Campos sin divergencia y potenciales vectores

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

24 de mayo de 2011

campo sin divergencia

campo sin divergencia

- $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{X} = (A, B, C)$

campo sin divergencia

campo sin divergencia

- $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{X} = (A, B, C)$
- campo sin divergencia o solenoidal si

campo sin divergencia

campo sin divergencia

- $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{X} = (A, B, C)$
- campo sin divergencia o solenoidal si
- $\operatorname{div} \vec{X} = 0$, es decir

campo sin divergencia

campo sin divergencia

- $\vec{X}:\Omega\to\mathbb{R}^3$, $\vec{X}=(A,B,C)$
- campo sin divergencia o solenoidal si
- div $\vec{X}=0$, es decir
- $$A_x+B_y+C_z=0$$

potencial vector

potencial vector

- $\vec{X}, \vec{Y} : \Omega \to \mathbb{R}^3$

potencial vector

potencial vector

- $\vec{X}, \vec{Y} : \Omega \to \mathbb{R}^3$
- $\vec{Y}$ potencial vector de $\vec{X}$ si

potencial vector

potencial vector

- $\vec{X}, \vec{Y} : \Omega \to \mathbb{R}^3$
- $\vec{Y}$ potencial vector de $\vec{X}$ si
- $$\vec{X} = \operatorname{rot} \vec{Y}$$

teorema

teorema

- $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

teorema

teorema

- $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- $\vec{X}$ campo sin divergencia

teorema

teorema

- $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- $\vec{X}$ campo sin divergencia
- $\Rightarrow \vec{X}$ tiene un potencial vector

teorema

teorema

- $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- $\vec{X}$ campo sin divergencia
- $\Rightarrow \vec{X}$ tiene un potencial vector
- $\exists\ \vec{Y}$ tal que
$$\vec{X} = \operatorname{rot} \vec{Y}$$

observación

observación importante

para que valga el teorema, $\vec{X}$ tiene que estar definido y ser solenoidal en todo $\mathbb{R}^3$

demostración

- $\vec{X} = (A, B, C)$ dato

demostración

- $\vec{X} = (A, B, C)$ dato
- $\vec{Y} = (P, Q, R)$ desconocido

demostración

- $\vec{X} = (A, B, C)$ dato
- $\vec{Y} = (P, Q, R)$ desconocido
- queremos que rot $\vec{Y} = \vec{X}$

demostración

- $\vec{X} = (A, B, C)$ dato
- $\vec{Y} = (P, Q, R)$ desconocido
- queremos que $\operatorname{rot} \vec{Y} = \vec{X}$
- $\operatorname{rot} \vec{Y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

demostración

- $\vec{X} = (A, B, C)$ dato
- $\vec{Y} = (P, Q, R)$ desconocido
- queremos que rot $\vec{Y} = \vec{X}$
- rot $\vec{Y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
- rot $\vec{Y} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (A, B, C)$

demostración

- queremos que $\begin{cases} R_y - Q_z = A \\ P_z - R_x = B \\ Q_x - P_y = C \end{cases}$

demostración

- queremos que $\begin{cases} R_y - Q_z = A \\ P_z - R_x = B \\ Q_x - P_y = C \end{cases}$
- tenemos muchos grados de libertad, así que pedimos $R = 0$

demostración

- queremos que $\begin{cases} R_y - Q_z = A \\ P_z - R_x = B \\ Q_x - P_y = C \end{cases}$
- tenemos muchos grados de libertad, así que pedimos $R = 0$
- $\begin{cases} -Q_z = A & (1) \\ P_z - = B & (2) \\ Q_x - P_y = C & (3) \end{cases}$

demostración

- de (1) $Q = -\int_0^z A(x, y, t)dt + g(x, y)$

demostración

- de (1) $Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt + g(x,y)$
- de (2) $P = \int_0^z B(x,y,t)dt + h(x,y)$

demostración

- de (1) $Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt + g(x,y)$
- de (2) $P = \int_0^z B(x,y,t)dt + h(x,y)$
- verifiquemos (3) $Q_x - P_y = -\int_0^z (A_x + B_y)dt + g_x - h_y$

demostración

- de (1) $Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt + g(x,y)$
- de (2) $P = \int_0^z B(x,y,t)dt + h(x,y)$
- verifiquemos (3) $Q_x - P_y = -\int_0^z (A_x + B_y)dt + g_x - h_y$
- $Q_x - P_y = \int_0^z C_z + g_x - h_y$

demostración

- de (1) $Q = -\int_0^z A(x, y, t)dt + g(x, y)$
- de (2) $P = \int_0^z B(x, y, t)dt + h(x, y)$
- verifiquemos (3) $Q_x - P_y = -\int_0^z (A_x + B_y)dt + g_x - h_y$
- $Q_x - P_y = \int_0^z C_z + g_x - h_y$
- $Q_x - P_y = C(x, y, z) - C(x, y, 0) + g_x - h_y = C$

demostración

- de (1) $Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt + g(x,y)$
- de (2) $P = \int_0^z B(x,y,t)dt + h(x,y)$
- verifiquemos (3) $Q_x - P_y = -\int_0^z (A_x + B_y)dt + g_x - h_y$
- $Q_x - P_y = \int_0^z C_z + g_x - h_y$
- $Q_x - P_y = C(x,y,z) - C(x,y,0) + g_x - h_y = C$
- lo cumple, por ejemplo $h(x,y) = -\int_0^y C(x,t,0)dt$, $g(x,y) = 0$

demostración

- chequeemos $\begin{cases} P = \int_0^z B(x,y,t)dt - \int_0^y C(x,y,0) \\ Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt \\ R = 0 \end{cases}$

demostración

- chequeemos $\begin{cases} P = \int_0^z B(x,y,t)dt - \int_0^y C(x,y,0) \\ Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt \\ R = 0 \end{cases}$
- cumple: $R_y - Q_z =$

demostración

- chequeemos $\begin{cases} P = \int_0^z B(x,y,t)dt - \int_0^y C(x,y,0) \\ Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt \\ R = 0 \end{cases}$
- cumple: $R_y - Q_z = A$

demostración

- chequeemos $\begin{cases} P = \int_0^z B(x,y,t)dt - \int_0^y C(x,y,0) \\ Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt \\ R = 0 \end{cases}$
- cumple: $R_y - Q_z = A$
- $P_z - R_x =$

demostración

- chequeemos $\begin{cases} P = \int_0^z B(x,y,t)dt - \int_0^y C(x,y,0) \\ Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt \\ R = 0 \end{cases}$
- cumple: $R_y - Q_z = A$
- $P_z - R_x = B$

demostración

- chequeemos $\begin{cases} P = \int_0^z B(x,y,t)dt - \int_0^y C(x,y,0) \\ Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt \\ R = 0 \end{cases}$
- cumple: $R_y - Q_z = A$
- $P_z - R_x = B$
- $Q_x - P_y =$

demostración

- chequeemos $\begin{cases} P = \int_0^z B(x,y,t)dt - \int_0^y C(x,y,0) \\ Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt \\ R = 0 \end{cases}$
- cumple: $R_y - Q_z = A$
- $P_z - R_x = B$
- $Q_x - P_y = C$

demostración

- chequeemos $\begin{cases} P = \int_0^z B(x,y,t)dt - \int_0^y C(x,y,0) \\ Q = -\int_0^z A(x,y,t)dt \\ R = 0 \end{cases}$
- cumple: $R_y - Q_z = A$
- $P_z - R_x = B$
- $Q_x - P_y = C$
- $\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{Y} = \vec{X}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- Averiguar si existe potencial vector $\vec{Y}$ de $\vec{X} = (x - 1, -y, 2x)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- Averiguar si existe potencial vector $\vec{Y}$ de $\vec{X} = (x-1, -y, 2x)$
- con $\vec{Y} = (P, Q, R)$ tales que

ejemplo 1

ejemplo 1

- Averiguar si existe potencial vector $\vec{Y}$ de $\vec{X} = (x-1, -y, 2x)$
- con $\vec{Y} = (P, Q, R)$ tales que
- $P \equiv 0$

ejemplo 1

ejemplo 1

- Averiguar si existe potencial vector $\vec{Y}$ de $\vec{X} = (x - 1, -y, 2x)$
- con $\vec{Y} = (P, Q, R)$ tales que
- $P \equiv 0$
- $Q(1, y, z) = 1 + y^2 + z$

ejemplo 1

ejemplo 1

- Averiguar si existe potencial vector $\vec{Y}$ de $\vec{X} = (x-1, -y, 2x)$
- con $\vec{Y} = (P, Q, R)$ tales que
- $P \equiv 0$
- $Q(1, y, z) = 1 + y^2 + z$
- $R(1, 0, z) = e^z$

ejemplo 1

- div $\vec{Y} = (x-1)_x + (-y)_y + (2x)_z = 0$

ejemplo 1

- div $\vec{Y} = (x-1)_x + (-y)_y + (2x)_z = 0$
- $\Rightarrow$ existe un potencial vector, pero no sabemos si hay uno que verifique todas las restricciones

ejemplo 1

- div $\vec{Y} = (x-1)_x + (-y)_y + (2x)_z = 0$
- $\Rightarrow$ existe un potencial vector, pero no sabemos si hay uno que verifique todas las restricciones
- veamos: rot $\vec{Y} = \vec{X}$, $P \equiv 0$

ejemplo 1

- div $\vec{Y} = (x-1)_x + (-y)_y + (2x)_z = 0$
- $\Rightarrow$ existe un potencial vector, pero no sabemos si hay uno que verifique todas las restricciones
- veamos: rot $\vec{Y} = \vec{X}$, $P \equiv 0$
- $\Rightarrow \begin{cases} R_y - Q_z = x - 1 \\ -R_x = -y \\ Q_x = 2x \end{cases}$

ejemplo 1

- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x Q_x(t,y,z)dt$

ejemplo 1

- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x Q_x(t,y,z)dt$
- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x 2tdt$

ejemplo 1

- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x Q_x(t,y,z)dt$
- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x 2tdt$
- $Q(x,y,z) = 1 + y^2 + z + x^2 - 1$

ejemplo 1

- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x Q_x(t,y,z)dt$
- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x 2t dt$
- $Q(x,y,z) = 1 + y^2 + z + x^2 - 1 = x^2 + y^2 + z$

ejemplo 1

- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x Q_x(t,y,z)dt$
- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x 2tdt$
- $Q(x,y,z) = 1 + y^2 + z + x^2 - 1 = x^2 + y^2 + z$
- $R(x,y,z) - R(1,y,z) = \int_1^x R_x(t,y,z)dt$

ejemplo 1

- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x Q_x(t,y,z)dt$
- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x 2tdt$
- $Q(x,y,z) = 1 + y^2 + z + x^2 - 1 = x^2 + y^2 + z$
- $R(x,y,z) - R(1,y,z) = \int_1^x R_x(t,y,z)dt$
- $R(x,y,z) - R(1,y,z) = \int_1^x ydt$

ejemplo 1

- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x Q_x(t,y,z)dt$
- $Q(x,y,z) - Q(1,y,z) = \int_1^x 2tdt$
- $Q(x,y,z) = 1 + y^2 + z + x^2 - 1 = x^2 + y^2 + z$
- $R(x,y,z) - R(1,y,z) = \int_1^x R_x(t,y,z)dt$
- $R(x,y,z) - R(1,y,z) = \int_1^x ydt$
- $R(x,y,z) = R(1,y,z) + yx - y$

ejemplo 1

- $R_y - Q_z = x - 1$

ejemplo 1

- $R_y - Q_z = x - 1$
- $R_y(1, y, z) + x - 2 = x - 1$

ejemplo 1

- $R_y - Q_z = x - 1$
- $R_y(1, y, z) + x - 2 = x - 1$
- $R_y(1, y, z) = 1$

ejemplo 1

- $R_y - Q_z = x - 1$
- $R_y(1, y, z) + x - 2 = x - 1$
- $R_y(1, y, z) = 1$
- $R(1, y, z) - R(1, 0, z) = \int_0^y R_y(1, t, z)dt$

ejemplo 1

- $R_y - Q_z = x - 1$
- $R_y(1, y, z) + x - 2 = x - 1$
- $R_y(1, y, z) = 1$
- $R(1, y, z) - R(1, 0, z) = \int_0^y R_y(1, t, z)dt$
- $R(1, y, z) = R(1, 0, z) + y = e^z + y$

ejemplo 1

- $R_y - Q_z = x - 1$
- $R_y(1, y, z) + x - 2 = x - 1$
- $R_y(1, y, z) = 1$
- $R(1, y, z) - R(1, 0, z) = \int_0^y R_y(1, t, z)dt$
- $R(1, y, z) = R(1, 0, z) + y = e^z + y$
- $\Rightarrow R(x, y, z) = e^z + y + yx - y$

ejemplo 1

- $R_y - Q_z = x - 1$
- $R_y(1, y, z) + x - 2 = x - 1$
- $R_y(1, y, z) = 1$
- $R(1, y, z) - R(1, 0, z) = \int_0^y R_y(1, t, z)dt$
- $R(1, y, z) = R(1, 0, z) + y = e^z + y$
- $\Rightarrow R(x, y, z) = e^z + y + yx - y = e^z + yx$

ejemplo 1

- conclusión:

ejemplo 1

- conclusión:
- $\vec{Y} = (0, x^2 + y^2 + z, e^z + yz)$

ejemplo 1

- conclusión:
- $\vec{Y} = (0, x^2 + y^2 + z, e^z + yz)$
- es el único potencial vector de $\vec{X}$

ejemplo 1

- conclusión:
- $\vec{Y} = (0, x^2 + y^2 + z, e^z + yz)$
- es el único potencial vector de $\vec{X}$
- cumpliendo las restricciones dadas.

ejemplo 1

- conclusión:
- $\vec{Y} = (0, x^2 + y^2 + z, e^z + yz)$
- es el único potencial vector de $\vec{X}$
- cumpliendo las restricciones dadas.
- chequear que es el único.

recordar

recordar

es necesario que $\vec{X}$ esté definido y sea solenoidal en todo $\mathbb{R}^3$ para que valga el teorema

ejemplo

ejemplo

un ejemplo donde div $\vec{X} = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, y $\vec{X}$ no tiene potencial vector

ejemplo 2

ejemplo 2

- el campo gravitacional

ejemplo 2

ejemplo 2

- el campo gravitacional
- $\vec{X}_G = -\frac{GMm(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -C_G \frac{\vec{r}}{r^3}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- el campo gravitacional
- $\vec{X}_G = -\frac{GMm(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -C_G \frac{\vec{r}}{r^3}$
- es solenoidal (no tiene divergencia)

ejemplo 2

- $r_x = \frac{x}{r}, r_y = \frac{y}{r}, r_z = \frac{z}{r}$

ejemplo 2

- $r_x = \frac{x}{r}, r_y = \frac{y}{r}, r_z = \frac{z}{r}$
- $A_x = -C_G \frac{r^3 - 3 x r_x r^2}{r^6}$

ejemplo 2

- $r_x = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$, $r_z = \frac{z}{r}$
- $A_x = -C_G \frac{r^3 - 3 x r_x r^2}{r^6}$
- $A_x = -C_G \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$

ejemplo 2

- $r_x = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$, $r_z = \frac{z}{r}$
- $A_x = -C_G \frac{r^3 - 3xr_x r^2}{r^6}$
- $A_x = -C_G \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$
- $B_y = -C_G \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$

ejemplo 2

- $r_x = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$, $r_z = \frac{z}{r}$
- $A_x = -C_G \frac{r^3 - 3x r_x r^2}{r^6}$
- $A_x = -C_G \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$
- $B_y = -C_G \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$
- $C_z = -C_G \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$

ejemplo 2

- $r_x = \frac{x}{r},\ r_y = \frac{y}{r},\ r_z = \frac{z}{r}$
- $A_x = -C_G \frac{r^3 - 3x r_x r^2}{r^6}$
- $A_x = -C_G \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$
- $B_y = -C_G \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$
- $C_z = -C_G \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$
- $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{X}_G = A_x + B_y + C_z$

ejemplo 2

- $r_x = \frac{x}{r}, r_y = \frac{y}{r}, r_z = \frac{z}{r}$
- $A_x = -C_G \frac{r^3 - 3x r_x r^2}{r^6}$
- $A_x = -C_G \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$
- $B_y = -C_G \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$
- $C_z = -C_G \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$
- $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{X}_G = A_x + B_y + C_z = 0$

ejemplo 2

- supongamos que existiera $\vec{Y} = (P, Q, R)$

ejemplo 2

- supongamos que existiera $\vec{Y} = (P, Q, R)$
- tal que $\text{rot}(P, Q, R) = \frac{\vec{r}}{r^3}$

ejemplo 2

- supongamos que existiera $\vec{Y} = (P, Q, R)$
- tal que $\text{rot}(P, Q, R) = \frac{\vec{r}}{r^3}$
- (la constante $-C_G$ no tiene importancia)

ejemplo 2

- supongamos que existiera $\vec{Y} = (P, Q, R)$
- tal que $\mathrm{rot}(P, Q, R) = \frac{\vec{r}}{r^3}$
- (la constante $-C_G$ no tiene importancia)
- $\Rightarrow R_y - Q_z = \frac{x}{r^3}$ (1)

ejemplo 2

- supongamos que existiera $\vec{Y} = (P, Q, R)$
- tal que $\text{rot}(P, Q, R) = \frac{\vec{r}}{r^3}$
- (la constante $-C_G$ no tiene importancia)
- $\Rightarrow R_y - Q_z = \frac{x}{r^3}$ (1)
- $P_z - R_x = \frac{y}{r^3}$ (2)

ejemplo 2

- supongamos que existiera $\vec{Y} = (P, Q, R)$
- tal que $\text{rot}(P, Q, R) = \frac{\vec{r}}{r^3}$
- (la constante $-C_G$ no tiene importancia)
- $\Rightarrow R_y - Q_z = \frac{x}{r^3}$ (1)
- $P_z - R_x = \frac{y}{r^3}$ (2)
- $Q_x - P_y = \frac{z}{r^3}$ (3)

ejemplo 2

- supongamos que existiera $\vec{Y} = (P, Q, R)$
- tal que $\mathrm{rot}(P, Q, R) = \frac{\vec{r}}{r^3}$
- (la constante $-C_G$ no tiene importancia)
- $\Rightarrow R_y - Q_z = \frac{x}{r^3}$ (1)
- $P_z - R_x = \frac{y}{r^3}$ (2)
- $Q_x - P_y = \frac{z}{r^3}$ (3)
- aquí no podemos suponer que hay una componente cero

ejemplo 2

- supongamos que existiera $\vec{Y} = (P, Q, R)$
- tal que $\text{rot}(P, Q, R) = \frac{\vec{r}}{r^3}$
- (la constante $-C_G$ no tiene importancia)
- $\Rightarrow R_y - Q_z = \frac{x}{r^3}$ (1)
- $P_z - R_x = \frac{y}{r^3}$ (2)
- $Q_x - P_y = \frac{z}{r^3}$ (3)
- aquí no podemos suponer que hay una componente cero
- porque debemos demostrar que ningún campo $\vec{Y}$ es solución

ejemplo 2

- fijamos $z_0 \neq 0$. Entonces de (1) y (2)

ejemplo 2

- fijamos $z_0 \neq 0$. Entonces de (1) y (2)
- $P(x, y, z) - P(x, y, z_0) = (z - z_0)\frac{y}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_x dt$

ejemplo 2

- fijamos $z_0 \neq 0$. Entonces de (1) y (2)
- $P(x, y, z) - P(x, y, z_0) = (z - z_0)\frac{y}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_x dt$
- $Q(x, y, z) - Q(x, y, z_0) = -(z - z_0)\frac{x}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_y dt$

ejemplo 2

- fijamos $z_0 \neq 0$. Entonces de (1) y (2)
- $P(x,y,z) - P(x,y,z_0) = (z - z_0)\frac{y}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_x dt$
- $Q(x,y,z) - Q(x,y,z_0) = -(z - z_0)\frac{x}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_y dt$
- $Q_x - P_y = Q_x(x,y,z_0) - P_y(x,y,z_0) +$

ejemplo 2

- fijamos $z_0 \neq 0$. Entonces de (1) y (2)
- $P(x,y,z) - P(x,y,z_0) = (z - z_0)\frac{y}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_x dt$
- $Q(x,y,z) - Q(x,y,z_0) = -(z - z_0)\frac{x}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_y dt$
- $Q_x - P_y = Q_x(x,y,z_0) - P_y(x,y,z_0) +$
- $-(z - z_0)\frac{2r^2 - 3(x^2+y^2)}{r^5}$

ejemplo 2

- fijamos $z_0 \neq 0$. Entonces de (1) y (2)
- $P(x,y,z) - P(x,y,z_0) = (z - z_0)\frac{y}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_x dt$
- $Q(x,y,z) - Q(x,y,z_0) = -(z - z_0)\frac{x}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_y dt$
- $Q_x - P_y = Q_x(x,y,z_0) - P_y(x,y,z_0) +$
- $-(z - z_0)\frac{2r^2 - 3(x^2+y^2)}{r^5}$
- $\int_{z_0}^{z}(R_{yx} - R_{xy})dt$

ejemplo 2

- fijamos $z_0 \neq 0$. Entonces de (1) y (2)
- $P(x,y,z) - P(x,y,z_0) = (z - z_0)\frac{y}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_x dt$
- $Q(x,y,z) - Q(x,y,z_0) = -(z - z_0)\frac{x}{r^3} + \int_{z_0}^{z} R_y dt$
- $Q_x - P_y = Q_x(x,y,z_0) - P_y(x,y,z_0) +$
- $-(z - z_0)\frac{2r^2 - 3(x^2+y^2)}{r^5}$
- $\int_{z_0}^{z} (R_{yx} - R_{xy}) dt$
- $Q_x - P_y = Q_x(x,y,z_0) - P_y(x,y,z_0) - (z - z_0)\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5} \neq \frac{z}{r^3}$

ejemplo 2

- en efecto para cada (x, y) fijos, tenemos

ejemplo 2

- en efecto para cada (x, y) fijos, tenemos
- $Q_x - P_y = O(1)$

ejemplo 2

- en efecto para cada (x, y) fijos, tenemos
- $Q_x - P_y = O(1)$
- mientras que: $\frac{z}{r^3} = O(z^{-2})$