

# Curvas paramétricas

Jana Rodriguez Hertz  
Cálculo 3

IMERL

1 de marzo de 2011

# curvas paramétricas - intervalos

## CURVAS PARAMÉTRICAS

P punto del <espacio  $P=(x,y,z)$   
plano  $P=(x,y)$

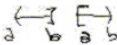
MÓVIL P depende del tiempo t

t "tiempo" variable real  $t \in I$  intervalo de reales I :

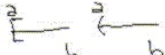
**TODOS LOS INTERVALOS**

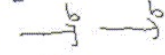
INTERVALOS ACOTADOS Sean  $a < b$  reales

$[a,b] = \{t \in \mathbb{R}; a \leq t \leq b\}$  ;  $(a,b) = \{a < t < b\}$  

$(a,b] = \{a < t \leq b\}$  ;  $[a,b) = \{a \leq t < b\}$  

INTERVALOS NO ACOTADOS

$[a, +\infty) = \{t \geq a\}$  ;  $(a, +\infty) = \{t > a\}$  

$(-\infty, b] = \{t \leq b\}$  ;  $(-\infty, b) = \{t < b\}$  

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$  todos los reales 

EJEMPLO NO ES UN INTERVALO

$$C = \{t \in \mathbb{R}; t \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$



$C = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$  excluyendo

# curvas paramétricas - definición

## CURVAS PARAMÉTRICAS

P punto del  $\begin{cases} \text{espacio} & P=(x,y,z) \\ \text{plano} & P=(x,y) \end{cases}$

MÓVIL P depende del tiempo t

t "tiempo" variable real  $t \in I$  intervalo de reales I:

$$P=P(t) : \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad t \in I \quad \text{CONTINUA}$$

DEFINICIÓN Curva paramétrica es la traza (o sea conjunto imagen, o recorrido) de la función  $P=P(t)$  CONTINUA con dominio en un intervalo de reales  $P(\cdot): I \rightarrow \text{espacio}$

La función  $P=P(\cdot)$  definida en I se llama "PARAMETRIZACIÓN"



$$P(t) : t \in [a, b]$$

$A=P(a)$  extremo inicial

$B=P(b)$  " final

↑ contiene la curva

2 ORIENTACIONES

$t \nearrow$   $t \searrow$

• coparametrizaciones

# curvas paramétricas - ejemplo 1

①

Ejemplos de curvas paramétricas

$$(1) \begin{cases} x = \frac{1}{t-1} & t \neq 1 \\ y = \frac{1}{(t-1)^2} \end{cases}$$

SON DOS CURVAS PARAMÉTRICAS

$$t \in (-\infty, 1)$$

$$t \in (1, +\infty)$$

$$\rightarrow x < 0$$

$$t \rightarrow 1^- \rightarrow x > 0$$

$$y = x^2$$

$$y = x^2$$

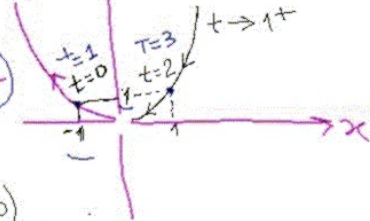
OTRA PARAMETRIZACIÓN

$$(2) \begin{cases} x = \frac{1}{T-2} & T \neq 2 \\ y = \frac{1}{(T-2)^2} \end{cases}$$

$$T = t + 1$$

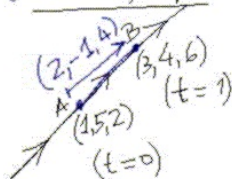
$$T \in (-\infty, 2)$$

$$T \in (2, +\infty)$$



## curvas paramétricas - ejemplos 2 y 3

② otro ejemplo



$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

Si  $t \in [0, 1]$   
la curva es el segmento  $\overline{AB}$

③ Ejemplo singular

$$P(t) = P_0: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{constantes} \\ \forall t \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\underline{\text{curva} = \{P_0\}}$$

DEFINICIÓN

Propiedad intrínseca

No cambia al modificar  
la parametrización elegida ni el  
sistema coordenado

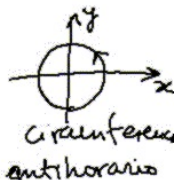
## curvas paramétricas - más ejemplos

### MÁS EJEMPLOS

① Graficar  $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

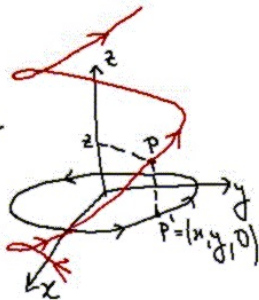
Pasando a polares  $\rho = r$  constante  
 $\varphi = t$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t = r^2$$



② Graficar  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$   
elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

③ Imaginar  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$



# curvas paramétricas - la cicloide

