia d el conjunto $\mathcal{M}(X)$ es un espacio métrico, para probar que es compacto, basta demostrar que toda sucesión tiene alguna subsucesión convergente.

Sea $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de medidas en $\mathcal{M}(X)$.

Como para cada $i \geq 1$ la sucesión de números complejos $\{\int g_i \, \mathrm{d}\mu_n\}_{n\geq 0}$ está acotada en módulo por 1, cualquier subsucesión de ella, tendrá una subsucesión convergente en $\mathbb{C}$.

Sea una primera sucesión de naturales $\{n'_j\}$ tal que $\int g_1 \, \mathrm{d}\mu_{n'_j}$ converge cuando $j \to \infty$.

Sea una segunda sucesión de naturales $\{n"_j\}$, que sea *subsucesión* de la primera, tal que $\int g_2 \, \mathrm{d}\mu_{n"_j}$ converge cuando $j \to \infty$. Como es una subsucesión de la primera, también se cumple que $\int g_1 \, \mathrm{d}\mu_{n"_j}$ converge cuando $j \to \infty$.

Sea, por inducción, una i-ésima sucesión de naturales $\{n_j^{(i)}\}_{j\geq 1}$, subsucesión de todas las anteriores, tal que $\int g_i \, \mathrm{d}\mu_{n_j^{(i)}}$ converge cuando $j \to \infty$.

Tómese finalmente, la sucesión diagonal $\{n_j = n_j^{(j)}\}_{j\geq 1}$. Por construcción, para ella se cumple que $\int g_i \, \mathrm{d}\mu_{n_j}$ converge cuando $j \to \infty$, para todo $i \geq 1$.

Ahora probemos que para todo $f \in C^0(X)$ se cumple $\int f \, \mathrm{d}\mu_{n_j}$ converge cuando $j \to \infty$. Para ello basta probar que para cada f fijo, la sucesión de complejos, $\int f \, \mathrm{d}\mu_{n_j}$ es de Cauchy. Esta propiedad se verifica para cada g_i por construcción de la sucesión n_j. Se verifica trivialmente para f idénticamente nula. Basta verificarla ahora para f con norma 1. Por la densidad de las funciones g_i, dado ϵ existe g_i tal que $\|f - g_i\|_0 < \epsilon$. Luego, aplicando la triangular al módulo de los complejos, existirá N tal que si $j, h \geq N$, entonces $|\int f \, \mathrm{d}\mu_{n_j} - \int f \, \mathrm{d}\mu_{n_h}| < 3\epsilon$, o sea, la sucesión de las integrales de f es de Cauchy, como queríamos.

Sea Λ el funcional lineal positivo definido en $C^0(X)$ por $\Lambda f = \lim_{j\to\infty} \int f \, \mathrm{d}\mu_{n_j}$. Por el teorema de Riesz, existe una medida μ tal que $\Lambda f = \int f \, \mathrm{d}\mu$, para todo $f \in C^0(X)$. Luego, por la parte 1. del teorema 1.3, se tiene $\mu_{n_j} \to_{j\to\infty} \mu$. ■

3 Transformaciones únicamente ergódicas

Definición 3.1 La transformación T es *únicamente ergódica* si existe una única medida de probabilidad que es T invariante.

Por lo visto en el capítulo de ergodicidad, esta única medida es extremal, luego es ergódica.

Teorema 3.2 *Sea T continua en un espacio métrico compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *T es únicamente ergódica*

ii) *Para toda $f \in C^0(X)$, para todo $x \in X$ existe $\tilde{f}(x)$ y es un número independiente de x.*

iii) *Para toda $f \in C^0(X)$, la sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ definidas por*

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$$

converge uniformemente a una constante cuando $n \to \infty$.

Prueba: i) implica iii):

Sea μ la única medida de $\mathcal{M}_T(X)$. Probaremos f_n converge uniformemente a $\int f \, \mathrm{d}\mu$ en X. Por absurdo, supongamos que existe $\epsilon \geq 0$, y una sucesión $n_j \to \infty$ tal que $\sup_{x\in X} |f_{n_j}(x) - \int f \, \mathrm{d}\mu| \geq \epsilon$ para todo $j \geq 1$. Como el supremo es un máximo, existe $x_j \in X$, donde se alcanza.

Por el teorema de Riesz, existe una medida μ_j (no necesariamente T- invariante) tal que:

$$\forall \, g \in C^0(X): \quad \int g \, \mathrm{d}\mu_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1} g \circ T^i(x_j)$$

Por la compacidad del espacio $\mathcal{M}(X)$, existe una subsucesión convergente de esta medidas μ_j. Por simplicidad seguiremos usando la misma notación para la subsucesión que para la sucesión original.

$$\mu_j \to \nu$$

Afirmamos que ν es T- invariante. En efecto:

$$\int g \, \mathrm{d}T^*\nu = \int g \circ T \, \mathrm{d}\nu = \lim \int g \circ T \, \mathrm{d}\mu_j = \lim \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1} g \circ T^{i+1}(x_j)$$

$$= \lim \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1} g \circ T^i(x_j) = \lim \int g \, \mathrm{d}\mu_{n_j} = \int g \, \mathrm{d}\nu$$

Como por hipótesis T es únicamente ergódica, se tiene $\mu = \nu$. Entonces

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\nu = \lim f_{n_j}(x_j)$$

Pero por construcción

$$|f_{n_j}(x_j) - \int f \, \mathrm{d}\mu| \geq \epsilon \quad \text{para todo } j \geq 1$$

contradiciendo la igualdad anterior.

iii) implica ii) porque la convergencia uniforme en X implica la convergencia en todo punto de X.

ii) implica i): Sea Λ el funcional lineal positivo definido por

$$\Lambda(f) = \tilde{f}$$

para toda $f \in C^0(X)$.

Para toda medida μ que sea T invariante, por el teorema de Birkhoff

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu = \tilde{f} = \Lambda(f)$$

Por el teorema de Riesz, existe una única μ que cumple

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \Lambda(f)$$

Luego existe una única μ que es T- invariante. ■

Como ejemplo veremos en la próxima sección que la rotación irracional en el círculo es únicamente ergódica.

Definición 3.3 Sea T una transformación continua en un espacio métrico compacto X.

Un subconjunto $\Lambda \subset X$ es *minimal* si es compacto, no vacío, invariante hacia adelante (es decir: $T(\Lambda) \subset \Lambda$), y no existe ningún otro subconjunto de Λ que sea compacto, no vacío e invariante hacia adelante.

Es fácil ver que un conjunto Λ compacto, no vacío e invariante, es minimal si y solo si todas sus órbitas positivas son densas en Λ (porque la clausura de cada una de ellas es un compacto no vacío, invariante hacia adelante, y contenido en Λ).

Veamos como se vincula la ergodicidad única con los conjuntos minimales:

Teorema 3.4 *Si T es continua en un espacio métrico compacto X, y únicamente ergódica, entonces existe un único minimal Λ, y además Λ es el soporte de la medida invariante por T.*

Observación: El recíproco del teorema anterior es falso: Furnstenberg dio un ejemplo de transformación en el toro, para la cual todo el toro es minimal, que preserva la medida de Lebesgue y ésta no es ergódica (luego la transformación no es únicamente ergódica, pero existe un único minimal que es el soporte de una medida T-invariante).

Prueba: Sea μ la única medida invariante de T. Sea Λ el soporte de μ

$$\Lambda = \{x \in X : \forall\, V \text{ entorno de } x \;\; \mu(V) > 0\}$$

Λ es cerrado en X compacto, luego es compacto.

Si $y \in T(\Lambda)$, entonces $y = T(x), x \in \Lambda$. Para todo entorno U de y, $T^{-1}(U)$ es entorno de x, luego $0 < \mu(T^{-1}(U)) = \mu(U)$. Esto prueba que $y \in \Lambda$, luego Λ es invariante hacia adelante.

Sea Λ_0 compacto, no vacío, invariante hacia adelante. Sea $\tilde{T} = T|_{\Lambda_0} : \Lambda_0 \mapsto \Lambda_0$. Por el teorema de existencia de medidas invariantes, existe $\tilde{\nu}$ probabilidad que es $\tilde{T}$ invariante.

Sea ν probabilidad en X, definida así:

$$\nu(A) = \tilde{\nu}(A \cap \Lambda_0)$$

El soporte de ν está contenido en Λ_0. Probemos que ν es T-invariante:

$$\nu(T^{-1}(A) = \tilde{\nu}(T^{-1}(A) \cap \Lambda_0) = \tilde{\nu}\{x \in \Lambda_0 : T(x) \in A\} = \tilde{\nu}(\tilde{T}^{-1}(A \cap \Lambda_0)) = \tilde{\nu}(A \cap \Lambda_0) = \nu(A)$$

Como T es únicamente ergódica, $\nu = \mu$. Luego

$$\Lambda = \text{sop } \nu \subset \Lambda_0$$

Hemos probado que todo Λ_0 compacto, no vacío e invariante hacia adelante contiene a Λ. De ello se deducen dos cosas:

Primero, si Λ_0 además está contenido en Λ, entonces coincide con Λ. Luego Λ es minimal.

Segundo: si Λ_0 es minimal, entonces coincide con Λ. Luego Λ es el único minimal. ■

4 Medida de Haar

Proposición 4.1 *La rotación irracional en el círculo es únicamente ergódica.*

Prueba: En efecto $T(x) = x + x_0$ (mód. 1), donde x_0 es irracional. Como la medida de Lebesgue es invariante, ergódica, positiva en abiertos no vacíos, T es transitivo: tiene alguna órbita densa.

Para todo punto x y para todo $j \geq 0$ se cumple $T^j(x) = x + T^j(0)$. Como sumar x fijo es un homeomorfismo, es fácil ver que la órbita por x es densa si y solo si la órbita por 0 lo es. Luego, si hay una órbita densa, la órbita por 0 lo es (y todas las órbitas son densas).

Dada f continua, por el teorema de Birkhoff, para algún punto x_1 existe $\tilde{f}(x_1)$.

Por el teorema 3.2, basta probar que para todo x en el círculo, existe $\tilde{f}(x)$ y es igual a $\tilde{f}(x_1)$.

Fijemos x. Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$$

Probemos que dado $\epsilon > 0$, existe N tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|f_n(x) - \tilde{f}(x_1)| < 3\epsilon$. Por la afirmación ii) del teorema 3.2, esto implica la ergodicidad única de T.

Por la continuidad de f en el círculo, que es compacto, existe $\delta > 0$ tal que, si dos puntos distan menos que δ, entonces la función f en ellos difiere menos que ϵ, en módulo.

Por la densidad de la órbita positiva por 0, existe M tal que

$$\|T^M(0) + x - x_1\| < \delta$$

Luego, para todo $j \geq 0$ se cumple $\|T^{M+j}(x) - T^j(x_1)\| < \delta$. Entonces, para todo $n \geq 1$, se tiene

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} f \circ T^{M+j}(x) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} f \circ T^j(x_1) \right| < \epsilon$$

Elíjase N tal que para todo $n \geq N$ la segunda sumatoria difiera de su límite $\tilde{f}(x_1)$ menos que ϵ.

Siendo M fijo al variar n, se elije N tal que, para todo $n \geq N$ se cumple

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} f \circ T^{M+j}(x) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} f \circ T^j(x) \right| \leq \frac{1}{n}(\sum_{j=0}^{M-1} \|f\|_0 + \sum_{j=n}^{j=n+M-1} \|f\|_0)$$

$$\leq \frac{2M\|f\|_0}{n} < \epsilon$$

Por la triangular, se tiene

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} f \circ T^j(x) - \tilde{f}(x_1) \right| < 3\epsilon$$

como se quería demostrar. ■

Nota 4.2 Nótese que esta prueba demuestra también que las traslaciones ergódicas del toro n-dimensional son únicamente ergódicas.

Consecuencias:

La medida de Lebesgue es la única medida de probabilidad en el toro invariante por todas las traslaciones. Esto no quiere decir que toda traslación sea únicamente ergódica, pues las traslaciones que tienen puntos periódicos no lo son.

Para toda traslación ergódica del toro, éste es minimal (pues es el soporte de la medida de Lebesgue). Luego, todas sus órbitas son densas.

Definición 4.3 Un *grupo topológico* X es un espacio topológico, en el que hay definida una operación binaria $+$ que lo transforma en grupo (es decir, tiene propiedad asociativa, de neutro 0, e inverso $-x$ para todo $x \in X$), tal que $+ : X \times X \mapsto X$ y $- : X \mapsto X$ son continuas.

El siguiente teorema, que solo demostraremos con hipótesis adicionales, generaliza para otros grupos topológicos compactos, la propiedad de la medida de Lebesgue para el toro n- dimensional:

Teorema 4.4 (Medida de Haar) *Dado un grupo topológico compacto X existe una única medida de probabilidad en los borelianos de X que es invariante por todas las traslaciones a la izquierda. Además esta medida es invariante también por todas las traslaciones a la derecha.*

Definición 4.5 La medida del teorema anterior se llama *medida de Haar.* La medida de Haar en el toro n-dimensional es la medida de Lebesgue.

Proposición 4.6 *Sea X un grupo topológico compacto abeliano (es decir vale la conmutativa para la operación de grupo) metrizable, y T una traslación que tiene una órbita densa. Entonces T es únicamente ergódica.*

Prueba: La misma prueba de que la rotación irrotacional en el círculo es únicamente ergódica (Proposición 4.1), demuestra esta proposición, con las siguientes modificaciones:

En vez de usar $\|y-z\| < \delta$, debe usarse dist $(y-z, 0) < \delta$. Probemos que si f es continua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todos y, z tales que dist $(y-z, 0) < \delta$, se cumple $|f(y)-f(z)| < \epsilon$. Por absurdo, supóngase que existen $\epsilon > 0$, y sucesiones y_n e z_n, tales que

$$\text{dist } (y_n - z_n, 0) < \frac{1}{n}$$

$$|f(y_n) - f(z_n)| \geq \epsilon$$

Tomando subsucesiones de y_n y z_n convergentes a y y z respectivamente, se tiene que

$$\text{dist } (y - z, 0) = 0, \quad \text{es decir } \ y = z$$

Por otro lado, como f es continua:

$$|f(y) - f(z)| \geq \epsilon$$

contradiciendo que $y = z$.

El resto de la prueba de 4.1 se aplica sin otros cambios.

■

Como consecuencia, se tiene una prueba del teorema 4.4 de la medida de Haar, con las siguientes hipótesis adicionales: *el grupo es abeliano, la topología es metrizable y existe una traslación con alguna órbita densa:*

Prueba parcial del teorema 4.4: Sea T_{x_0} una traslación que tiene alguna órbita densa. $T_{x_0}(x) = x + x_0$. Por la proposición 4.6, T_{x_0} es únicamente ergódica. Sea μ la única medida de probabilidad que es invariante por T_{x_0}. Basta demostrar que μ es también invariante por cualquier otra traslación.

Sea $x_1 \in X$ y sea $T_{x_1}(x) = x + x_1$. Basta demostrar que para toda $f \in C^0(X)$ se cumple:

$$\int f \circ T_{x_1} \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$$

Fijemos una función $f \in C^0(X)$. Dado $\epsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que, si la diferencia de dos puntos dista de 0 menos que δ, entonces los valores de f en ellos difieren, en módulo, menos que ϵ. Por la densidad de la órbita según T_{x_0}, existe $M \geq 0$ tal que $\mathrm{d}(T_{x_0}^M(0) - x_1, 0) < \delta$. Luego

$$\left\| f \circ T_{x_1} - f \circ T_{x_0}^M \right\|_0 < \epsilon$$

Siendo μ una medida T_{x_0} - invariante, la integral respecto de μ de f es igual a la integral de $f \circ T_{x_0}^M$. Entonces se tiene:

$$\left| \int f \circ T_{x_1} \, \mathrm{d}\mu - \int f \, \mathrm{d}\mu \right| < \epsilon$$

Como lo anterior vale para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene la igualdad de las integrales de f, como queríamos demostrar. ■

5 Las medidas promediales

Definición 5.1 Un subconjunto A de X tiene *probabilidad total* para la transformación T, si su complemento tiene medida nula *para toda* medida de probabilidad que sea T-invariante.

Ejemplo: Sea $h : X \mapsto C$ una función medible y acotada. Sea

$$\Sigma_0(h) = \{x \in X : \tilde{h}(x) \text{ existe}\}$$

Por el teorema de Birkhoff $\Sigma_0(h)$ tiene probabilidad total.

Observaciones:

Vimos que si T es únicamente ergódica, entonces

$$\bigcap_{f \in C^0(X)} \Sigma_0(f) = X$$

Sin embargo, (véase ejercicio 6.5), siempre vale que

$$P = \bigcap_{h \text{ medible y acotada}} \Sigma_0(h) = \{x \in X : x \text{ es periódico }\}$$

Por ejemplo, en las traslaciones ergódicas del toro, P es el conjunto vacío.

En resumen: para cada h medible y acotada, el conjunto de los x donde existe el límite de los promedios de Birkhoff de h, tiene medida total. Pero este conjunto depende de h. En cambio puede ser vacío, y si no lo es, muy magro, el conjunto de los x donde existe, a la vez, el límite del promedio de Birkhoff de toda h medible y acotada.

Si en vez de tomar todas las funciones medibles y acotadas nos restringimos a las continuas, se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 5.2 *Sea T medible en un espacio métrico compacto X tal que $\mathcal{M}_T(X) \neq \emptyset$. Sea*

$$\Sigma_0 = \bigcap_{f \in C^0(X)} \Sigma_0(f)$$

el conjunto de los $x \in X$ para los cuales existe, a la vez, el límite de los promedios de Birkhoff de toda función continua.

Entonces Σ_0 tiene probabilidad total.

Prueba: Por el teorema de Birkhoff $\Sigma_0(f)$ tiene probabilidad total. Sea $\{g_i : i \geq 1\}$ un conjunto numerable denso en la bola unitaria cerrada de $C^0(X)$. El conjunto

$$\tilde{\Sigma}_0 = \bigcap_{i \geq 1} \Sigma_0(g_i)$$

tiene probabilidad total, por ser una intersección numerable de conjuntos con probabilidad total.

Probemos que $\tilde{\Sigma}_0 = \Sigma_0$. Sea $x \in \tilde{\Sigma}_0$. Sea $f \in C^0(X)$. Basta probar que existe $\tilde{f}(x)$. Existe trivialmente, si f es idénticamente nula. Si no lo es, dividiendo entre su norma, basta probar que existe $\tilde{f}(x)$ cuando $\|f\|_0 = 1$.

Dado $\epsilon > 0$ sea g_i tal que $\|f - g_i\|_0 < \epsilon$. Como existe $\tilde{g}_i(x)$, la sucesión de promedios de Birkhoff, de g_i en x, es de Cauchy: la diferencia de dos términos de esta sucesión con índices suficientemente grandes, es en módulo, menor que ϵ. Aplicando la propiedad triangular del módulo de complejos, resulta que la sucesión de promedios de Birkhoff de f en x también es de Cauchy, pues la diferencia de dos términos con índice grande resulta menor que 3ϵ. Luego es convergente, o sea, existe $\tilde{f}(x)$. ■

Consecuencia: Para todo $x \in \Sigma_0$, está definido el funcional lineal positivo $\Lambda_x(f) = \tilde{f}(x)$, en $C^0(X)$. Luego, por el teorema de Riesz, existe una única medida μ_x de probabilidad, para cada $x \in \Sigma_0$, tal que

$$\int f \, d\mu_x = \tilde{f}(x) \quad \text{para toda } f \in C^0(X)$$

Definición 5.3 Para cada $x \in \Sigma_0$ la única medida μ_x que cumple la igualdad anterior, se llama *medida promedial* de la órbita por x.

Observaciones: Es inmediato verificar que para todo $x \in \Sigma_0$ la medida promedial μ_x es el siguiente límite en $\mathcal{M}(X)$, con la topología débil:

$$\mu_x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{T^j(x)}$$

Las medidas promediales, por definición, evalúan los límites de los promedios de Birkhoff de las funciones continuas. Pero, como se verá en el siguiente teorema, también lo hacen para funciones medibles acotadas.

Teorema 5.4 *Sea $h : X \mapsto \mathbb{C}$ medible y acotada. El conjunto*

$$\Sigma'_0(h) = \left\{ x \in \Sigma_0 : \tilde{h}(x) \text{ existe y es igual a } \int h \; d\mu_x \right\}$$

tiene probabilidad total

Se observa que el conjunto $\Sigma'_0(h)$ depende de h. Puede ser vacía la intersección de todos los $\Sigma'_0(h)$, como ya vimos.

Para demostrar el teorema 5.4 necesitaremos el siguiente lema:

Lema 5.5 *Sea h_n una sucesión de funciones medibles, acotadas uniformemente, y que converge en todo punto a la función h. Si $\Sigma'_0(h_n)$ tiene probabilidad total para cada n, entonces $\Sigma'_0(h)$ tiene probabilidad total.*

Prueba: Por el teorema de Birkhoff, el conjunto $\Sigma_0(h)$ de los puntos $x \in X$ donde existe $\tilde{h}(x)$, tiene probabilidad total.

Luego $S(h) = \Sigma_0(h) \bigcap \left(\bigcap_{n\geq 1} \Sigma'_0(h_n) \right)$, tiene probabilidad total.

Si $x \in S(h)$, entonces, para todo $n \geq 1$, se cumple $\tilde{h}_n(x) = \int h_n \; \mathrm{d}\mu_x$. Por el teorema de convergencia dominada $\int h_n \; \mathrm{d}\mu_x \to \int h \; \mathrm{d}\mu_x$. Luego, para cada $x \in S(h)$ se cumple:

$$\tilde{h}_n(x) \to \int h \; \mathrm{d}\mu_x \tag{3}$$

Dada $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$, basta probar que existe un conjunto con medida μ igual a uno, contenido en $S(h) \cap \Sigma'_0(h)$.

Se cumple, por el teorema de Birkhoff y por convergencia dominada, lo siguiente:

$$\int |\tilde{h}_n - \tilde{h}| \, \mathrm{d}\mu \leq \int |h_n - h|\tilde{.} \, \mathrm{d}\mu = \int |h_n - h| \, \mathrm{d}\mu \to 0$$

Luego $\tilde{h}_n$ converge a $\tilde{h}$ en $L^1(\mu)$. Entonces, existe una subsucesión n_j, tal que

$$\tilde{h}_{n_j}(x) \to \tilde{h}(x) \quad \mu - \text{c.t.p.} \tag{4}$$

Reuniendo (3) y (4), se obtiene que para μ-c.t.p. los puntos de $x \in S(x)$, cumplen:

$$\tilde{h}(x) = \int h \, \mathrm{d}\mu_x$$

es decir, están en $\Sigma_0'(h)$ como se quería demostrar. ∎

Prueba del teorema 5.4: Demostraremos el teorema en varios pasos:

1. Cuando $h \in C^0(X)$: Por la definición de las medidas promediales, para toda función continua f, se cumple $\Sigma_0'(f) = \Sigma_0$, que tiene probabilidad total.

2. Cuando $h = 1\!\!I_K$, para K compacto: Tomando una sucesión de abiertos V_n, cuya intersección sea K, se elige una sucesión de funciones continuas f_n, tales que $0 \leq f_n(x) \leq 1$ para todo $x \in X$, y $\lim f_n(x) = 1\!\!I_k$ para todo punto $x \in X$. (Basta tomar f_n continua, que valga 1 en K, 0 fuera de V_n, y tome valores en $[0, 1]$).

Por el lema 5.5 se cumple la tesis para $h = 1\!\!I_K$.

3. Cuando $h = 1\!\!I_A$, con A boreliano: Dada $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$, elijamos una sucesión de compactos $K_1 \subset K_2 \subset \ldots K_n \ldots \subset A$ tales que $\mu(A - K_n) \to 0$. Entonces

$$\|\tilde{1\!\!I}_A - \tilde{1\!\!I}_{K_n}\|_{L^1(\mu)} = \|1\!\!I_A - 1\!\!I_{K_n}\|_{L^1(\mu)} \to 0$$

Existe una subsucesión n_j tal que $\tilde{1\!\!I}_{K_{n_j}}(x) \to \tilde{1\!\!I}_A(x)$ para μ-c.t.p. x.

Como ya se probó, en el paso 2, que $\tilde{1\!\!I}_{K_n}(x) = \int 1\!\!I_{K_n} \, \mathrm{d}\mu_x$ para μ-c.t.p. x, tenemos que, para un conjunto de x con medida μ igual a uno, se cumple:

$$\tilde{1\!\!I}_A(x) = \lim \int 1\!\!I_{K_{n_j}} \, \mathrm{d}\mu_x \leq \mu_x(A)$$

Análogamente para el complemento de A se obtiene la desigualdad

$$\tilde{1\!\!I}_{A^c}(x) \leq \mu_x(A^c)$$

Ambas desigualdades implican la tesis para $h = 1\!\!I_A$.

4. Para h función simple: vale la tesis por linealidad.

5. Para h medible real acotada positiva: vale la tesis porque se aproxima por funciones simples uniformemente acotadas, y se aplica el lema 5.5.

6. Para h función medible real acotada, vale la tesis por linealidad, separando h en parte positiva menos parte negativa.

7. Para h función medible acotada compleja, vale la tesis por linealidad, separando h en partes real e imaginaria. ■

Las medidas promediales pueden no ser T invariantes, como en el ejemplo siguiente: $T(x) = 1/2 \cdot x$ si $x \in (0,1]$, $T(0) = 1$. Véase que para todo $X \in [0,1]$ existe la medida promedial de la órbita por x, que es siempre la delta de Dirac concentrada en 0, pero no es T-invariante.

Proposición 5.6 (Invariancia de las medidas promediales) .

1. *Si T es continua, todas las medidas promediales de las órbitas por puntos en Σ_0, son T-invariantes.*

2. *Si T es medible, el conjunto Σ de los $x \in \Sigma_0$ para los cuales las medidas promediales μ_x son T-invariantes, tiene probabilidad total.*

Prueba:

1. Si T es continua, para todo $f \in C^0(X)$ se cumple que $f \circ T \in C^0(X)$, y entonces:

$$\int f \ \mathrm{d}T^*\mu_x = \int f \circ T \ \mathrm{d}\mu_x = (f \circ T)\tilde{}(x) = \tilde{f} \circ T(x) = \tilde{f}(x) = \int f \ \mathrm{d}\mu_x$$

Luego, por la unicidad de la medida del teorema de Riesz, $T^*\mu_x = \mu_x$.

2. Si T no es continua, el argumento anterior no es válido. En este caso definimos $\Sigma = \{x \in \Sigma_0 : \int f \ \mathrm{d}T^*\mu_x = \int f \ \mathrm{d}\mu_x \quad \text{para toda } f \in C^0(X)\}$. Basta probar que tiene probabilidad total.

Para cada $f \in C^0(X)$ se define el conjunto:

$$\Sigma(f) = \{x \in \Sigma_0 : \int f \ \mathrm{d}T^*\mu_x = \int f \ \mathrm{d}\mu_x\}$$

Se cumple que $\Sigma = \bigcap_{f \in C^0(X)} \Sigma(f)$. Se deja como ejercicio verificar lo siguiente:

a) Para cada $f \in C^0(X)$ el conjunto $\Sigma(f)$ tiene probabilidad total. b) Si $\{g_i : i \geq 1\}$ es un conjunto numerable denso en la bola unitaria cerrada de $C^0(X)$, entonces Σ es la intersección, para todo $i \geq 1$ de $\Sigma(g_i)$.

Luego, Σ tiene probabilidad total. ■

6 Descomposición ergódica de medidas invariantes

En esta sección probaremos que si T es medible en un espacio métrico compacto X, y si $\mathcal{M}_T(X)$ es no vacío, entonces existen medidas ergódicas, y toda medida invariante por T se puede descomponer como un promedio ponderado de las medidas ergódicas.

La existencia de las medidas ergódicas, y el hecho que estas generen el espacio de todas las medidas T-invariantes, son una consecuencia directa del teorema de Krein-Milman, que puede encontrarse en el libro Análisis Funcional, de W. Rudin:

Todo conjunto no vacío, convexo y compacto contiene puntos extremales, y es igual a la adherencia de la envolvente convexa de los puntos extremales.

Como $\mathcal{M}_T(X)$ es convexo, compacto con la topología débil (porque es cerrado en $\mathcal{M}(X)$), y es no vacío por hipótesis, entonces contiene puntos extremales. Ya vimos que las medidas extremales en $\mathcal{M}_T(X)$ son las ergódicas. Esto da la existencia de medidas ergódicas.

La segunda parte del teorema de Krein-Milman, asegura que toda medida T invariante es el límite, en la topología débil, de una sucesión de combinaciones lineales convexas de medidas ergódicas.

Aprovecharemos la teoría desarrollada sobre las medidas promediales para deducir otra prueba de la existencia de medidas ergódicas, cuando $\mathcal{M}_T(X) \neq \emptyset$, y también para deducir un resultado más preciso que el dado por el teorema de Krein-Milman: cómo se descompone explícitamente una medida invariante en función de las componentes ergódicas.

Definición 6.1 Sea T una transformación medible en el espacio métrico compacto X, tal que existen medidas T - invariantes. Se llaman *componentes ergódicas de* T a las medidas promediales μ_x de puntos x, que sean invariantes por T y ergódicas.

Vimos que para un conjunto Σ de probabilidad total, las medidas promediales son T-invariantes. Veremos ahora lo siguiente,

Teorema 6.2 (Ergodicidad de las medidas promediales) *Para un conjunto Σ_1 de probabilidad total, contenido en Σ, las medidas promediales son ergódicas.*

Para demostrarlo, precisaremos del siguente lema:

Lema 6.3 *Si T es medible en un espacio métrico compacto X, y deja invariante una medida de probabilidad μ en los borelianos de X, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *La medida μ es ergódica.*

ii) *Para toda $f \in C^0(X)$ se cumple $\tilde{f}(y) = \int f \ d\mu$, para μ-c.t.p. y.*

iii) *Para toda $i \geq 1$ se cumple $\tilde{g}_i(y) = \int g_i \ d\mu$, para μ-c.t.p. y.*

Prueba:

Recuérdese que se probó que μ es ergódica si y solo si para toda $h \in L^1(\mu)$ se cumple $\tilde{h}(y) = \int h \, \mathrm{d}\mu$ para μ-c.t.p. y.

Luego se obtiene trivialmente que i) implica ii) implica iii).

Para demostrar que iii) implica ii), se usa la densidad en la bola cerrada unitaria de las funciones g_i. Se deja como ejercicio.

Para demostrar que ii) implica i), se recuerda que las funciones continuas son densas en $L^1(\mu)$, con la norma L^1 y que los promedios de Birkhoff convergen a su límite, también en $L^1(\mu)$. Se deja como ejercicio. ■

Prueba del teorema 6.2

Sea para cada $f \in C^0(X)$ el conjunto

$$\Sigma_1(f) = \left\{ x \in \Sigma : \tilde{f}(y) = \int f \, \mathrm{d}\mu_x \quad \text{para } \mu_x\text{-c.t.p. } y \right\}$$

Por el lema 6.3 se tiene que

$$\Sigma_1 = \bigcap_{i \geq 1} \Sigma_1(g_i)$$

Basta entonces probar que $\Sigma_1(f)$ tiene probabilidad total para cada $f \in C^0(X)$. Por la linealidad respecto de f, basta probarlo cuando f es real.

Sea x dado en Σ (es decir, sabemos que existe la medida promedial μ_x de la órbita por x, y que es T-invariante). En lo que sigue dejaremos fijo el punto x.

Por definición de μ_x sabemos que $\int f \, \mathrm{d}\mu_x = \tilde{f}(x)$.

Luego, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$\tilde{f}(y) = \int f \, \mathrm{d}\mu_x \;\; \mu_x\text{-c.t.p. } y$$

$$\int (\tilde{f} - \tilde{f}(x))^2 \, \mathrm{d}\mu_x = 0$$

$$\int \tilde{f}^2 \, \mathrm{d}\mu_x - 2\tilde{f}(x) \int \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu_x + \tilde{f}(x)^2 = 0$$

$$\int \tilde{f}^2 \, \mathrm{d}\mu_x - \tilde{f}(x)^2 = 0$$

$$\int \tilde{f}^2 \, \mathrm{d}\mu_x = \tilde{f}(x)^2$$

Pero $\tilde{f}^2$ es una función medible y acotada, luego, por el teorema 5.4, el conjunto

$$\Sigma_1(f) = \left\{ x \in \Sigma : \int \tilde{f}^2 \, \mathrm{d}\mu_x = \tilde{f}(x)^2 \right\}$$

tiene probabilidad total, como queríamos demostrar. ■

Teorema 6.4 (Descomposición ergódica de medidas invariantes) *Sea μ una medida T-invariante. Para todo A boreliano se cumple*

$$\mu(A) = \int_{x \in X} \mu_x(A) \ d\mu$$

Para toda $h \in L^1(\mu)$ se cumple que $h \in L^1(\mu_x)$ μ-c.t.p. x y además:

$$\int h \ d\mu = \int_{x \in X} (\int h \ d\mu_x) \ d\mu$$

Observación: Nótese que las integrales del teorema anterior pueden hacerse en $x \in \Sigma_1$ en vez de en todo X, porque Σ_1 tiene probabilidad total. Luego, cualquier medida invariante es un valor esperado de las componentes ergódicas, o, dicho de otra forma, un promedio ponderado de éstas.

Prueba: La segunda parte del enunciado implica la primera, tomando $h = \mathbb{1}_A$.

Primero, demostremos la tesis cuando h es medible y positiva, aunque no esté en $L^1(\mu)$.

h es el límite, en todo punto, de una sucesión creciente de funciones simples positivas h_n. Cada función simple es medible y acotada. Por convergencia monótona y por el teorema 5.4 aplicado a la función simple h_n se tiene:

$$\int h \ \mathrm{d}\mu_x = \lim \int h_n \ \mathrm{d}\mu_x = \lim \tilde{h}_n(x) \qquad \mu\text{- c.t.p.} \quad x$$

Por convergencia monótona nuevamente, ahora aplicada a $\tilde{h}_n$, y por el teorema de Birkhoff aplicado a cada h_n:

$$\int_{x \in X} \left(\int h \ \mathrm{d}\mu_x \right) \ \mathrm{d}\mu = \lim \int_{x \in X} \tilde{h}_n(x) \ \mathrm{d}\mu = \lim \int h_n \ \mathrm{d}\mu = \int h \ \mathrm{d}\mu$$

Las anteriores igualdades tienen sentido aunque las integrales sean infinitas. Y muestran que si además $h \in L^1(\mu)$, entonces $h \in L^1(\mu_x)$ para μ-casi todo punto x.

En segundo lugar, probemos la tesis cuando $h \in L^1(\mu)$ es real. Descomponiendo h en partes positiva y negativa, como cada una de ellas cumple lo deseado, por linealidad, h también lo cumple.

Finalmente, si h es compleja, se descompone en partes real e imaginaria. ■

Corolario 6.5 *Un conjunto A tiene probabilidad total si y solo si tiene medida uno para cada medida ergódica.*

Prueba: Pues, si $\mu_x(A) = 1$ para todo $x \in \Sigma_1$, por el teorema 6.4, se cumple $\mu(A) = 1$, para toda medida μ que sea T-invariante. ■

La siguiente proposición demuestra que toda medida ergódica es componente ergódica:

Proposición 6.6 *Si μ es ergódica, entonces μ es componente ergódica. Precisamente $\mu = \mu_x$ para un conjunto de puntos x con medida μ igual a 1. Luego, en el teorema de descomposición ergódica, la única componente ergódica de T en función de la cual se descompone una medida ergódica μ, es la propia μ.*

Prueba: Como μ es ergódica, se tiene, para cada $f \in C^0(X)$:

$$\tilde{f}(x) = \int f \, \mathrm{d}\mu \qquad \text{para} \qquad \mu\text{-c.t.p.} \quad x$$

Luego, tomando un conjunto numerable denso en la bola unitaria cerrada de $C^0(X)$, y argumentando como en la prueba del teorema 6.2, existe un conjunto A de puntos x en X, con $\mu(A) = 1$, tal que

$$\tilde{f}(x) = \int f \, \mathrm{d}\mu \qquad \text{para toda} \qquad f \in C^0(X) \tag{5}$$

Por otro lado, por el teorema 6.2, y por la definición de las medidas promediales, se tiene que, para todo $x \in \Sigma_1$, la medida μ_x es ergódica y que

$$\tilde{f}(x) = \int f \, \mathrm{d}\mu_x \qquad \text{para toda} \qquad f \in C^0(X) \tag{6}$$

Como Σ_1 tiene probabilidad total, $\mu(\Sigma_1) = 1$.

De las igualdades (5) y (6), se tiene

$$\tilde{f}(x) = \int f \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu_x$$

para toda $f \in C^0(X)$, y para cada $x \in A \bigcap \Sigma_1$. Luego $\mu = \mu_x$ para μ- c.t.p. x como se quería demostrar. ■

TEORIA ERGODICA. Lista 6 de ejercicios

31 de octubre de 1997.

En los ejercicios de esta lista se usa la siguiente notación:

X es un espacio métrico compacto.

$C^0(X) = \{f : X \to C\text{continua}\}$ con la norma del supremo.

$T : X \to X$ es Borel-medible, no necesariamente continua a menos que se pida expresamente.

$\mathcal{M}(X)$ es el conjunto de las probabilidades en los borelianos de X.

$T^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ definida por $T^*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ para todo $A \subset X$ boreliano.

$\mathcal{M}_T(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : T^*\mu = \mu\}$

$\tilde{h}(x)$ es, cuando existe, $\text{lím}_{n\to\infty} 1/n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} h \circ T^j(x)$, para $x \in X$ y $h : X \mapsto C$ medible.

EJERCICIO 1 Supóngase que existe $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que $T^*\mu(A) \leq 2\mu(A)$ para todo boreliano $A \subset X$.

a) Probar que $2\mu - T^*\mu \in \mathcal{M}(X)$.

b) Si T es continua, probar que dado $\mu_0 \in \mathcal{M}(X)$ existe $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que $2\mu - T^*\mu = \mu_0$.
Sugerencia: Para todo $\mu \in \mathcal{M}(X)$ definir $G(\mu) = 1/2 \cdot (T^*\mu + \mu_0)$, $\mu_n = 1/n \cdot \sum_{j=1}^{n} G^j(\mu_0)$ y tomar una subsucesión convergente en $\mathcal{M}(X)$.

EJERCICIO 2 Sea $X = [0, 1]$. Para cada $n \geq 0$ sea μ_n la medida delta de Dirac concentrada en el punto $1/2^n$.

a) Probar que existe $\mu = \text{lím}_{n\to\infty}\mu_n$.

b) Encontrar $A \subset [0, 1]$ boreliano tal que no existe $\text{lím}_{n\to\infty}\mu_n(A)$.

Sugerencia: $A = \{1/2^{2j} : j \geq 0\}$.

c) Encontrar $B \subset [0, 1]$ boreliano tal que existe $\text{lím}_{n\to\infty}\mu_n(B) \neq \mu(B)$.

d) Encontrar $H \subset [0, 1]$ boreliano tal que $\text{lím}_{n\to\infty}\mu_n(H) = \mu(H)$.

EJERCICIO 3 En el toro $X = T^n$ sea T la traslación $T(x) = x + x_0$, con x_0 dado tal que $< x_0, k >\notin Z \quad \forall k \in Z^n - \{0\}$.

a) Demostrar que T es únicamente ergódica.

b) Demostrar que $\forall x \in X$, la medida de Lebesgue es el límite cuando $n \to \infty$ de las medidas $1/n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x)}$.

EJERCICIO 4 Probar que el conjunto siguiente tiene probabilidad total:

$$\left\{ x \in X : \text{ existe } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^{pj}(x) \ \ \forall\, f \in C^0(X), \ \forall\, p \geq 1 \right\}$$

Sugerencia: $\mathcal{M}_{T^p}(X) \supset \mathcal{M}_T(X)$.

EJERCICIO 5 Sea

$$P = \left\{ x \in X : \text{ existe } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} h \circ T^j(x) \ \ \forall\, h : X \mapsto C \text{ medible acotada} \right\}$$

a) Probar que P es el conjunto de los puntos periódicos de T. Sugerencia: 1) Inventar una sucesión $\{a_i\}_{i\geq 0}$ de ceros y unos tal que no exista el límite cuando $n \to \infty$ de $1/n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} a_j$. (Por ejemplo: 1 uno, 1 cero, 10 unos, 10 ceros, 100 unos, 100 ceros, 1000 unos, 1000 ceros, etc). 2) Si x no es periódico mostrar que $\tilde{\chi}_A(x)$ no existe para $A = \{T^i(x) : a_i = 1\}$.

b) Sea $A \subset X$ cualquier boreliano dado. Probar que tiene probabilidad total el conjunto $\{x \in X : \text{ existe } \lim{}_n \to \infty 1/n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x))\}$.

c) Probar que si T es continua, únicamente ergódica y existe un conjunto minimal con infinitos puntos, entonces $P = \emptyset$. Dar un ejemplo de tal T.

d) Sea T el shift de Bernoulli. Probar que $P \neq \emptyset$, pero $\mu(P) = 0$.

EJERCICIO 6 Sea $\{g_i : i \geq 1\}$ un conjunto numerable denso en la bola unitaria cerrada de $C^0(X)$.

Sea $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$. Probar que son equivalentes las afirmaciones siguientes:

i) μ es ergódica.

ii) $\tilde{f}(y) = \int f \mathrm{d}\mu$ μ-c.t.p. y; $\forall\, f \in C_0(X)$

iii) $\tilde{g}_i(y) = \int g_i \mathrm{d}\mu$ μ-c.t.p. y; $\forall\, i \geq 1$

Sugerencia: Recordar que μ es ergódica si y solo si para toda $h \in L^1(\mu) : \tilde{h}(y) = \int h \mathrm{d}\mu$, μ-c.t.p. y; y que las funciones continuas son densas en $L^1(\mu)$.

EJERCICIO 7 Sea Σ_0 el conjunto de probabilidad total:

$$\Sigma_0 = \Big\{x \in X : \tilde{f}(x) \text{ existe para toda } f \in C^0(X)\Big\}$$

y sea para cada $x \in \Sigma_0$ la medida μ_x del teorema de Riesz, tal que $\int f d\mathrm{d}\mu_x = \tilde{f}(x)$ para toda $f \in C^0(X)$.

Probar que los $x \in \Sigma_0$ para los cuales la medida μ_x es T-invariante, forman un conjunto Σ de probabilidad total. Sugerencia: Imitar la prueba de que Σ_0 tiene probabilidad total, para demostrar que $\int f \circ T \mathrm{d}\mu_x = \int f \mathrm{d}\mu_x$ para toda $f \in C^0(X)$, para $x \in \Sigma$.