

Teorema de Stokes (II)

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

19 de mayo de 2011

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo
- $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie regular

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo
- $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie regular
- $\vec{X}$ campo vectorial

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo
- $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie regular
- $\vec{X}$ campo vectorial
- $\partial S = \Phi(\partial D)$ orientada en forma compatible con N

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo
- $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie regular
- $\vec{X}$ campo vectorial
- $\partial S = \Phi(\partial D)$ orientada en forma compatible con N
- $\Rightarrow$

$$\iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} \, dS = \int_{\partial S} \vec{X} \, ds$$

interpretación física

rotor

circulación por unidad de área

interpretación física

rotor

circulación por unidad de área

- $$\iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = \int_{\partial S} \vec{X} ds$$

interpretación física

rotor

circulación por unidad de área

- $\iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = \int_{\partial S} \vec{X} ds$
- la integral de la componente normal del rotor de $\vec{X}$ sobre S

interpretación física

rotor

circulación por unidad de área

- $\iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = \int_{\partial S} \vec{X} ds$
- la integral de la componente normal del rotor de $\vec{X}$ sobre S
- = integral de la componente tangencial de $\vec{X}$ sobre ∂S

interpretación física

- $\vec{X}$ campo de velocidades de un fluido

interpretación física

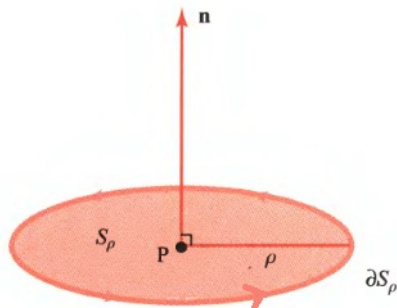
- $\vec{X}$ campo de velocidades de un fluido
- P un punto, N un vector unitario

interpretación física

- $\vec{X}$ campo de velocidades de un fluido
- P un punto, N un vector unitario
- S_ρ disco de centro P radio ρ , $S_\rho \perp N$

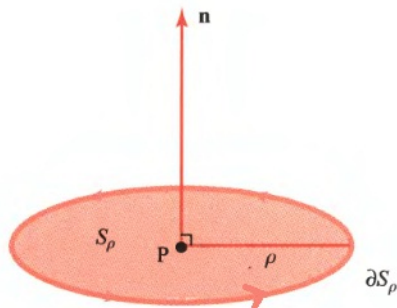
interpretación física

- $\vec{X}$ campo de velocidades de un fluido
- P un punto, N un vector unitario
- S_ρ disco de centro P radio ρ , $S_\rho \perp N$



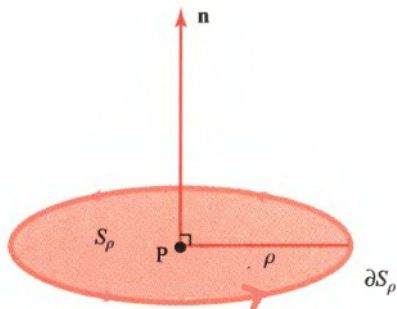
interpretación física

- $\vec{X}$ campo de velocidades de un fluido
- P un punto, N un vector unitario
- S_ρ disco de centro P radio ρ , $S_\rho \perp N$



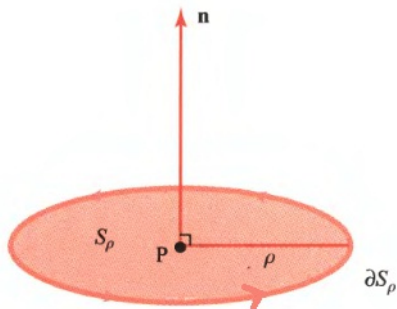
- $$\iint_{S_\rho} \text{rot } \vec{X} \cdot N \, dS = \int_{\partial S_\rho} \vec{X} \, ds$$

- $\vec{X}$ campo de velocidades de un fluido
- P un punto, N un vector unitario
- S_ρ disco de centro P radio ρ , $S_\rho \perp N$



- $\iint_{S_\rho} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = \int_{\partial S_\rho} \vec{X} ds$
- $\iint_{S_\rho} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = \text{rot } \vec{X}(Q) \cdot \vec{N} \cdot A(S_\rho)$

- $\vec{X}$ campo de velocidades de un fluido
- P un punto, N un vector unitario
- S_ρ disco de centro P radio ρ , $S_\rho \perp N$



- $\iint_{S_\rho} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} \, dS = \int_{\partial S_\rho} \vec{X} \, ds$
- $\iint_{S_\rho} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} \, dS = \text{rot } \vec{X}(\vec{Q}) \cdot \vec{N} \cdot A(S_\rho)$
- por teorema del valor medio para integrales

interpretación física

- $\frac{1}{A(S_\rho)} \iint_{S_\rho} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = \text{rot } \vec{X}(Q) \cdot \vec{N}$

interpretación física

- $\frac{1}{A(S_\rho)} \iint_{S_\rho} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = \text{rot } \vec{X}(Q) \cdot \vec{N}$
- $\frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\partial S_\rho} \vec{X} ds = \text{rot } \vec{X}(Q) \cdot \vec{N}$

interpretación física

- $\frac{1}{A(S_\rho)} \iint_{S_\rho} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = \text{rot } \vec{X}(Q) \cdot \vec{N}$

- $\frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\partial S_\rho} \vec{X} ds = \text{rot } \vec{X}(Q) \cdot \vec{N}$



$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\partial S_\rho} \vec{X} ds = \text{rot } \vec{X}(P) \cdot \vec{N}$$

interpretación física

- $\frac{1}{A(S_\rho)} \iint_{S_\rho} \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = \text{rot } \vec{X}(Q) \cdot \vec{N}$

- $\frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\partial S_\rho} \vec{X} ds = \text{rot } \vec{X}(Q) \cdot \vec{N}$



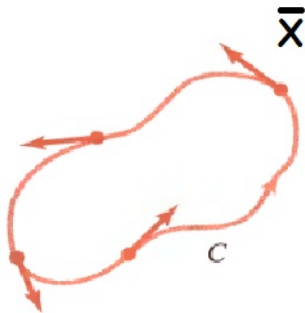
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\partial S_\rho} \vec{X} ds = \text{rot } \vec{X}(P) \cdot \vec{N}$$

- $\Rightarrow \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N}$ cantidad neta de giro del fluido alrededor de S_ρ

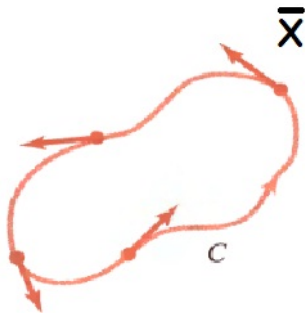
○○○○●○○○○

interpretación física

interpretación física



interpretación física

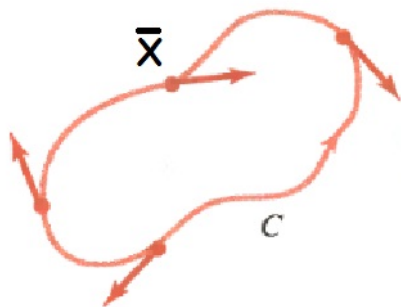


$$\text{rot } \vec{X}(P) \cdot N > 0$$

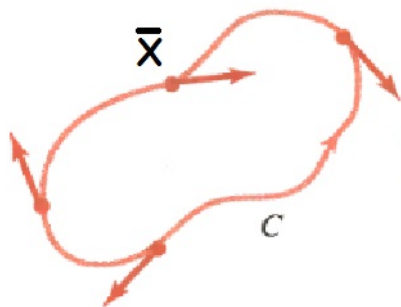
○○○○●○○○

interpretación física

interpretación física



interpretación física

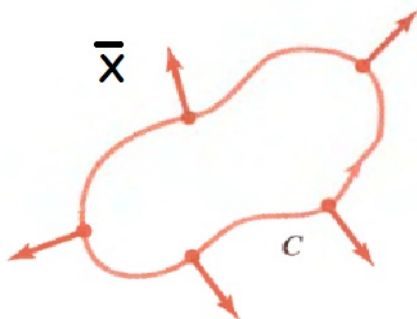


$$\text{rot } \vec{X}(P) \cdot N < 0$$

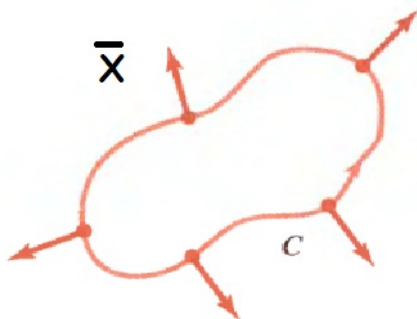
○○○○○●○○○

interpretación física

interpretación física



interpretación física



$$\text{rot } \vec{X}(P) \cdot N = 0$$

interpretación física

$\text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N}$

rotación neta del fluido alrededor del eje N

interpretación física

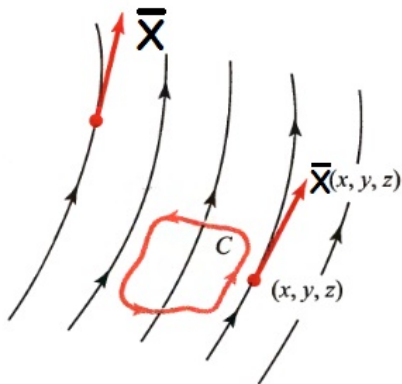
$$\text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N}$$

rotación neta del fluido alrededor del eje N

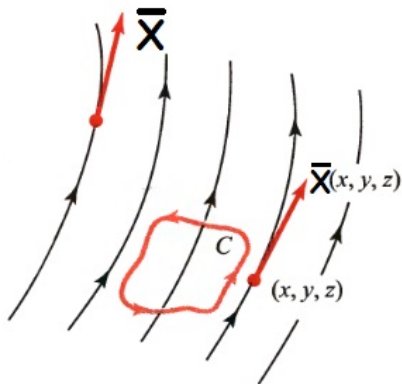
$$\text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N}(P)$$

circulación de $\vec{X}$ por unidad de área en P alrededor de una superficie perpendicular a N

interpretación física



interpretación física

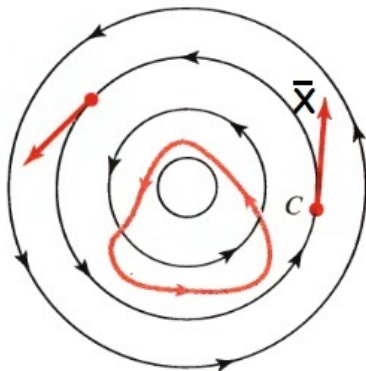


$$\text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N}(x, y, z) = 0$$

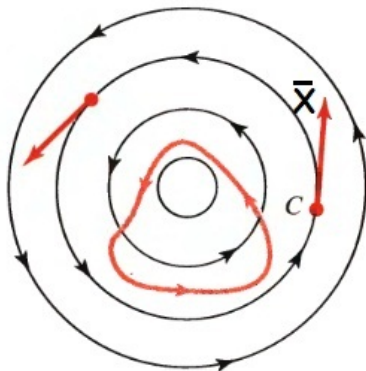
oooooooo●

interpretación física

interpretación física



interpretación física



$$\text{rot } \vec{X} \cdot N(x, y, z) > 0$$

ley de Faraday

- $\vec{E}(t)$ campo vectorial que depende de t

ley de Faraday

- $\vec{E}(t)$ campo vectorial que depende de t
- $\vec{H}(t)$ campo vectorial que depende de t

ley de Faraday

- $\vec{E}(t)$ campo vectorial que depende de t
- $\vec{H}(t)$ campo vectorial que depende de t
- S superficie con borde C

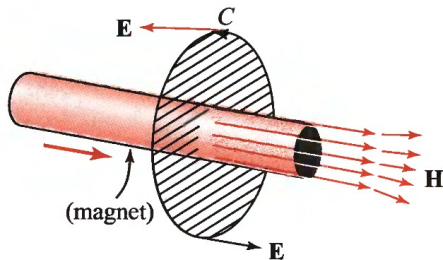
ley de Faraday

- $\vec{E}(t)$ campo vectorial que depende de t
- $\vec{H}(t)$ campo vectorial que depende de t
- S superficie con borde C
- $\int_C \vec{E} ds = \text{voltaje sobre } C$

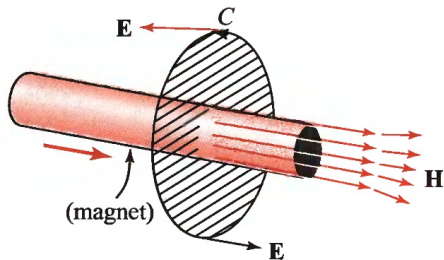
ley de Faraday

- $\vec{E}(t)$ campo vectorial que depende de t
- $\vec{H}(t)$ campo vectorial que depende de t
- S superficie con borde C
- $\int_C \vec{E} ds =$ voltaje sobre C
- $\iint_S \vec{H} \cdot \vec{N} dS =$ flujo magnético a través de S

ley de Faraday



ley de Faraday



ley de Faraday

$$\int_C \vec{E} ds = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{H} \cdot \vec{N} dS$$

de dónde sale

una de las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

de dónde sale

una de las ecuaciones de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

- Stokes: $\int_C \vec{E} ds = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS$

de dónde sale

una de las ecuaciones de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

- Stokes: $\int_C \vec{E} ds = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS$
- Maxwell: $\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS = - \iint \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{N} dS$

de dónde sale

una de las ecuaciones de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

- Stokes: $\int_C \vec{E} ds = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS$
- Maxwell: $\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS = - \iint \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{N} dS$
- juntando:

de dónde sale

una de las ecuaciones de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

- Stokes: $\int_C \vec{E} ds = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS$
- Maxwell: $\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS = - \iint \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{N} dS$
- juntando:
- $\int_C \vec{E} ds = - \iint_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{N} dS$

de dónde sale

una de las ecuaciones de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

- Stokes: $\int_C \vec{E} ds = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS$
- Maxwell: $\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS = - \iint \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{N} dS$
- juntando:
- $\int_C \vec{E} ds = - \iint_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{N} dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{H} \cdot \vec{N} dS$

de dónde sale

una de las ecuaciones de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

- Stokes: $\int_C \vec{E} ds = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS$
- Maxwell: $\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N} dS = - \iint \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{N} dS$
- juntando:
- $\int_C \vec{E} ds = - \iint_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{N} dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{H} \cdot \vec{N} dS$
- (ley de Faraday)

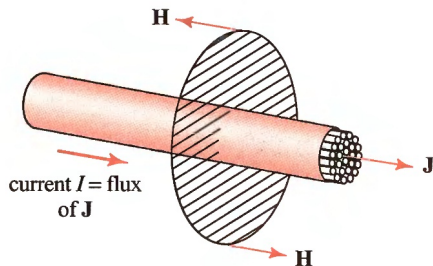
ley de Ampère

- $\vec{J}$ campo densidad de corriente eléctrica

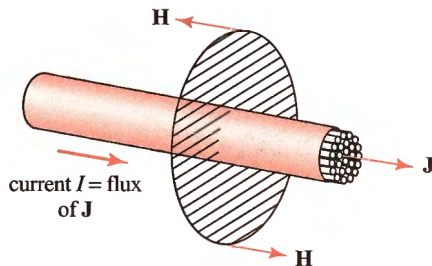
ley de Ampère

- $\vec{J}$ campo densidad de corriente eléctrica
- $\vec{H}$ campo electromagnético inducido

ley de Ampère



ley de Ampère



ley de Ampère

$$\oint_C \vec{H} ds = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{N} dS$$

de dónde sale

otra ecuación de Maxwell

$$\text{rot } \vec{H} = J$$

de dónde sale

otra ecuación de Maxwell

$$\text{rot } \vec{H} = J$$

- Stokes: $\int_C \vec{H} ds = \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS$

de dónde sale

otra ecuación de Maxwell

$$\text{rot } \vec{H} = J$$

- Stokes: $\int_C \vec{H} ds = \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS$
- Maxwell: $\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS = \iint_S J \cdot \vec{N} dS$

de dónde sale

otra ecuación de Maxwell

$$\text{rot } \vec{H} = J$$

- Stokes: $\int_C \vec{H} ds = \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS$
- Maxwell: $\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS = \iint_S J \cdot \vec{N} dS$
- juntando:

de dónde sale

otra ecuación de Maxwell

$$\text{rot } \vec{H} = J$$

- Stokes: $\int_C \vec{H} ds = \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS$
- Maxwell: $\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS = \iint_S J \cdot \vec{N} dS$
- juntando:
- $\int_C \vec{E} ds = \iint_S J \cdot \vec{N} dS$

de dónde sale

otra ecuación de Maxwell

$$\text{rot } \vec{H} = J$$

- Stokes: $\int_C \vec{H} ds = \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS$
- Maxwell: $\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS = \iint_S J \cdot \vec{N} dS$
- juntando:
- $\int_C \vec{E} ds = \iint_S J \cdot \vec{N} dS$

de dónde sale

otra ecuación de Maxwell

$$\text{rot } \vec{H} = J$$

- Stokes: $\int_C \vec{H} ds = \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS$
- Maxwell: $\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{N} dS = \iint_S J \cdot \vec{N} dS$
- juntando:
- $\int_C \vec{E} ds = \iint_S J \cdot \vec{N} dS$
- (ley de Ampère)

teorema

teorema

- D simplemente conexo

teorema

teorema

- D simplemente conexo
- $\vec{X} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ irrotacional

teorema

teorema

- D simplemente conexo
- $\vec{X} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ irrotacional
- $\Rightarrow \vec{X}$ es de gradientes

demostración

- D simplemente conexo

demostración

- D simplemente conexo
- $\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$

demostración

- D simplemente conexo
- $\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$
- C curva cerrada

demostración

- D simplemente conexo
- $\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$
- C curva cerrada
- $\Rightarrow C$ es borde de una superficie S

demostración

- D simplemente conexo
- $\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$
- C curva cerrada
- $\Rightarrow C$ es borde de una superficie S
- Stokes: $\int_C \vec{X} ds = \iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS$

demostración

- D simplemente conexo
- $\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$
- C curva cerrada
- $\Rightarrow C$ es borde de una superficie S
- Stokes: $\int_C \vec{X} ds = \iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = 0$

demostración

- D simplemente conexo
- $\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$
- C curva cerrada
- $\Rightarrow C$ es borde de una superficie S
- Stokes: $\int_C \vec{X} ds = \iint_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{N} dS = 0$
- $\Rightarrow \vec{X}$ es de gradientes