Flujo a través de una superficie orientada

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

12 de mayo de 2011

flujo a través de una superficie

definición (flujo)

flujo a través de una superficie

definición (flujo)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular

flujo a través de una superficie

definición (flujo)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular
- $\vec{X}$ campo vectorial

flujo a través de una superficie

definición (flujo)

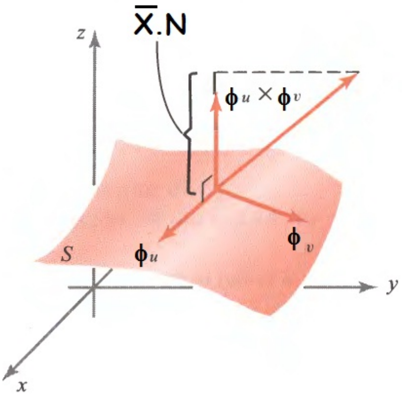
- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular
- $\vec{X}$ campo vectorial
- flujo de $\vec{X}$ a través de $\Phi(D)$:

flujo a través de una superficie

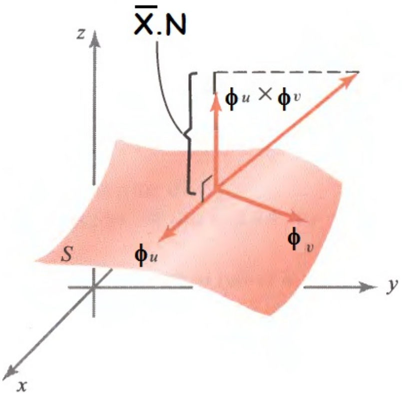
definición (flujo)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular
- $\vec{X}$ campo vectorial
- flujo de $\vec{X}$ a través de $\Phi(D)$:
- $$\iint_S \vec{X}.N\, dS = \iint_D \vec{X}.(\Phi_u \wedge \Phi_v)\, du\, dv$$

interpretación

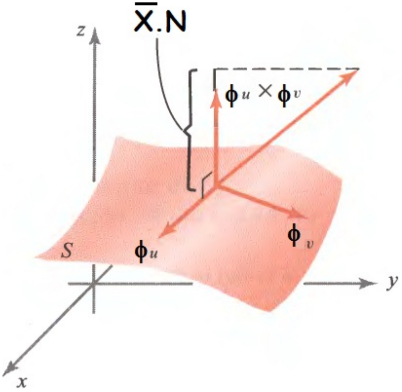


interpretación



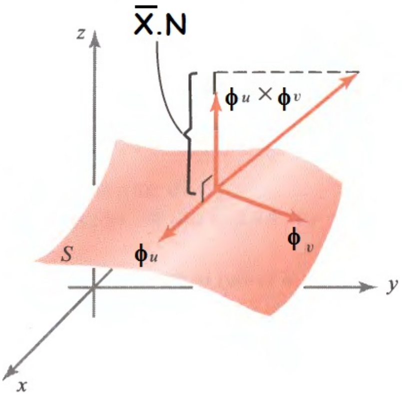
- $\vec{X}$ velocidad del fluído m/seg

interpretación



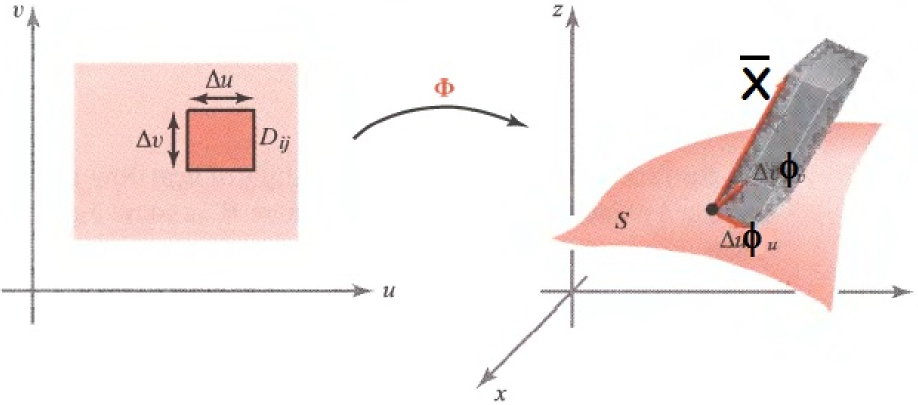
- $\vec{X}$ velocidad del fluído m/seg
- $\vec{X}.N\,dS$ componente normal a la superficie m^3/seg

interpretación



- $\vec{X}$ velocidad del fluído m/seg
- $\vec{X}.N\,dS$ componente normal a la superficie m^3/seg
- $\iint \vec{X}.N\,dS\ m^3/seg$ atraviesan la superficie

otra forma de verlo



otra forma de verlo

- $D_{ij} \subset D$ chiquito

otra forma de verlo

- $D_{ij} \subset D$ chiquito
- $P =$ paralelepípedo formado por $\vec{X}$, $\Phi_u \triangle u$, $\Phi_v \triangle v$

otra forma de verlo

- $D_{ij} \subset D$ chiquito
- $P =$ paralelepípedo formado por $\vec{X}$, $\Phi_u \triangle u$, $\Phi_v \triangle v$
- $\mathrm{vol}(P) = |(\vec{X}, \Phi_u \triangle u, \Phi_v \triangle v)|$

otra forma de verlo

- $D_{ij} \subset D$ chiquito
- $P =$ paralelepípedo formado por $\vec{X}$, $\Phi_u \triangle u$, $\Phi_v \triangle v$
- $\mathrm{vol}(P) = |(\vec{X}, \Phi_u \triangle u, \Phi_v \triangle v)|$
- cantidad de fluído que pasa por el paralelogramo tangente x unidad de tiempo

observación

observación

- Si $\Phi_u \wedge \Phi_v$ apunta para el mismo lado que la normal elegida

observación

observación

- Si $\Phi_u \wedge \Phi_v$ apunta para el mismo lado que la normal elegida
- entonces $(\vec{X}, \Phi_u, \Phi_v) > 0$,

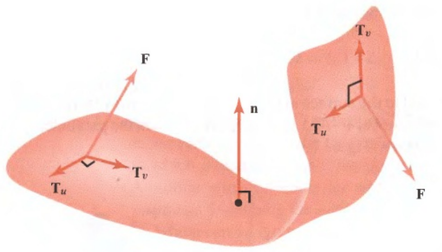
observación

observación

- Si $\Phi_u \wedge \Phi_v$ apunta para el mismo lado que la normal elegida
- entonces $(\vec{X}, \Phi_u, \Phi_v) > 0$,
- sino $(\vec{X}, \Phi_u, \Phi_v) < 0$

observación

observación

- Si $\Phi_u \wedge \Phi_v$ apunta para el mismo lado que la normal elegida
- entonces $(\vec{X}, \Phi_u, \Phi_v) > 0$,
- sino $(\vec{X}, \Phi_u, \Phi_v) < 0$
- 

aplicaciones

flujo magnético

- $\vec{X}$ campo magnético

aplicaciones

flujo magnético

- $\vec{X}$ campo magnético
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\,dS$ flujo magnético

aplicaciones

flujo magnético

- $\vec{X}$ campo magnético
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\, dS$ flujo magnético
- Ley de Faraday: flujo magnético = corriente en curva borde

aplicaciones

mecánica de los fluídos

- $\vec{X}$ campo de velocidades de un fluído

aplicaciones

mecánica de los fluídos

- $\vec{X}$ campo de velocidades de un fluído
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\,dS$ flujo

aplicaciones

mecánica de los fluídos

- $\vec{X}$ campo de velocidades de un fluído
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\, dS$ flujo
- Teorema de circulación de Kelvin: flujo saliente = circulación en curva borde

orientación

definición

- una orientación de $S = \Phi(D)$

orientación

definición

- una orientación de $S = \Phi(D)$
- es una elección continua de un vector normal n

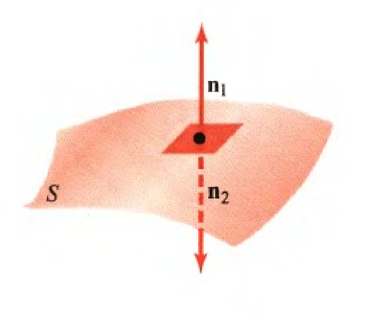
orientación

definición

- una orientación de $S = \Phi(D)$
- es una elección continua de un vector normal n
- puede apuntar para el mismo lado que $\Phi_u \wedge \Phi_v$ o no

orientación

definición

- una orientación de $S = \Phi(D)$
- es una elección continua de un vector normal n
- puede apuntar para el mismo lado que $\Phi_u \wedge \Phi_v$ o no
- 

observación

observación

si cambia la orientación de la superficie, cambia el signo del flujo

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- Calcular el flujo de $\vec{X} = (x, y, z)$ a través de la esfera de centro 0 y radio r orientada con normal saliente.

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- Calcular el flujo de $\vec{X} = (x, y, z)$ a través de la esfera de centro 0 y radio r orientada con normal saliente.
- $\begin{cases} x = r \cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases}$ con $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (0, \pi)$

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- Calcular el flujo de $\vec{X} = (x, y, z)$ a través de la esfera de centro 0 y radio r orientada con normal saliente.
- $\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r\sin u \sin v \\ z = r\cos v \end{cases}$ con $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (0, \pi)$
- $\Phi_u = (-r\sin u \sin v, r\cos u \sin v, 0)$

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- Calcular el flujo de $\vec{X} = (x, y, z)$ a través de la esfera de centro 0 y radio r orientada con normal saliente.
- $\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r\cos v \end{cases}$ con $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (0, \pi)$
- $\Phi_u = (-r\sin u \sin v, r\cos u \sin v, 0)$
- $\Phi_v = (r\cos u \cos v, r\sin u \cos v, -r\sin v)$

campo radial a través de la esfera

ejemplo

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- $$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin u \sin v & r \cos u \sin v & 0 \\ r \cos u \cos v & r \sin u \cos v & -r \sin v \end{vmatrix} =$$

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- $\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u \sin v & r\cos u \sin v & 0 \\ r\cos u \cos v & r\sin u \cos v & -r\sin v \end{vmatrix} =$
- $= (-r^2 \cos u \sin^2 v, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin v \cos v)$

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- $\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u \sin v & r\cos u \sin v & 0 \\ r\cos u \cos v & r\sin u \cos v & -r\sin v \end{vmatrix} =$
- $= (-r^2 \cos u \sin^2 v, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin v \cos v)$
- Normal entrante

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- $\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin u \sin v & r \cos u \sin v & 0 \\ r \cos u \cos v & r \sin u \cos v & -r \sin v \end{vmatrix} =$
- $= (-r^2 \cos u \sin^2 v, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin v \cos v)$
- Normal entrante
- $\int\int_S \vec{X}.N\, dS = -\int\int_D \vec{X}.(\Phi_u \wedge \Phi_v) du\, dv$

campo radial a través de la esfera

ejemplo

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- $\iint_S \vec{X}.N\, dS = -\iint_D \vec{X}(\Phi_u \wedge \Phi_v) du\, dv$

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- $\iint_S \vec{X}.N\,dS = -\iint_D \vec{X}(\Phi_u \wedge \Phi_v)du\,dv$
- $= r^3 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v\,dv$

campo radial a través de la esfera

ejemplo

- $\iint_S \vec{X}.N\, dS = -\iint_D \vec{X}(\Phi_u \wedge \Phi_v) du\, dv$
- $= r^3 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v\, dv$
- $$\iint_S \vec{X}.N\, dS = 4\pi r^3$$

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- $T(x, y, z)$ temperatura en el punto (x, y, z)

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- $T(x, y, z)$ temperatura en el punto (x, y, z)
- $\nabla T(x, y, z) = (T_x, T_y, T_z)$ gradiente de temperatura

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- $T(x, y, z)$ temperatura en el punto (x, y, z)
- $\nabla T(x, y, z) = (T_x, T_y, T_z)$ gradiente de temperatura
- $\Rightarrow$ temperatura fluye de acuerdo al campo:

$$\vec{X} = -k\nabla T$$

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- $T(x,y,z)$ temperatura en el punto (x,y,z)
- $\nabla T(x,y,z) = (T_x, T_y, T_z)$ gradiente de temperatura
- $\Rightarrow$ temperatura fluye de acuerdo al campo:

$$\vec{X} = -k\nabla T$$

- $\int\int_S \vec{X}.N\, dS$ flujo de temperatura a través de S

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- supongamos $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- supongamos $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- superficie: esfera de centro 0 y radio 1, con normal saliente

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- supongamos $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- superficie: esfera de centro 0 y radio 1, con normal saliente
- encontrar el flujo de temperatura a través de S si $k = 1$

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- supongamos $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- superficie: esfera de centro 0 y radio 1, con normal saliente
- encontrar el flujo de temperatura a través de S si $k = 1$
- $\vec{X} = -2(x, y, z)$

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- supongamos $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- superficie: esfera de centro 0 y radio 1, con normal saliente
- encontrar el flujo de temperatura a través de S si $k = 1$
- $\vec{X} = -2(x, y, z)$
- $N = (x, y, z)$ con $(x, y, z) \in S$

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- supongamos $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- superficie: esfera de centro 0 y radio 1, con normal saliente
- encontrar el flujo de temperatura a través de S si $k = 1$
- $\vec{X} = -2(x, y, z)$
- $N = (x, y, z)$ con $(x, y, z) \in S$
- $\iint_S \vec{X}.N\, dS = -2 \iint_S (x, y, z).(x, y, z) dS$

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- supongamos $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
- superficie: esfera de centro 0 y radio 1, con normal saliente
- encontrar el flujo de temperatura a través de S si $k = 1$
- $\vec{X} = -2(x,y,z)$
- $N = (x,y,z)$ con $(x,y,z) \in S$
- $\int\int_S \vec{X}.N\, dS = -2 \int\int_S (x,y,z).(x,y,z) dS = -2 \int\int_S dS$

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- supongamos $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- superficie: esfera de centro 0 y radio 1, con normal saliente
- encontrar el flujo de temperatura a través de S si $k = 1$
- $\vec{X} = -2(x, y, z)$
- $N = (x, y, z)$ con $(x, y, z) \in S$
- $\int\int_S \vec{X}.N\, dS = -2 \int\int_S (x, y, z).(x, y, z) dS = -2 \int\int_S dS$
- $\int\int_S \vec{X}.N\, dS = -2.A(S) = -8\pi$

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- el flujo de temperatura es negativo

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- el flujo de temperatura es negativo
- $\Rightarrow$ la temperatura fluye en sentido contrario a la normal

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- el flujo de temperatura es negativo
- $\Rightarrow$ la temperatura fluye en sentido contrario a la normal
- $\Rightarrow$ el calor “entra"

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- el flujo de temperatura es negativo
- $\Rightarrow$ la temperatura fluye en sentido contrario a la normal
- $\Rightarrow$ el calor “entra"
- $\Rightarrow$ el interior de la superficie se recalienta

flujo de temperatura

flujo de temperatura

- el flujo de temperatura es negativo
- $\Rightarrow$ la temperatura fluye en sentido contrario a la normal
- $\Rightarrow$ el calor “entra"
- $\Rightarrow$ el interior de la superficie se recalienta
- (ganancia de temperatura)

Ley de Gauss

flujo eléctrico

- $\vec{E}$ campo eléctrico

Ley de Gauss

flujo eléctrico

- $\vec{E}$ campo eléctrico
- S superficie cerrada, N normal saliente

Ley de Gauss

flujo eléctrico

- $\vec{E}$ campo eléctrico
- S superficie cerrada, N normal saliente
- Q carga encerrada por S

Ley de Gauss

flujo eléctrico

- $\vec{E}$ campo eléctrico
- S superficie cerrada, N normal saliente
- Q carga encerrada por S
- Ley de Gauss

$$\iint_S \vec{E}.N\, dS = Q$$

flujo eléctrico

flujo eléctrico

- Supongamos que $\vec{E} = E.N$, E constante

flujo eléctrico

flujo eléctrico

- Supongamos que $\vec{E} = E.N$, E constante
- $\Rightarrow \iint_S \vec{E}.N\, dS = E \iint_S N.N\, dS = E.A(S) = Q$

flujo eléctrico

flujo eléctrico

- Supongamos que $\vec{E} = E.N$, E constante
- $\Rightarrow \iint_S \vec{E}.N\,dS = E \iint_S N.N\,dS = E.A(S) = Q$
- si S es una esfera de radio r

flujo eléctrico

flujo eléctrico

- Supongamos que $\vec{E} = E.N$, E constante
- $\Rightarrow \iint_S \vec{E}.N\,dS = E\iint_S N.N\,dS = E.A(S) = Q$
- si S es una esfera de radio r
- $$E = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

flujo eléctrico

flujo eléctrico

- Supongamos que $\vec{E} = E.N$, E constante
- $\Rightarrow \iint_S \vec{E}.N\,dS = E \iint_S N.N\,dS = E.A(S) = Q$
- si S es una esfera de radio r
- $$E = \frac{Q}{4\pi r^2}$$
- es lo que pasa, por ejemplo, con las cargas puntuales

cargas puntuales

cargas puntuales

- supongamos que $\vec{E}$ surge de una carga puntual Q_0

cargas puntuales

cargas puntuales

- supongamos que $\vec{E}$ surge de una carga puntual Q_0
- $\Rightarrow \vec{E} = Q_0 N / 4\pi r^2$

cargas puntuales

cargas puntuales

- supongamos que $\vec{E}$ surge de una carga puntual Q_0
- $\Rightarrow \vec{E} = Q_0 N / 4\pi r^2$
- si Q es otra carga puntual, la fuerza que actúa en esta carga es

cargas puntuales

cargas puntuales

- supongamos que $\vec{E}$ surge de una carga puntual Q_0
- $\Rightarrow \vec{E} = Q_0 N / 4\pi r^2$
- si Q es otra carga puntual, la fuerza que actúa en esta carga es
- $\vec{X} = \vec{E}.Q = Q.Q_0.N / 4\pi r^2$

cargas puntuales

cargas puntuales

- supongamos que $\vec{E}$ surge de una carga puntual Q_0
- $\Rightarrow \vec{E} = Q_0 N / 4\pi r^2$
- si Q es otra carga puntual, la fuerza que actúa en esta carga es
- $\vec{X} = \vec{E}.Q = Q.Q_0.N/4\pi r^2$
- la magnitud de esta fuerza es:

$$X = \frac{Q.Q_0}{4\pi r^2}$$

cargas puntuales

cargas puntuales

- supongamos que $\vec{E}$ surge de una carga puntual Q_0
- $\Rightarrow \vec{E} = Q_0 N / 4\pi r^2$
- si Q es otra carga puntual, la fuerza que actúa en esta carga es
- $\vec{X} = \vec{E}.Q = Q.Q_0.N/4\pi r^2$
- la magnitud de esta fuerza es:

$$X = \frac{Q.Q_0}{4\pi r^2}$$

- Ley de Coulomb