

Teoremas de la divergencia y del rotor en el plano

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

5 de abril de 2011

divergencia

definición (divergencia)

divergencia

definición (divergencia)

- $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo $\vec{X} = (A, B, C)$

divergencia

definición (divergencia)

- $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo $\vec{X} = (A, B, C)$
- divergencia de $\vec{X}$

divergencia

definición (divergencia)

- $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo $\vec{X} = (A, B, C)$
- divergencia de $\vec{X}$
-

$$\operatorname{div} \vec{X} = \nabla \cdot \vec{X} = A_x + B_y + C_z$$

interpretación física

- $\operatorname{div} \vec{X}$ = tasa de expansión del volumen según el flujo de un gas o fluido

interpretación física

- $\text{div } \vec{X} =$ tasa de expansión del volumen según el flujo de un gas o fluido
- $\text{div } \vec{X} < 0$ el gas se comprime

interpretación física

- $\text{div } \vec{X}$ = tasa de expansión del volumen según el flujo de un gas o fluido
- $\text{div } \vec{X} < 0$ el gas se comprime
- $\text{div } \vec{X} > 0$ el gas se expande

interpretación física

- $\text{div } \vec{X} =$ tasa de expansión del volumen según el flujo de un gas o fluido
- $\text{div } \vec{X} < 0$ el gas se comprime
- $\text{div } \vec{X} > 0$ el gas se expande
- $\text{div } \vec{X} = 0$ el gas mantiene su volumen

ejemplo

campo gravitatorio

- $X(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}(x, y, z)$ campo gravitatorio

ejemplo

campo gravitatorio

- $X(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}(x, y, z)$ campo gravitatorio
- $A_x = -mMG \left(\frac{x}{r^3} \right)_x$

ejemplo

campo gravitatorio

- $X(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}(x, y, z)$ campo gravitatorio
- $A_x = -mMG \left(\frac{x}{r^3} \right)_x = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$

ejemplo

campo gravitatorio

- $X(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}(x, y, z)$ campo gravitatorio
- $A_x = -mMG \left(\frac{x}{r^3} \right)_x = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$
- $\text{div } \vec{X} = A_x + B_y + C_z$

ejemplo

campo gravitatorio

- $X(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}(x, y, z)$ campo gravitatorio
- $A_x = -mMG \left(\frac{x}{r^3}\right)_x = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$
- $\operatorname{div} \vec{X} = A_x + B_y + C_z = -\frac{mMG}{r^5}(3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2)$

ejemplo

campo gravitatorio

- $X(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}(x, y, z)$ campo gravitatorio
- $A_x = -mMG \left(\frac{x}{r^3}\right)_x = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$
- $\operatorname{div} \vec{X} = A_x + B_y + C_z = -\frac{mMG}{r^5}(3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) = 0$

integral curvilínea de una función

definición (integral curvilínea de una función)

integral curvilínea de una función

definición (integral curvilínea de una función)

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

integral curvilínea de una función

definición (integral curvilínea de una función)

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
- $\mathcal{C} \subset \Omega$ curva orientada

integral curvilínea de una función

definición (integral curvilínea de una función)

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
- $\mathcal{C} \subset \Omega$ curva orientada
- $P(t)$ parametrización de $\mathcal{C}$, $t \in [a, b]$

integral curvilínea de una función

definición (integral curvilínea de una función)

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
- $\mathcal{C} \subset \Omega$ curva orientada
- $P(t)$ parametrización de $\mathcal{C}$, $t \in [a, b]$
- integral curvilínea de f a lo largo de $\mathcal{C}$:

integral curvilínea de una función

definición (integral curvilínea de una función)

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
- $\mathcal{C} \subset \Omega$ curva orientada
- $P(t)$ parametrización de $\mathcal{C}$, $t \in [a, b]$
- integral curvilínea de f a lo largo de $\mathcal{C}$:
-

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(P(t)) \|\dot{P}(t)\| dt$$

teorema de Gauss

teorema de la divergencia en el plano

teorema de Gauss

teorema de la divergencia en el plano

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo

teorema de Gauss

teorema de la divergencia en el plano

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- $\overline{\Omega} \subset \Omega^*$ tal que $\partial\Omega$ simple cerrada antihoraria

teorema de Gauss

teorema de la divergencia en el plano

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- $\overline{\Omega} \subset \Omega^*$ tal que $\partial\Omega$ simple cerrada antihoraria
- $\Omega = \text{int}\partial\Omega$

teorema de Gauss

teorema de la divergencia en el plano

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- $\overline{\Omega} \subset \Omega^*$ tal que $\partial\Omega$ simple cerrada antihoraria
- $\Omega = \text{int}\partial\Omega$
- $\vec{n} = \frac{(\dot{y}, -\dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ normal exterior a $\partial\Omega$

teorema de Gauss

teorema de la divergencia en el plano

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- $\overline{\Omega} \subset \Omega^*$ tal que $\partial\Omega$ simple cerrada antihoraria
- $\Omega = \text{int}\partial\Omega$
- $\vec{n} = \frac{(\dot{y}, -\dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ normal exterior a $\partial\Omega$
- $\Rightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{X} \, dx \, dy$$

teorema de Gauss

teorema de la divergencia en el plano

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- $\overline{\Omega} \subset \Omega^*$ tal que $\partial\Omega$ simple cerrada antihoraria
- $\Omega = \text{int}\partial\Omega$
- $\vec{n} = \frac{(\dot{y}, -\dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ normal exterior a $\partial\Omega$
- $\Rightarrow$

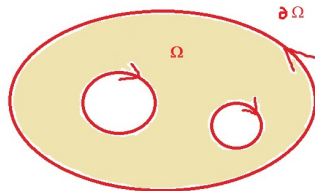
$$\int_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{X} \, dx \, dy$$

●

$$\int_{\partial\Omega} -Bdx + A dy = \iint_{\Omega} (A_x + B_y) \, dx \, dy$$

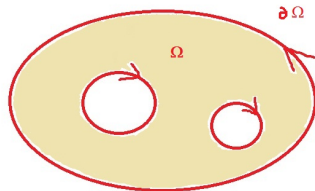
dominio teorema Gauss

- el teorema también se aplica a dominios de la forma:



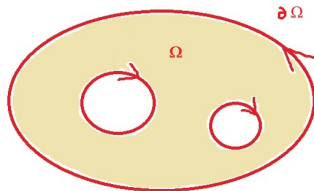
dominio teorema Gauss

- el teorema también se aplica a dominios de la forma:
- observar las orientaciones de las curvas borde



dominio teorema Gauss

- el teorema también se aplica a dominios de la forma:
- observar las orientaciones de las curvas borde
- unión finita de dominios con borde simple cerrado antihorario



flujo saliente de un campo a través de una curva

definición (flujo saliente de un campo)

flujo saliente de un campo a través de una curva

definición (flujo saliente de un campo)

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo

flujo saliente de un campo a través de una curva

definición (flujo saliente de un campo)

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- $\mathcal{C} = \partial\Omega$ conjunto de curvas orientadas como recién

flujo saliente de un campo a través de una curva

definición (flujo saliente de un campo)

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- $\mathcal{C} = \partial\Omega$ conjunto de curvas orientadas como recién
- $\vec{n}$ normal exterior a Ω

flujo saliente de un campo a través de una curva

definición (flujo saliente de un campo)

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- $\mathcal{C} = \partial\Omega$ conjunto de curvas orientadas como recién
- $\vec{n}$ normal exterior a Ω
- flujo saliente de $\vec{X}$ a través de $\mathcal{C}$:

flujo saliente de un campo a través de una curva

definición (flujo saliente de un campo)

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- $\mathcal{C} = \partial\Omega$ conjunto de curvas orientadas como recién
- $\vec{n}$ normal exterior a Ω
- flujo saliente de $\vec{X}$ a través de $\mathcal{C}$:
-

$$\int_{\partial\Omega} \vec{X} \vec{n} ds$$

ejemplo

ejemplo

- $\vec{X} = (y^3, x^5)$

ejemplo

ejemplo

- $\vec{X} = (y^3, x^5)$
- calcular el flujo saliente de $\vec{X}$ a través del borde del cuadrado unitario antihorario

ejemplo

ejemplo

- $\vec{X} = (y^3, x^5)$
- calcular el flujo saliente de $\vec{X}$ a través del borde del cuadrado unitario antihorario
- $\int_{\partial\Box} \vec{X} \vec{n} ds$

ejemplo

ejemplo

- $\vec{X} = (y^3, x^5)$
- calcular el flujo saliente de $\vec{X}$ a través del borde del cuadrado unitario antihorario
- $\int_{\partial\Box} \vec{X} \vec{n} ds = \iint_{\Box} \operatorname{div} X \, dx \, dy$

ejemplo

ejemplo

- $\vec{X} = (y^3, x^5)$
- calcular el flujo saliente de $\vec{X}$ a través del borde del cuadrado unitario antihorario
- $\int_{\partial\Box} \vec{X} \vec{n} ds = \iint_{\Box} \operatorname{div} X \, dx \, dy = 0$

teorema de green

teorema del rotor en el plano (Green)

teorema de green

teorema del rotor en el plano (Green)

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo

teorema de green

teorema del rotor en el plano (Green)

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- Ω y $\partial\Omega$ como en el teo. anterior

teorema de green

teorema del rotor en el plano (Green)

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- Ω y $\partial\Omega$ como en el teo. anterior
- $\Rightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{X} d\vec{s} = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{k} \, dx \, dy$$

teorema de green

teorema del rotor en el plano (Green)

- $\vec{X} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo
- Ω y $\partial\Omega$ como en el teo. anterior
- $\Rightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{X} d\vec{s} = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{k} \, dx \, dy$$

●

$$\int_{\partial\Omega} A dx + B dy = \iint_{\Omega} (B_x - A_y) \, dx \, dy$$

observación

observación

el teorema de la divergencia y el del rotor en el plano son equivalentes

observación 2

observación 2

el teorema de Green implica el teorema fundamental para campos irrotacionales (clase pasada)

observación 3

observación 3 (fórmula del área)

$$\text{area}(\Omega) = \iint_{\Omega} dx \, dy$$

observación 3

observación 3 (fórmula del área)

$$\begin{aligned}\text{area}(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \iint \nabla \cdot (x, y) dx \, dy\end{aligned}$$

observación 3

observación 3 (fórmula del área)

$$\begin{aligned}
 \text{area}(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx \, dy \\
 &= \frac{1}{2} \iint \nabla \cdot (x, y) \, dx \, dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x, y) \vec{n} \, ds
 \end{aligned}$$

observación 3

observación 3 (fórmula del área)

$$\begin{aligned}
 \text{area}(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx \, dy \\
 &= \frac{1}{2} \iint \nabla \cdot (x, y) \, dx \, dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x, y) \vec{n} \, ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x \, dy - y \, dx
 \end{aligned}$$

example - teorema Green

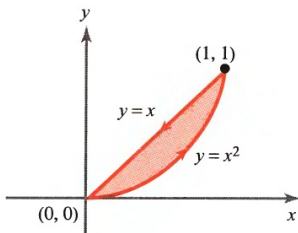
ejemplo

- $\vec{X} = (xy^2, x + y)$

example - teorema Green

ejemplo

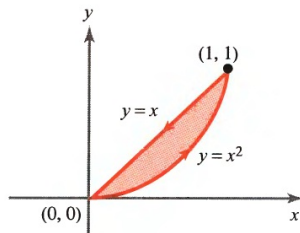
- $\vec{X} = (xy^2, x + y)$
- calcular la circulación de $\vec{X}$ sobre $\mathcal{C}$



example - teorema Green

ejemplo

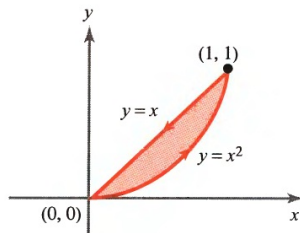
- $\vec{X} = (xy^2, x + y)$
- calcular la circulación de $\vec{X}$ sobre $\mathcal{C}$
- $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} d\vec{s} =$



example - teorema Green

ejemplo

- $\vec{X} = (xy^2, x + y)$
- calcular la circulación de $\vec{X}$ sobre $\mathcal{C}$
- $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{ds} = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{k} dx dy$



example - teorema Green

ejemplo

- $\vec{X} = (xy^2, x + y)$
- calcular la circulación de $\vec{X}$ sobre $\mathcal{C}$
- $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{ds} =$
 $\iint_{\Omega} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{k} dx dy = \frac{1}{12}$

