Área e integral de funciones de superficies paramétricas

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

10 de mayo de 2011

área de superficie paramétrica

definición (área)

área de superficie paramétrica

definición (área)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular

área de superficie paramétrica

definición (área)

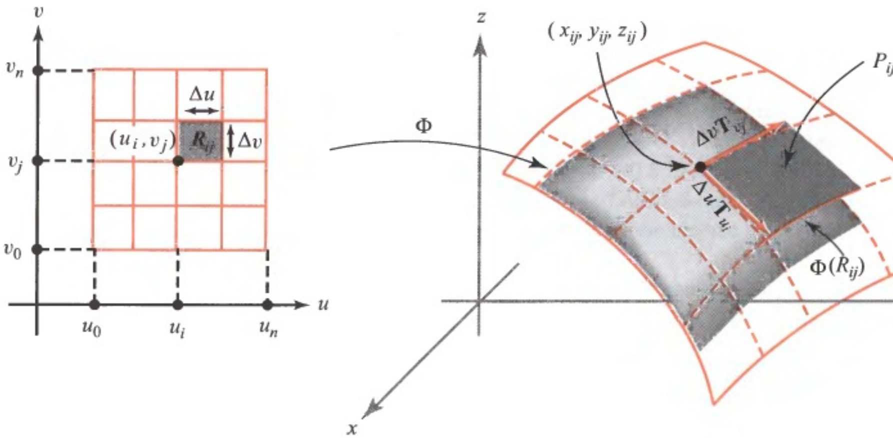
- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular
- área de la superficie $\Phi(D)$:

área de superficie paramétrica

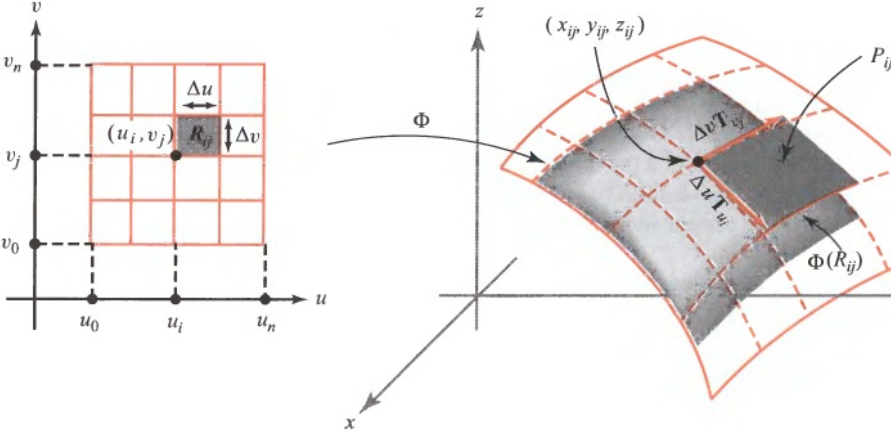
definición (área)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular
- área de la superficie $\Phi(D)$:
- $$A(\Phi(D)) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$$

justificación

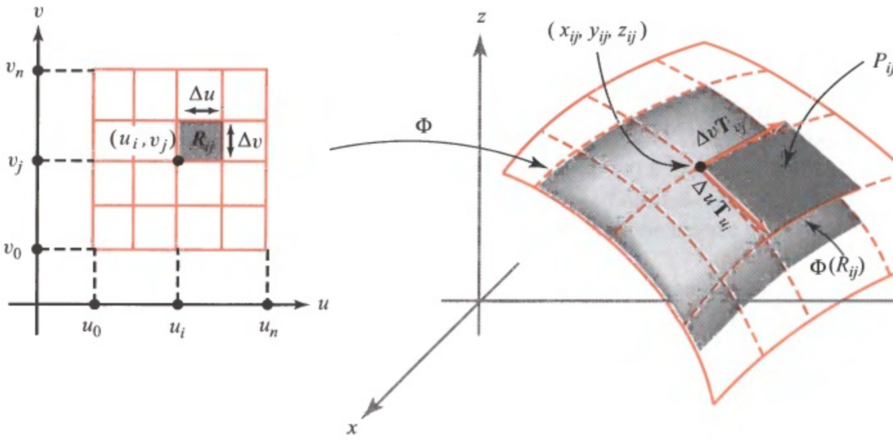


justificación



$$\Phi(R_{ij}) \approx \|\triangle u \Phi_u \wedge \triangle v \Phi_v(u_i, v_j)\|$$

justificación



$$\Phi(R_{ij}) \approx \|\triangle u \Phi_u \wedge \triangle v \Phi_v(u_i, v_j)\| = \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \triangle u \triangle v$$

justificación

$$\Phi(R_{ij}) \approx \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \triangle u \triangle v$$

justificación

$$\Phi(R_{ij}) \approx \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \triangle u \triangle v$$

$$A(\Phi(D)) = \lim_{R_{ij}\to 0} \sum_{i,j} \Phi(R_{ij})$$

justificación

$$\Phi(R_{ij}) \approx \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \triangle u \triangle v$$

$$A(\Phi(D)) = \lim_{R_{ij} \to 0} \sum_{i,j} \Phi(R_{ij}) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$$

la esfera

la esfera

la esfera

la esfera

- $\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r\sin u \sin v \\ z = r\cos v \end{cases}$ con $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (0, \pi)$

la esfera

la esfera

- $$\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r\cos v \end{cases} \quad \text{con } u \in (0, 2\pi),\ v \in (0, \pi)$$
- $A(S^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$

la esfera

la esfera

- $\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r\cos v \end{cases}$ con $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (0, \pi)$
- $A(S^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$
- $\Phi_u = (-r\sin u \sin v, r\cos u \sin v, 0)$

la esfera

la esfera

- $\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \quad \text{con } u \in (0, 2\pi),\ v \in (0,\pi) \\ z = r\cos v \end{cases}$
- $A(S^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$
- $\Phi_u = (-r\sin u \sin v, r\cos u \sin v, 0)$
- $\Phi_v = (r\cos u \cos v, r\sin u \cos v, -r\sin v)$

la esfera

la esfera

la esfera

la esfera

- $$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin u \sin v & r \cos u \sin v & 0 \\ r \cos u \cos v & r \sin u \cos v & -r \sin v \end{vmatrix} =$$

la esfera

la esfera

- $\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin u \sin v & r \cos u \sin v & 0 \\ r \cos u \cos v & r \sin u \cos v & -r \sin v \end{vmatrix} =$
- $= (-r^2 \cos u \sin^2 v, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin v \cos v)$

la esfera

la esfera

- $\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u \sin v & r\cos u \sin v & 0 \\ r\cos u \cos v & r\sin u \cos v & -r\sin v \end{vmatrix} =$
- $= (-r^2 \cos u \sin^2 v, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin v \cos v)$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|^2 = r^4(\sin^4 v + \sin^2 v \cos^2 v) = r^4 \sin^2 v$

la esfera

la esfera

- $\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin u \sin v & r \cos u \sin v & 0 \\ r \cos u \cos v & r \sin u \cos v & -r \sin v \end{vmatrix} =$
- $= (-r^2 \cos u \sin^2 v, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin v \cos v)$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|^2 = r^4(\sin^4 v + \sin^2 v \cos^2 v) = r^4 \sin^2 v$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = r^2 \sin v$

la esfera

la esfera

la esfera

la esfera

- $A(S^2) = r^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v dv$

la esfera

la esfera

- $A(S^2) = r^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v dv$
- $$A(S^2) = 4\pi r^2$$

el toro

el toro

el toro

el toro

- $$\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \quad \text{con } u, v \in (0, 2\pi) \\ z = r\sin u \end{cases}$$

el toro

el toro

- $\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$ con $u, v \in (0, 2\pi)$
- $A(T^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, du\, dv$

el toro

el toro

- $\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$ con $u, v \in (0, 2\pi)$
- $A(T^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$
- $\Phi_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u)$

el toro

el toro

- $\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$ con $u, v \in (0, 2\pi)$
- $A(T^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$
- $\Phi_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u)$
- $\Phi_v = (-(a + r\cos u)\sin v, (a + r\cos u)\cos v, 0)$

el toro

el toro

el toro

el toro

- $\Phi_u \wedge \Phi_v =$
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin u \cos v & -r \sin u \sin v & r \cos u \\ -(a + r \cos u) \sin v & (a + r \cos u) \cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

el toro

el toro

- $\Phi_u \wedge \Phi_v =$
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u\cos v & -r\sin u\sin v & r\cos u \\ -(a+r\cos u)\sin v & (a+r\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$
- $= r(a+r\cos u)(\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$

el toro

el toro

- $\Phi_u \wedge \Phi_v =$
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u\cos v & -r\sin u\sin v & r\cos u \\ -(a+r\cos u)\sin v & (a+r\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$
- $= r(a+r\cos u)(\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = r(a+r\cos u)$

el toro

el toro

el toro

el toro

- $A(T^2) = r \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} (a + r\cos u) du$

el toro

el toro

- $A(T^2) = r\int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} (a + r\cos u)du$
- $$A(T^2) = (2\pi r)(2\pi a)$$

integral de una función

definición (integral)

integral de una función

definición (integral)

- $S = \Phi(D)$ superficie paramétrica regular

integral de una función

definición (integral)

- $S = \Phi(D)$ superficie paramétrica regular
- $f : S \to \mathbb{R}$ función continua

integral de una función

definición (integral)

- $S = \Phi(D)$ superficie paramétrica regular
- $f : S \to \mathbb{R}$ función continua
- integral de f sobre S:

integral de una función

definición (integral)

- $S = \Phi(D)$ superficie paramétrica regular
- $f : S \to \mathbb{R}$ función continua
- integral de f sobre S:
- $$\iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$$

ejemplo

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- S está dada por $z = x^2 + y$ con $x \in [0, 1]$, $y \in [-1, 1]$

ejemplo

ejemplo

- S está dada por $z = x^2 + y$ con $x \in [0, 1]$, $y \in [-1, 1]$
- calcular $\iint_S x dS$

ejemplo

ejemplo

- S está dada por $z = x^2 + y$ con $x \in [0, 1]$, $y \in [-1, 1]$
- calcular $\iint_S x dS$
  1. parametrizar S

ejemplo

ejemplo

- S está dada por $z = x^2 + y$ con $x \in [0, 1]$, $y \in [-1, 1]$
- calcular $\iint_S x dS$
  1. parametrizar S
  2. calcular $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|$

ejemplo

ejemplo

- S está dada por $z = x^2 + y$ con $x \in [0, 1]$, $y \in [-1, 1]$
- calcular $\int\int_S x dS$
  1. parametrizar S
  2. calcular $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|$
  3. integrar

ejemplo

ejemplo

- $$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v \end{cases}$$

ejemplo

ejemplo

- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v \end{cases}$
- $\Phi_u = (1, 0, 2u)$

ejemplo

ejemplo

- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v \end{cases}$
- $\Phi_u = (1, 0, 2u)$
- $\Phi_v = (0, 1, 1)$

ejemplo

ejemplo

- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v \end{cases}$
- $\Phi_u = (1, 0, 2u)$
- $\Phi_v = (0, 1, 1)$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{4u^2 + 2}$

ejemplo

ejemplo

- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v \end{cases}$
- $\Phi_u = (1, 0, 2u)$
- $\Phi_v = (0, 1, 1)$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{4u^2 + 2}$
- $\int\int_S xdS = \int_{-1}^{1} dv \int_0^1 u\sqrt{4u^2 + 2}du$

ejemplo

ejemplo

- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v \end{cases}$
- $\Phi_u = (1, 0, 2u)$
- $\Phi_v = (0, 1, 1)$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{4u^2 + 2}$
- $\int\int_S x dS = \int_{-1}^{1} dv \int_0^1 u\sqrt{4u^2 + 2} du = \frac{1}{6}[4u^2 + 2]^{\frac{3}{2}}|_0^1$

ejemplo

ejemplo

- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v \end{cases}$
- $\Phi_u = (1, 0, 2u)$
- $\Phi_v = (0, 1, 1)$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{4u^2 + 2}$
- $\int\int_S xdS = \int_{-1}^{1} dv \int_0^1 u\sqrt{4u^2 + 2}du = \frac{1}{6}[4u^2 + 2]^{\frac{3}{2}}|_0^1$
- $\int\int_S xdS = \sqrt{6} - \frac{1}{3}\sqrt{2}$

masa y carga de un objeto plano

- $f(x, y, z) =$ densidad de masa en el punto (x, y, z)

masa y carga de un objeto plano

- $f(x, y, z) =$ densidad de masa en el punto (x, y, z)
- $\Rightarrow \int\int_S f dS$ masa total de la chapa

masa y carga de un objeto plano

- $f(x, y, z) =$ densidad de masa en el punto (x, y, z)
- $\Rightarrow \iint_S f dS$ masa total de la chapa
- $f(x, y, z) =$ carga en el punto (x, y, z)

masa y carga de un objeto plano

- $f(x, y, z) =$ densidad de masa en el punto (x, y, z)
- $\Rightarrow \iint_S f dS$ masa total de la chapa
- $f(x, y, z) =$ carga en el punto (x, y, z)
- $\iint_S f dS$ carga total