Parametrización de superficies en $\mathbb{R}^3$

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

11 de abril de 2011

parametrización de una superficie

definición (parametrización de una superficie)

parametrización de una superficie

definición (parametrización de una superficie)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ continua e inyectiva

parametrización de una superficie

definición (parametrización de una superficie)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ continua e inyectiva
- parametrización de una superficie si

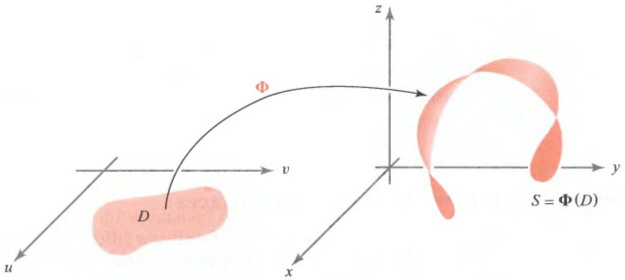
parametrización de una superficie

definición (parametrización de una superficie)

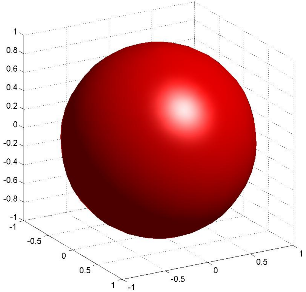
- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ continua e inyectiva
- parametrización de una superficie si
- $\Phi(u, v) = (x, y, z)$ con

$$(S) \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

parametrización de una superficie

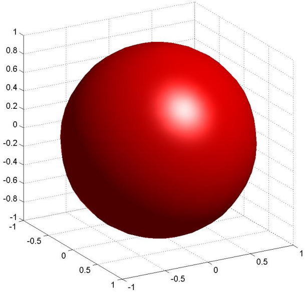


esfera



esfera centro 0 radio r

esfera

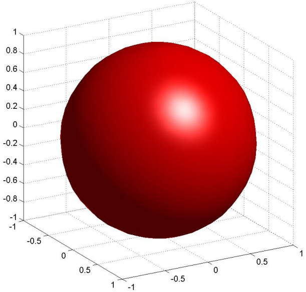


$$\begin{cases} x = r\cos u\cos v \\ y = r\sin u\cos v \\ z = r\sin v \end{cases}$$

$$u \in (0, 2\pi),\ v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

esfera centro 0 radio r

esfera



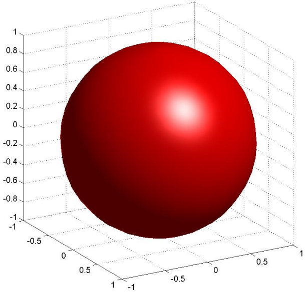
$$\begin{cases} x = r\cos u \cos v \\ y = r \sin u \cos v \\ z = r \sin v \end{cases}$$

$u \in (0, 2\pi),\ v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

falta una curva

esfera centro 0 radio r

esfera



$$\begin{cases} x = r \cos u \cos v \\ y = r \sin u \cos v \\ z = r \sin v \end{cases}$$

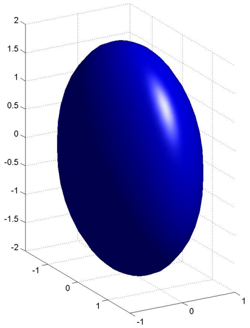
$u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

falta una curva

parametrizar la curva que falta

esfera centro 0 radio r

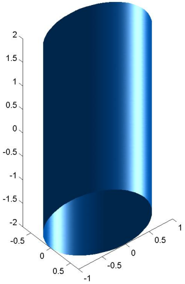
ejercicio



parametrizar el elipsoide

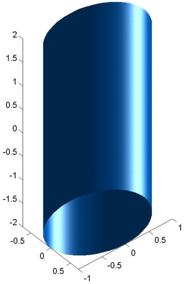
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

cilindro



cilindro elíptico centro 0, radios
a y *b*

cilindro

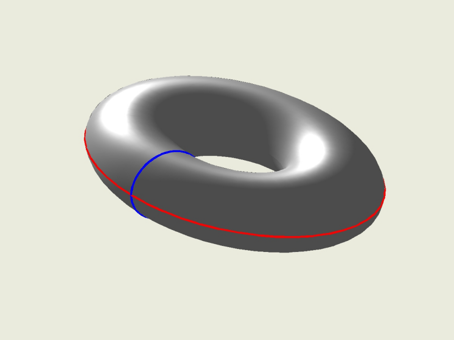


$$\begin{cases} x = a\cos u \\ y = b\sin u \\ z = v \end{cases}$$

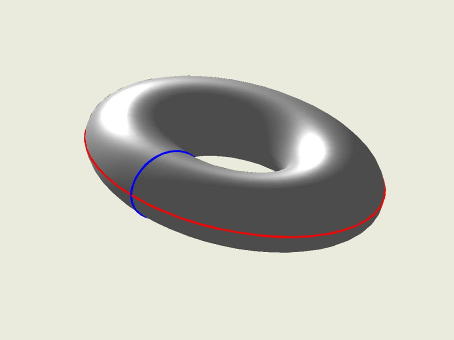
$$u \in (0, 2\pi),\ v \in (-1, 1)$$

cilindro elíptico centro 0, radios a y b

toro



toro



$$\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$$

$u \in (-\pi, \pi),\ v \in (0, 2\pi)$

observación

observación

hay infinitas formas de parametrizar una misma superficie

vectores tangentes

definición (vectores tangentes)

vectores tangentes

definición (vectores tangentes)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)

vectores tangentes

definición (vectores tangentes)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)
- $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ y

vectores tangentes

definición (vectores tangentes)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)
- $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ y
- $v \mapsto \Phi(u_0, v)$ curvas diferenciables en (u_0, v_0)

vectores tangentes

definición (vectores tangentes)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)
- $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ y
- $v \mapsto \Phi(u_0, v)$ curvas diferenciables en (u_0, v_0)
- llamamos vectores tangentes en las direcciones u y v:

vectores tangentes

definición (vectores tangentes)

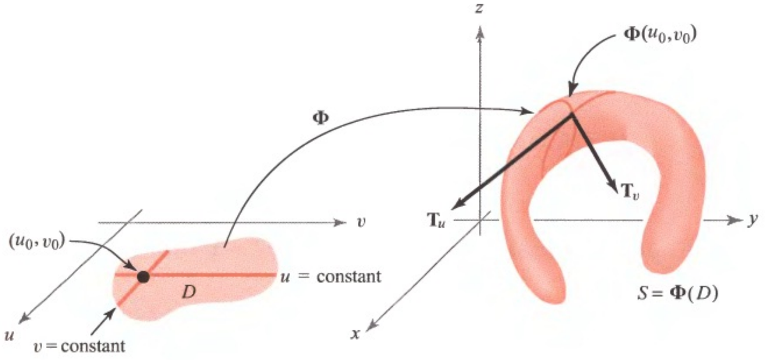
- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)
- $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ y
- $v \mapsto \Phi(u_0, v)$ curvas diferenciables en (u_0, v_0)
- llamamos vectores tangentes en las direcciones u y v:
- $$\Phi_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u)$$

vectores tangentes

definición (vectores tangentes)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)
- $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ y
- $v \mapsto \Phi(u_0, v)$ curvas diferenciables en (u_0, v_0)
- llamamos vectores tangentes en las direcciones u y v:
- $$\Phi_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u)$$
- $$\Phi_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v)$$

vectores tangentes en las direcciones *u* y *v*



vector tangente a la superficie

vector tangente a la superficie

vector tangente a la superficie

vector tangente a la superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)

vector tangente a la superficie

vector tangente a la superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)
- $t \mapsto \Phi(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ curva en la superficie

vector tangente a la superficie

vector tangente a la superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)
- $t \mapsto \Phi(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ curva en la superficie
- vector tangente a α

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=t_0} = \dot{\alpha}(t_0)$$

vector tangente a la superficie

vector tangente a la superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)
- $t \mapsto \Phi(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ curva en la superficie
- vector tangente a α

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=t_0} = \dot{\alpha}(t_0)$$

llamamos vector tangente a la superficie a todos los $\dot{\alpha}$

proposición

proposición

todos los vectores tangentes a $\Phi(D)$ son combinación lineal de

$$\Phi_u(u_0, v_0) \qquad \text{y} \qquad \Phi_v(u_0, v_0)$$

proposición

proposición

todos los vectores tangentes a $\Phi(D)$ son combinación lineal de

$$\Phi_u(u_0, v_0) \qquad \text{y} \qquad \Phi_v(u_0, v_0)$$

concretamente,

proposición

proposición

proposición

proposición

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)

proposición

proposición

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)
- $\dot{\alpha}(t_0)$ vector tangente a $t \mapsto \Phi(u(t), v(t))$

proposición

proposición

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en (u_0, v_0)
- $\dot{\alpha}(t_0)$ vector tangente a $t \mapsto \Phi(u(t), v(t))$
- $\Rightarrow$

$$\dot{\alpha}(t_0) = \dot{u}(t_0)\Phi_u(u_0, v_0) + \dot{v}(t_0)\Phi_v(u_0, v_0)$$