Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a la Topología
Primer semestre 2004

Práctico 1

1. Probar las igualdades entre conjuntos vistas en el teórico.

2. Se define la diferencia simétrica de dos conjuntos A y B como $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Probar que $A \triangle B = A \triangle C$ implica $B = C$. Examinar la validez de un resultado análogo sustituyendo $\triangle$ por $\cup$, $\cap$ o $\times$.

3. Sea $\{A_{ij}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos con índices en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Probar o refutar que
$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right).$$

4. (i) Indicar qué propiedades (simétrica, reflexiva, transitiva) cumple la relación en el conjunto de los naturales: *"el natural m está en relación con el natural n si el máximo común divisor de m y n es par".*
   (ii) Se define en un conjunto una relación binaria que cumple las propiedades simétrica y transitiva. Comentar la siguiente "demostración"de que la relación es de equivalencia: Solo resta probar que es reflexiva, o sea, que dado cualquier elemento del conjunto, está en relación consigo mismo. De la propiedad simétrica, si un elemento m cualquiera del conjunto está en relación con n, entonces n está en relación con m. Aplicando la propiedad transitiva, resulta que m está en relación con m. Como m es arbitrario, está probada la relación simétrica.

5. Sea R una relación reflexiva sobre un conjunto A. Demostrar que R es una relación de equivalencia si y sólo si siempre que (a, b) y (a, c) estén en R, entonces (b, c) está en R.

6. Definir un orden total en el conjunto de los números complejos.

7. Sea N^+ el conjunto de todos los naturales positivos. Sean m, $n \in N^+$, se define $m \leq n$ si m divide n.
   (i) Probar que es un orden parcial.
   (ii) Sea $M = \{2, 3, 4, 8\}$. Hallar todos los elementos maximales de M. Definir elemento minimal, y hallarlos.
   (iii) Ídem (7ii) si M es el conjunto de todos los primos.

8. Sea V un espacio vectorial completo[1] con producto interno. Definiremos conjunto fundamental en V como un conjunto ortonormal de vectores C tal que no existe ningún vector $v \in V$ no nulo que sea ortogonal a todos los vectores de C (brevemente, $v \perp C \Rightarrow v = 0$). Probar que si $V \neq \{0\}$, entonces tiene un conjunto fundamental.

9. Sea A un conjunto, sea $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ una función tal que $X \subset Y \Rightarrow f(Y) \subset f(X)$. Dar un ejemplo de una función con esa propiedad. Probar que para toda familia $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjutos de A se cumplen $f(\cup X_\lambda) = \cap f(X_\lambda)$ y $f(\cap X_\lambda) = \cup f(X_\lambda)$.

10. Sea $f : X \to Y$ una función, $A \subset X$, $B \subset Y$, $\{A_\varphi\}_{\varphi\in\Phi}$ una familia de subconjuntos de X y $\{B_\psi\}_{\psi\in\Psi}$ una familia de subconjuntos de Y. Probar que:

[1] Eso quiere decir que toda sucesión de Cauchy es convergente.

(i) $f(\bigcup\limits_{\varphi\in\Phi} A_\varphi) = \bigcup\limits_{\varphi\in\Phi} f(A_\varphi)$ y $f(\bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} A_\varphi) \subset \bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} f(A_\varphi)$. Dar un ejemplo de inclusión estricta en el último caso.

(ii) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\psi\in\Psi} B_\varphi) = \bigcup\limits_{\psi\in\Psi} f^{-1}(B_\varphi)$ y $f^{-1}(\bigcap\limits_{\psi\in\Psi} B_\varphi) = \bigcap\limits_{\psi\in\Psi} f^{-1}(B_\varphi)$.

(iii) $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$.

(iv) $f[f^{-1}(B)] \subset B$ y $A \subset f^{-1}[f(A)]$. Dar ejemplos de inclusión estricta y probar que vale la igualdad si y solo si la función es sobreyectiva e inyectiva, respectivamente.

11. Sea una función $f : A \to B$.

(i) Probar que $f(X) \setminus f(Y) \subset f(X \setminus Y)$ para todos los subconjuntos X e Y de A. Dar un ejemplo de una función en que la inclusión es estricta.

(ii) Probar que si f es inyectiva, entonces $f(X) \setminus f(Y) = f(X \setminus Y)$ para todos los subconjuntos X e Y de A.

(iii) Probar que f es inyectiva si y solo si $f(A) \setminus f(X) = f(A \setminus X)$ para todo $X \subset A$.

(iv) Probar que f es inyectiva si y solo si para todo $X \subset A$, se cumple $X = f^{-1}(f(X))$. Teniendo en cuenta $f(f^{-1}(X))$, elaborar y probar una conjetura para que una función sea sobreyectiva.