

Funciones armónicas. Problema de Dirichlet. Fórmulas de Green

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

7 de abril de 2011

Laplaciano

definición (Laplaciano)

Laplaciano

definición (Laplaciano)

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ función C^2

Laplaciano

definición (Laplaciano)

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ función C^2
- Laplaciano de f

Laplaciano

definición (Laplaciano)

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ función C^2
- Laplaciano de f
-

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

funciones armónicas

definición (función armónica)

funciones armónicas

definición (función armónica)

- f función armónica si

funciones armónicas

definición (función armónica)

- f función armónica si



$$\Delta f = \nabla^2 f \equiv 0$$

funciones armónicas

definición (función armónica)

- f función armónica si



$$\Delta f = \nabla^2 f \equiv 0$$

- (ecuación de Laplace)

transferencia del calor (solución estacionaria)

- $\overline{\Omega}$ corona $2 \leq r \leq 4$

transferencia del calor (solución estacionaria)

- $\overline{\Omega}$ corona $2 \leq r \leq 4$
- $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ temperatura en la corona

transferencia del calor (solución estacionaria)

- $\overline{\Omega}$ corona $2 \leq r \leq 4$
- $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ temperatura en la corona
- datos:

transferencia del calor (solución estacionaria)

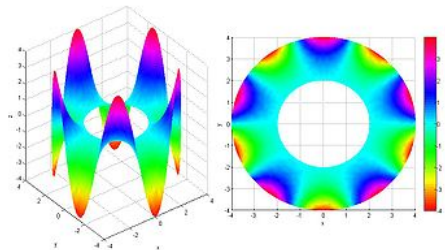
- $\overline{\Omega}$ corona $2 \leq r \leq 4$
- $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ temperatura en la corona
- datos:
- $u(4 \cos \theta, 4 \sin \theta) = 4 \sin(5\theta)$

transferencia del calor (solución estacionaria)

- $\overline{\Omega}$ corona $2 \leq r \leq 4$
- $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ temperatura en la corona
- datos:
- $u(4 \cos \theta, 4 \sin \theta) = 4 \sin(5\theta)$
- $u(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = 0$

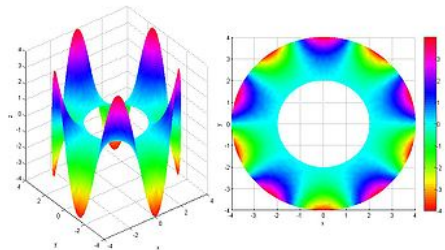
transferencia del calor (solución estacionaria)

- $\overline{\Omega}$ corona $2 \leq r \leq 4$
- $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ temperatura en la corona
- datos:
- $u(4 \cos \theta, 4 \sin \theta) = 4 \sin(5\theta)$
- $u(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = 0$



transferencia del calor (solución estacionaria)

- $\overline{\Omega}$ corona $2 \leq r \leq 4$
- $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ temperatura en la corona
- datos:
- $u(4 \cos \theta, 4 \sin \theta) = 4 \sin(5\theta)$
- $u(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = 0$
- cómo se transfiere el calor de un borde al otro?



problema de dirichlet

problema de dirichlet

problema de dirichlet

problema de dirichlet

- encontrar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

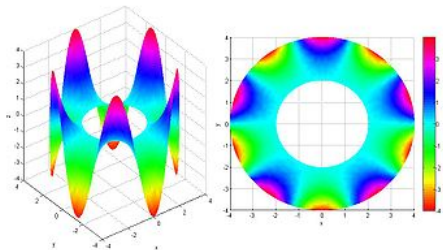
problema de dirichlet

problema de dirichlet

● encontrar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

●

$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$



teorema

teorema (unicidad soluciones (D))

teorema

teorema (unicidad soluciones (D))

- si existe solución de

teorema

teorema (unicidad soluciones (D))

- si existe solución de



$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

teorema

teorema (unicidad soluciones (D))

- si existe solución de



$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

- entonces es única

demostración

al final de esta clase

fórmula de green 1

fórmula de green 1

- $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ función C^2

fórmula de green 1

fórmula de green 1

● $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ función C^2

● $\Rightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n} ds = \iint_{\Omega} \nabla^2 u \, dx \, dy$$

fórmula de green 1

fórmula de green 1

● $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ función C^2

● $\Rightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} \nabla^2 u \, dx \, dy$$

demostración

- teo. divergencia (Gauss): $\int_{\partial\Omega} \vec{X} \vec{n} ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} dx dy$

demostración

- teo. divergencia (Gauss): $\int_{\partial\Omega} \vec{X} \vec{n} ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} dx dy$
- considerar $\vec{X} = \nabla u$

demostración

- teo. divergencia (Gauss): $\int_{\partial\Omega} \vec{X} \vec{n} ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} dx dy$
- considerar $\vec{X} = \nabla u$
- $\square$

fórmula de green 2

fórmula de green 2

fórmula de green 2

fórmula de green 2

fórmula de green 2

- $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ función C^2

fórmula de green 2

fórmula de green 2

● $u : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ función C^2

● $\Rightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} (u \nabla^2 u + (\nabla u)^2) dx dy$$

demostración

- teo. divergencia (Gauss): $\int_{\partial\Omega} \vec{X} \vec{n} ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} dx dy$

demostración

- teo. divergencia (Gauss): $\int_{\partial\Omega} \vec{X} \vec{n} ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} \, dx \, dy$
- considerar $\vec{X} = u \nabla u$

demostración

- teo. divergencia (Gauss): $\int_{\partial\Omega} \vec{X} \vec{n} ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} dx dy$
- considerar $\vec{X} = u \nabla u$
- $\square$

demostración unicidad soluciones (D)

- sup u_1, u_2 soluciones de

$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

demostración unicidad soluciones (D)

- sup u_1, u_2 soluciones de

$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

- $u_* = u_1 - u_2$

demostración unicidad soluciones (D)

- $\sup u_1, u_2$ soluciones de

$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

- $u_* = u_1 - u_2$
- FG2: $\int_{\partial\Omega} u_* \frac{\partial u_*}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} (u_* \nabla^2 u_* + (\nabla u_*)^2) dx dy$

demostración unicidad soluciones (D)

- $\sup u_1, u_2$ soluciones de

$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

- $u_* = u_1 - u_2$
- FG2: $\int_{\partial\Omega} u_* \frac{\partial u_*}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} (u_* \nabla^2 u_* + (\nabla u_*)^2) dx dy$
- $0 = \iint_{\Omega} (\nabla u_*)^2 dx dy$

demostración unicidad soluciones (D)

- $\sup u_1, u_2$ soluciones de

$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

- $u_* = u_1 - u_2$
- FG2: $\int_{\partial\Omega} u_* \frac{\partial u_*}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} (u_* \nabla^2 u_* + (\nabla u_*)^2) dx dy$
- $0 = \iint_{\Omega} (\nabla u_*)^2 dx dy$
- $\nabla u_* \equiv 0 \Rightarrow u_* = \text{cte}$

demostración unicidad soluciones (D)

- $\sup u_1, u_2$ soluciones de

$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

- $u_* = u_1 - u_2$
- FG2: $\int_{\partial\Omega} u_* \frac{\partial u_*}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} (u_* \nabla^2 u_* + (\nabla u_*)^2) dx dy$
- $0 = \iint_{\Omega} (\nabla u_*)^2 dx dy$
- $\nabla u_* \equiv 0 \Rightarrow u_* = \text{cte}$
- $\Rightarrow u_* \equiv 0 \quad \square$